

## REFLEXIONES EN TORNO AL DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA PROPUESTA DE ACTIVIDADES SOBRE CÓNICAS USANDO GEOGEBRA: INTERCAMBIO BRASIL-ARGENTINA

Pérez Medina Carlos Roberto  
mathperez@gmail.com

Doctorando del Programa Doctorado en  
Ciencias de la Educación, Universidad  
Nacional de Córdoba. Docente de la  
Universidad Nacional de Río Negro  
(UNRN), sub-sede General Roca,  
Becario Doctoral del IIECNyMat, Sede  
Alto Valle y Valle Medio. Argentina.

Souto Daise Lago Pereira  
daiselago@gmail.com

Doutoranda do Programa de Pós-  
Graduação em Educação Matemática,  
Universidades Estadual Paulista  
(UNESP), campus de Rio Claro, SP.  
Docente da Universidade do Estado do  
Mato Grosso. Membro do GPIMEM  
desde 2010. Brasil.

Modalidad: Comunicación

Nivel Educativo: Terciario, Formación y actualización docente.

Palabras clave: Cónicas, Álgebra, Evaluación, Educación Matemática.

Resumen

*Presentamos una experiencia de implementación en aula de un conjunto de actividades diseñadas sobre Cónicas para desarrollarse usando GeoGebra, abordando este contenido desde un tratamiento algebraico, por medio de la manipulación y análisis de las expresiones algebraicas de éstas curvas y su correspondiente efecto gráfico. Son dos los aspectos que queremos resaltar de la propuesta: uno que corresponde a la implementación es el uso del software tanto en una actividad de clase como en una de evaluación, pues se usó como recurso para evaluar en un examen parcial de la materia; y el otro que corresponde al diseño, es el uso de una personalización de la barra de herramientas del programa como variable didáctica de la propuesta. La implementación se efectuó en el curso Geometría del primer año de la carrera Diseño de Interiores y Mobiliario de la UNRN (General Roca-Argentina), y el diseño de las actividades se realizó como una actividad de evaluación en el marco del curso de extensión online "Tendências em Educação Matemática" que ofrece la UNESP (Rio Claro-Brasil). En este contexto la experiencia que presentamos constituye un intercambio entre Brasil y Argentina en el ámbito de la Educación Matemática que es fructífero y merece ser destacado.*

**Curso Tendências em Educação Matemática.** Este curso de extensión se viene ofreciendo desde el año 2000 en la modalidad a distancia online, a profesores de matemáticas de varias partes de Brasil y de otros países, desde el *Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"*, Rio Claro-São Paulo-Brasil (IGCE-UNESP). Está coordinado por el Prof. Marcelo de Carvalho Borba quien es docente del *Programa de pós-graduação em Educação Matemática* de la UNESP-RC, y coordinador del *Grupo de Pesquisa em Informática outras mídias e Educação Matemática* (GPIMEM). El curso se configura como un contexto práctico para la formación continua de los profesores y tiene como

objetivo general: analizar críticamente algunas de las tendencias en educación matemática, iniciar un diálogo acerca de qué es la investigación en educación matemática y proporcionar a los maestros una experiencia en la práctica docente apoyada por diferentes enfoques pedagógicos.

El marco inicial del intercambio entre Brasil y Argentina, al que nos referimos en el resumen, fue la décima edición del curso, en el que el primer autor de este artículo actuó como un participante y el segundo autor como investigador y auxiliar en la organización. En este espacio fueron discutidas críticamente algunas de las tendencias en educación matemática, y además, fueron discutidos otros temas sobre el estudio de las secciones cónicas con el software de matemáticas dinámica – GeoGebra (<http://www.geogebra.org>). El entorno virtual de aprendizaje en el que se desarrolló el intercambio en el curso fue Tidia-Ae (<http://tidia-ae.rc.unesp.br>), que cuenta con herramientas como chat, correo electrónico, foros y portafolio.

La propuesta del curso estaba anclada en una visión epistemológica de los *seres-humanos-con-medias* que cree en una forma cualitativamente diferente de producir conocimiento cuando las tecnologías de la información y la comunicación son incorporadas al contexto del aula de clase. Esta visión considera actores humanos y no humanos como protagonistas en el proceso, que forman una unidad inextricable que piensa en conjunto (Borba & Villarreal, 2005).

Cabe decir que las ideas que impregnan las tareas de naturaleza matemática, foco de este artículo, fueron apoyadas en el enfoque con tecnologías experimentales de Borba y Villarreal (2005). La naturaleza dinámica de algunos software educativos, como GeoGebra, permite que las actividades experimentales sean exploradas, ya que con este tipo de tecnología la elaboración de conjeturas, refutaciones y sus respectivas justificaciones pueden ser favorecidas (Souto & Santos, 2010).

Apoyados en estas ideas, el trabajo que se propuso a los participantes del curso fue realizar tres tareas que implican la construcción de la parábola, la elipse y la hipérbola, las cuales se describen en detalle en la siguiente sección.

**Diseño de las actividades.** Como actividad de evaluación final del curso virtual, se pedía diseñar tres actividades para el aula de clase sobre el tema cónicas, una por cada curva: parábola, elipse e hipérbola. El conjunto de las tres actividades conformaba el trabajo final, el cual tenía como consigna la siguiente (la que se pone aquí es la que corresponde a la parábola, y es la misma en el caso de la hipérbola y la elipse).

*Esta atividade é apenas uma pequena parte do que podemos propor ao explorar o conceito de parábola. Vamos agora construir, experimentar, realizar outras análises e produzir uma atividade para se aplicada em sala de aula... É importante que seja bem detalhada, como se vocês estivessem planejando uma aula.*

Para producir las actividades a ser aplicadas en el aula de clase para el estudio de las cónicas, se tuvo en cuenta fundamentalmente el tratamiento matemático que desarrollaba la propuesta de las actividades del curso virtual, con el propósito de elegir un camino que fuera distinto o poco indagado en éstas. La propuesta del curso consistía en explorar las cónicas como lugar geométrico por medio de la construcción de sus representaciones ejecutables a partir de los elementos geométricos básicos que las definen, también fueron incluidos aspectos algebraicos para el estudio pero no fueron tratados con igual profundidad. La siguiente tabla describe el enfoque de la exploración para las distintas partes de cada actividad, vale la pena decir que las tres actividades (parábola, elipse y hipérbola) guardaban la misma estructura general, por eso se presenta una tabla que describe la estructura de las tres:

<b>Enfoque</b>	<b>Tratamiento matemático</b>
<b>Traza</b>	A partir de los elementos geométricos básicos que definen la curva, la exploración se realiza por arrastre del punto generador y usando la herramienta <i>traza</i> para formarla. Se solicita la descripción de lo que ocurre en la pantalla gráfica por esta acción de arrastre y la formulación de relaciones respecto de los elementos geométricos de cada curva. Luego habilitando la ventana algebraica y continuando con el arrastre, se pide describir qué ocurre también en ésta en relación con el gráfico.
<b>Lugar geométrico</b>	A partir de los elementos geométricos básicos que definen la curva, la exploración aquí utiliza la herramienta <i>Lugar Geométrico</i> . Agregando a la representación otros elementos geométricos, se pide identificar las relaciones que caracterizan las propiedades geométricas de la curva y su observación en la ventana algebraica.
<b>Ecuación canónica</b>	A través de la barra de entrada se ingresa la ecuación canónica de la curva y se pregunta qué ocurre con la ecuación y el gráfico al redefinir los valores de sus parámetros.
<b>Ecuación por traslación de ejes</b>	El estudio se realiza a través de la redefinición de los valores de los parámetros de la ecuación de la curva obtenida a través del proceso de traslación de ejes.

Tabla 1. Estructura de las actividades sobre cónicas del curso virtual

Como se puede ver en la tabla, el tratamiento matemático que desarrolló la propuesta del curso virtual, estuvo fuertemente orientado hacia el lugar geométrico, aunque también contempló el lado algebraico, el énfasis no estaba puesto en éste aspecto y fue poco explorado. Dada esta situación, elegimos la perspectiva algebraica como camino para el estudio y análisis de las cónicas en la propuesta de actividades que se pedía diseñar. Se decidió aprovechar algunas inquietudes que las actividades del curso

dejaban abiertas en algunos de sus incisos del enfoque “Ecuación canónica”, en los que se preguntaba por lo que ocurre con la ecuación y el gráfico cuando se redefine el valor de los parámetros. De esta manera, se decidió que el abordaje del contenido se hace desde un tratamiento algebraico, por medio de la manipulación y análisis de las expresiones algebraicas de éstas curvas y su correspondiente efecto gráfico.

El objetivo general de la propuesta de actividades es la construcción de conocimiento en dos niveles: uno es el matemático sobre el tema cónicas, particularmente sobre la relación que se establece entre la ecuación y su gráfico cartesiano; y otro es el práctico en el uso del software, orientado hacia el uso de herramientas de tipo algebraico y el manejo de propiedades de curvas como color, sombreado y rastro. Como características generales de estructura de las tres actividades de la propuesta están las siguientes: Se usan la ventana gráfica con los ejes coordenados y la ventana algebraica; La actividad se estructura en partes que estudian un aspecto particular de la curva, y al final de cada una se pide formular un enunciado que describa el comportamiento del gráfico según la acción sugerida sobre los parámetros de la ecuación y el gráfico mismo; Cuando hay acciones en el software que se deben repetir varias veces, éstas son indicadas a lo largo de la actividad de distintas maneras (Ej. Entrada de valores en la ventana algebraica; modificación de valores de los parámetros); se realiza una personalización de la barra de herramientas que consiste en ocultar el botón que corresponde a las herramientas de cónicas. En el anexo se muestra el esquema general del diseño de las actividades propuestas para parábola e hipérbola, la de elipse está completa.

**Implementación de las actividades.** La descripción que se realizamos en este apartado corresponde apenas a la experiencia en cuanto a metodología de implementación de las actividades en la clase, dado que la extensión del documento no da lugar a presentar los análisis de las respuestas de las alumnas, realizados respecto de los propósitos de aprendizaje que se pretendían con las actividades.

La implementación de las actividades se realizó en la asignatura *Geometría* (cursada del 2011) de la carrera *Diseño de Interiores y Mobiliario*, que se ofrece en la Universidad Nacional de Río Negro, en la sub-sede General Roca de la sede Alto Valle y Valle Medio (Argentina). El tema curvas cónicas correspondía a la unidad 4 cuyos contenidos son: *Manejo de sistemas 2D. Lugar geométrico. Sistema de coordenadas cartesianas. Ecuación de segundo grado en  $x$  e  $y$ . Obtención de las cónicas como secciones planas. Superficie cónica: Circunferencia, elipse, hipérbola, parábola.* El objetivo general de la

asignatura fue: *reconocer a la geometría para el estudiante de diseño de interiores y mobiliario, como un instrumento del cual se sirve, aprovechando todo lo que ella puede brindarle como técnica*. La metodología de clase planteada era de tipo dinámica con una participación activa del estudiante y clases teórico-prácticas, donde la presentación de la teoría se realiza en el momento que la actividad o el desarrollo de la práctica, indique o requiera la formalización de los conceptos involucrados.

Las actividades de la propuesta exigen un conocimiento práctico de manejo del software relacionado con las herramientas de tipo algebraico y de gráficas cartesianas, que los estudiantes de la asignatura no poseían, puesto que las unidades anteriores al tema de cónicas en las que ellos habían trabajado también con el software, correspondían a una geometría plana no métrica por lo que las herramientas que conocían hasta ahora eran de esta índole. Por esta situación, fue necesario que se destinaran tres clases para la implementación, una por cada actividad, y que la metodología de trabajo fuera diferente para cada una. En consecuencia se realizaron modificaciones muy generales a las actividades, fundamentalmente de formato. Vale la pena resaltar, que en las tres actividades se personalizó la barra de herramientas restringiendo el botón que corresponde a las herramientas de cónicas, aspecto que fue clave para conseguir cumplir los propósitos de la actividad.

CÓNICA	ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN
<b>Parábola</b>	Actividad de exploración dirigida por el profesor.	Se desarrolló a modo de exposición del profesor con una presentación de diapositivas. Esta metodología de trabajo tenía un doble propósito: 1) que los estudiantes aprendieran el contenido matemático parábola, y 2) el manejo del software en las herramientas específicas para ecuaciones y gráficos en el plano cartesiano.
<b>Elipse</b>	Actividad de Trabajo Práctico desarrollado en clase. (Anexo)	Los alumnos trabajan de manera individual con la actividad impresa en papel y el profesor acompaña el proceso respondiendo a las preguntas que surgen. Producto de la actividad, los estudiantes debían entregar por escrito las respuestas a las preguntas planteadas en la actividad y por mail los archivos geogebra en los que trabajaron. Material que fue utilizado con el propósito de hacer una devolución a los estudiantes sobre su trabajo.
<b>Hipérbola</b>	Actividad de examen parcial de	En el segundo examen parcial se evaluó el tema de curvas cónicas, y dado que faltaba estudiar la hipérbola, se decidió

	la materia.	diseñarlo en dos partes. En la primera parte se evaluó el contenido de parábola y elipse a partir de preguntas de distinto tipo. En la segunda parte del examen se evalúa el tema de hipérbola, con una actividad exploratoria sobre su ecuación, del mismo estilo que las de elipse y parábola desarrolladas en clase, pero limitada a un solo caso.
--	-------------	---

Tabla 2.Descripción de las actividades implementadas en el aula de clase

**Algunas Reflexiones.** Las reflexiones que aquí presentamos se han elaborado a partir de las respuestas dadas por el primer autor a preguntas formuladas por el segundo autor, con base en los propósitos de la implementación de las actividades y la valoración del trabajo de los alumnos en la clase a través del registro escrito y digital de su actividad.

¿De qué manera los alumnos realizan o formulan las hipótesis? La mayoría de los alumnos formulan las hipótesis en términos de los casos particulares con los que han trabajado como una lista de hechos que observan en la ventana gráfica sobre el gráfico de la ecuación que se está estudiando, tal listado son ideas o frases que guardan poco o nada de cohesión entre ellas. En algunos casos, aún cuando en la consigna se explicita que se debe formular un enunciado que describa en el caso general el comportamiento del gráfico de una cierta ecuación, los estudiantes explicitan las condiciones impuestas sobre los valores de los parámetros de los casos particulares a los que se refieren. Otros estudiantes, sí formulan las hipótesis en términos generales e imponen las condiciones que vinieron usando para los casos particulares, usándolos como ejemplos. La formulación de hipótesis sucede en la medida en que el alumno consigue “pensar junto” con el software, pues en esos momentos es posible verificar que los feedbacks del GeoGebra provocan reorganizaciones en el pensamiento de los alumnos. Ese aplicativo puede ser, por tanto, considerado un autor en el proceso de formulación de hipótesis. Ese tipo de observación converge para la visión epistemológica de los seres-humanos-con-medias, propuesto por Borba (1999).

En su opinión ¿cuál es el rol que el software desempeña en la formulación de tales hipótesis? El rol es el de ser un protagonista en la visualización de los hechos geométricos que dependen de las entradas algebraicas que hacen los estudiantes, en la mayoría de los casos. De esta manera, el software entrega feedbacks a las acciones de los alumnos, reorganizando sus pensamientos, a partir de la presentación de los gráficos de las curvas de las ecuaciones que se estudian, y ver los cambios que se generan en éste

según la variación de los parámetros. Ese tipo de comportamiento está caracterizado como un proceso parcial de "moldagem recíproca" como proponen Borba y Villarreal (2005). En los casos en que las hipótesis están formuladas en términos de "proceso", el software también ayuda de un modo diferente, del que dependen los hechos matemáticos que los estudiantes pueden observar, el software les muestra qué pasa o puede pasar y les modifica su forma de pensar sobre las actividades dependiendo del uso del programa.

*¿Cuáles son las dificultades operacionales que los alumnos tuvieron con geogebra? Las dificultades operacionales que los alumnos tuvieron con el geogebra fueron relativas al funcionamiento del software básicamente, cuando querían cambiar los valores de los parámetros, en algunas ocasiones no se los permitía, por ejemplo. Tuvieron dificultad en la entrada de las expresiones algebraicas por la sintaxis propia que exige el programa (exponente cuadrático), también en la conservación del rastro de la curva dado que al mover la pantalla gráfica con zoom o la herramienta "Desplazar vista gráfica", se borraba de sus pantallas el rastro que había dejado algunas curvas que ya habían graficado, y esto en principio fue un problema.*

*¿Qué de las actividades fue novedad para los alumnos y qué no lo fue? ¿Porqué? Consideramos que la novedad fue que se comenzó a trabajar en una geometría analítica, incluyendo por supuesto ejes coordenados en el plano, coordenadas para los puntos, ecuaciones para las líneas o curvas en el plano; la entrada de expresiones algebraicas, el uso y la manipulación de objetos sobre la ventana algebraica, la herramienta de rastro y lo que les ofrecía ésta para responder a las preguntas formuladas. También fue novedad el estilo de preguntas que se les estaban haciendo, el tipo de situaciones de visualización planteadas, el mismo tipo de actividad exploratoria en el sentido de deducir cosas de lo que estaban haciendo con el software. Asimismo, que ahora los trabajos prácticos de la clase los entregaban en el formato digital del software, y el trabajo independiente de las estudiantes con el programa, sin la guía o dirección del profesor. En otras palabras, podemos decir que el abordaje-experimental-con-tecnologías (Borba & Villarreal, 2005), propuesto durante el curso "Tendência em Educação Matemática", tiene reflejos en la disciplina, siendo considerada, una novedad interesante.*

*¿Qué de la planeación no resultó? De lo que se planeo para la clase y no se logró llevar a cabo fue que las actividades fueran desarrolladas en su totalidad, que las estudiantes tuvieran un trabajo más autónomo, que manejaran conceptos básicos de matemáticas para que dedujeran de las preguntas las relaciones implícitas que se estaban sugiriendo,*

que tuvieran un mayor nivel de reflexión (autónomo) trabajando con el software. En síntesis, verificamos que, durante o desarrollo de las actividades, se formó un colectivo pensante de seres-humanos-con-GeoGebra.

### **Conclusiones**

Haber logrado sacar adelante esta experiencia de intercambio académico, a través de una comunicación online, a partir de una instancia de formación docente continua en un curso de extensión y su implicancia en nuevos enfoques de aplicación en el aula de clase, con una etapa de diseño coordinada desde Brasil y otra de implementación vivenciada en Argentina, constituye un avance importante para consolidar el área de estudio de la Educación Matemática en nuestra región con perspectiva de apertura a nuevos temas de estudio y propuestas de trabajo académico.

Presentamos aquí solo una conclusión breve y general dada la limitación del número de páginas permitido para este documento, sin embargo las consideraciones extendidas las exhibiremos en la comunicación presencial en el evento.

### **Referencias Bibliográficas**

- Borba, M.C. & Villarreal, M.V. (2005). Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New York: Springer.
- Nicolini, A., Santa Maria, G., Vasino, S. (1998). Matemática para arquitectura y diseño. Buenos Aires. Nueva Librería.
- Selva, A. C.V. & Borba, R.E.S. (2010). O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Souto, D. (2012). Refletindo sobre o papel do software GeoGebra na produção de conhecimentos matemáticos construídos por um coletivo pensante formado por humanos e mídias. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.
- Souto, D. & Santos, S. (2010). Explorando o ensino de cónicas no geogebra. Anais do X Encontro Paulista de Educação Matemática: X EP EM. São Carlos.
- Spinadel, V.W. de., Nottoli, H. (2008). Herramientas matemáticas para la arquitectura y el diseño. Buenos Aires. Nobuko

## ANEXO: DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

**ACTIVIDAD DE PARÁBOLA.** El propósito de esta actividad es la exploración de la ecuación cuadrática general  $y = ax^2 + bx + c$  analizándola a partir de cada uno de sus términos para deducir sus propiedades y características. Se comenzará con el término cuadrático, luego se incluye el término independiente y finalmente el término lineal. Esta exploración se hará usando el software geogebra y sus herramientas.

**Partes 1 y 2: Exploración del término cuadrático  $y = ax^2$ .** Explora la concavidad de la parábola al considerar varias ecuaciones para distintos valores de  $a$ , entrando inicialmente una ecuación por cada valor de  $a$  dado y luego cambiando el valor del parámetro  $a$  de la ecuación. Se usa la propiedad del color de la gráfica para observar su comportamiento y formular un enunciado que lo describa usando como condicionales “si  $a < 0$ ” y “si  $a > 0$ ”. En la parte 2, el parámetro  $a$  es manipulado como *deslizador*, y se usa la herramienta *rastro* del gráfico para estudiar la propiedad de la apertura de las ramas en relación con el valor absoluto de  $a$ .

**Parte 3: Exploración incluyendo el término independiente  $y = ax^2 + c$ .** Los dos parámetros  $a$  y  $c$  de la ecuación se manipulan como *deslizador* para estudiar qué del gráfico depende de cada uno: las coordenadas del vértice de la parábola, y cómo determinar en cualquier caso las intersecciones con los ejes y sus coordenadas.

**Parte 4: Exploración de la ecuación cuadrática completa  $y = ax^2 + bx + c$ .** Se invita a proponer una manera de explorar la ecuación cuadrática general usando la herramienta *deslizador*, considerando la variación del parámetro  $b$  y su experiencia previa.

## ACTIVIDAD EXPLORATORIA: ELIPSE. TRABAJO PRÁCTICO

El propósito de esta actividad es explorar la ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  y su gráfico correspondiente, a partir de la relación de tricotomía entre  $a$  y  $b$ . Se hará considerando en principio los elementos básicos del gráfico y la ecuación, para luego estudiar en profundidad cada uno de los casos de la tricotomía  $a > b$ ,  $a = b$  y  $a < b$ .

**Parte 1: Exploración inicial.** Usaremos para esta parte la ventana gráfica con los ejes coordenados, la ventana algebraica y el campo de entrada. Asegúrese que éstas estén habilitadas en el programa.

1. Introduzca  $a$  y  $b$  como parámetros desde el campo de entrada con los valores

siguientes  $a = 5$  y  $b = 3$ .

2. Introduzca la ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- a) Describa el gráfico que se obtiene de la ecuación. Intente hacerlo con el mayor detalle que le sea posible.
3. En la ventana algebraica, cliquee con el botón derecho del mouse sobre la ecuación ingresada en el paso anterior, elija la opción *propiedades* y marque la opción *Muestra Rastro*, y elija en *Estilo* un *sombreado* de 25.
4. Ahora elija la opción *propiedades* para el parámetro  $a$  y cambie su valor por 5,5.
- b) ¿Qué ocurre con la ecuación y el gráfico cuando se cambia el valor del parámetro  $a$ ?
- c) ¿Existe alguna relación con el gráfico descrito en el inciso a)?

### **Parte 2: Exploremos en profundidad el primer caso**

5. Vuelva a cambiar el valor del parámetro  $a$  eligiendo un valor diferente, tal que  $a > 5$ . Elija por lo menos tres valores distintos.
- d) ¿Qué relación existe entre los parámetros  $a$  y  $b$  según los valores usados hasta ahora en 1, 4 y 5?
- e) ¿Qué se puede decir sobre lo que le ocurre al gráfico de la ecuación al cambiar el valor del parámetro  $a$  conservando la relación encontrada en d)?
- f) ¿El gráfico de la ecuación se interseca con el eje  $x$ ? ¿cuáles son las coordenadas de la intersección?
- g) ¿El gráfico de la ecuación se interseca con el eje  $y$ ? ¿dónde?
- h) ¿Cómo se determinan en general la intersección del gráfico con los ejes?
- i) ¿Cuál es la distancia entre los puntos de intersección del gráfico con el eje  $x$ ? ¿y cuál es entre los puntos de intersección con el eje  $y$ ?
- j) Entre las distancias calculadas en el punto anterior ¿Cuál es la mayor?
- k) ¿Qué relación encuentra entre la relación encontrada en d) y la respuesta al inciso anterior?
- l) ¿Podría formular un enunciado en el que describa el gráfico de la ecuación teniendo como condición para los parámetros  $a$  y  $b$ , la relación encontrada en el inciso d)?

### **Parte 3: Situación particular, el segundo caso**

6. Cambie los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  de manera que la relación que se tenga entre ellos sea  $a = b$ . Sería importante considerar varios casos.
- m) Describa el gráfico que se obtiene.
- n) ¿Cuáles son las intersecciones del gráfico con los ejes? ¿cuáles las distancias entre

ellas sobre el mismo eje? ¿cómo son estas distancias?

o) ¿Cómo podría describir esta situación en una afirmación general?

#### **Parte 4: Último caso de la tricotomía**

7. . En la ventana algebraica, cliquee con el botón derecho del mouse sobre la ecuación y deshabilite su rastro. Luego cliquee sobre el parámetro  $b$ , elija la opción *propiedades* y cambie su valor asegurándose que se tenga la relación  $a < b$ . Considere varios valores para los parámetros.

p) ¿Cómo es este nuevo gráfico en relación con el que se obtuvo en el inciso a)?

q) ¿Cuáles son las intersecciones del gráfico con los ejes?

r) ¿las intersecciones con los ejes para este caso se determinan igual que en el inciso h)? En cualquier caso describa cómo.

s) ¿Cuáles son las distancias entre los puntos de intersección en cada eje?

t) ¿Cómo relaciona las distancias del inciso anterior y la relación pedida en el inciso 7?

¿Podría formular un enunciado en el que describa el gráfico de la ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  teniendo como condición para los parámetros  $a$  y  $b$ , la relación dada en el inciso 7?

**ACTIVIDAD DE HIPERBOLA.** El propósito de esta actividad es realizar un estudio inicial exploratorio de la hipérbola en el ambiente dinámico del software geogebra, a partir de sus ecuaciones y en particular de sus parámetros  $a$  y  $b$ , mostrando la relación entre el gráfico y los valores posibles de dichos parámetros.

**Parte 1: Exploración inicial para un parámetro.** Reconocimiento del gráfico de la

ecuación  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  explorándolo a partir de distintos valores para sus parámetros  $a$  y  $b$ . Usando la herramienta *rastro* y *sombreado* para el gráfico, se estudia la relación que existe con los cambios de valores del parámetro  $a$ , cuál es la intersección del gráfico con los ejes coordenados y cómo determinar sus coordenadas identificados como los vértices.

**Parte 2: Explorando para el otro parámetro.** Estudiar la concavidad de las ramas de la hipérbola. Describir el comportamiento de la gráfica cuando el valor del parámetro  $b$  varía en un intervalo de 1 a 7. Usando la herramienta *color* de la gráfica y deslizador para el parámetro  $a$  se propone explorar si existe una relación entre el cociente  $b/a$  y la amplitud de las ramas del gráfico.

**Parte 3: ¿Explorando otra ecuación?** Se propone explorar la ecuación  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$