

## CONSTRUÇÕES DE MACRO FERRAMENTAS NO GEOGEBRA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Guilherme Fernando Ribeiro - Luciano Ferreira - Talita Secorun dos Santos  
guilherme.ribeiro91@hotmail.com - lulindao66@hotmail.com - tsecorun@hotmail.com  
Universidade Estadual do Paraná Campus de Campo Mourão - Universidade Estadual  
de Maringá - Universidade Estadual do Paraná Campus de Campo Mourão - Brasil

Modalidade: Painéis

Nível: Médio

Palavras chave: Geometria, Geometria Euclidiana, Geometria não-euclidiana, Modelo de Poincaré.

### Resumo

*Este trabalho tem como objetivo elaborar macro ferramentas para a construção da reta hiperbólica, do segmento hiperbólico e para medir a distância hiperbólica bem como seus respectivos testes de funcionamento a fim de colaborar para o ensino e aprendizagem do conteúdo de geometria hiperbólica, uma das geometrias não-euclidianas no software GeoGebra. Estas macro-ferramentas serão necessárias para a construção do modelo de Poincaré. A construção dessas ferramentas é necessária, pois o software é para trabalhar com a geometria euclidiana e a métrica utilizada no modelo não é euclidiano.*

### GeoGebra, as macro ferramentas e o Modelo de Poincaré

No ano de 2006 foram divulgadas as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná (DCE). As DCE abrangem, no Conteúdo Estruturante Geometrias, a inclusão do tópico geometrias não-euclidianas (PARANÁ, 2008). Segundo Lovis (2009), Bonete (2000), Cabariti (2004), e Santos (2009) parte significativa dos professores de matemática que atuam na Rede Estadual de Ensino do Paraná não possuem o conhecimento necessário para trabalhar com a geometria não-euclidiana. Esses pesquisadores afirmam que as dificuldades do professor em ensinar/trabalhar com a geometria não-euclidiana acontece devido a falta de conhecimento do assunto e de formação necessária.

Considerando essa problemática surgiu a ideia desta pesquisa. Baseado na pesquisa de Ferreira (2011), elaboramos atividades sobre Geometria Hiperbólica, utilizando o *software* GeoGebra. E para realizar essas atividades foi necessária realizar a construção de macro ferramentas.

Utilizamos o GeoGebra por ser um *software* gratuito de matemática dinâmica bem como estar instalado na maioria dos laboratórios de informática das escolas da rede estadual do Estado do Paraná - Brasil, ou seja, acessível à maioria dos alunos. É um

*software* que reúne geometria, álgebra e cálculo, permitindo construir vários objetos. O GeoGebra permite auxiliar o professor no processo de ensino da geometria.

Diante disso, este trabalho teve como objetivo elaborar macro ferramentas para o ensino e aprendizagem do conteúdo de geometria hiperbólica no *software* GeoGebra. As macro ferramentas elaboradas são: reta hiperbólica, segmento hiperbólica e distância hiperbólica.

Com essas macro ferramentas, é possível trabalhar com o modelo de Poincaré, modelo este escolhido entre os vários modelos da geometria hiperbólica pois facilita a visualização de resultados como, por exemplo, a diferença entre a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano e um triângulo hiperbólico, quadrilátero euclidiano e quadrilátero hiperbólico bem como verificar que o disco de Poincaré satisfaz todos os postulados da geometria hiperbólica.

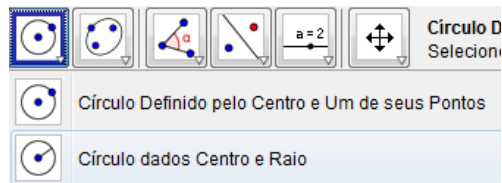
No que diz respeito a utilização desse modelo em sala de aula Ferreira (2011), coloca que a utilização do Modelo de Poincaré em sala de aula traz potenciais obstáculos à aprendizagem, já que é um modelo de um espaço ilimitado desenhado numa região limitada. Como os alunos estão acostumados a utilizar a única métrica que conheceram em seus estudos escolares – a métrica euclidiana – isso poderá acarretar um obstáculo à compreensão de que medidas de distância realizadas próximas ao horizonte sejam maiores que as realizadas em regiões próximas ao centro do plano de Poincaré.

Diante disso, como o GeoGebra é um *software* que trabalha com a geometria euclidiana, é necessário criar as macro ferramentas para trabalhar com a geometria não-euclidiana, nesse caso a geometria hiperbólica (modelo de Poincaré).

Antes de iniciar a construção das ferramentas no GeoGebra é importante saber que a base da construção das ferramentas hiperbólicas será uma circunferência de raio 5 unidade. Vale lembrar que se posteriormente for desenhado um plano hiperbólico diferente de raio de 5 unidades as ferramentas hiperbólicas não traçarão a H\_Reta, o H\_Segmento e a H\_Distância.

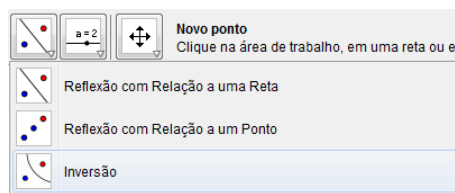
### **Construção da macro ferramenta H\_Reta e seu teste de funcionamento**

Para iniciar utilizando a ferramenta “Círculo dados Centro e Raio” (Figura 1) trace uma circunferência “c” de centro A e raio 5 unidades. Todas as ferramentas serão construídas a partir da circunferência de raio 5 unidades.



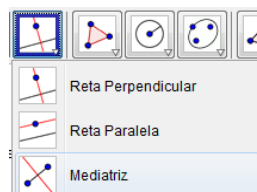
**Figura 1 – Ferramenta círculo dados centro e raio**

Após construir a circunferência de raio 5 unidade, marque pontos B e C dentro do círculo e utilizando a ferramenta “Inversão” (Figura 2), clique no ponto B e depois na circunferência. Será criado o ponto B’, que é o inverso de B em relação a circunferência. Ainda com a ferramenta “Inversão”, clique em C e depois na circunferência. Será criado o ponto C’, inverso de C em relação a circunferência.



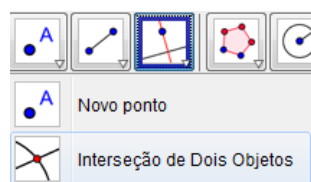
**Figura 2 – Ferramenta inversão**

Use a ferramenta “Mediatriz” (Figura 3) e trace a mediatriz do segmento BB’. Para fazer isso tome a ferramenta “Mediatriz” clique sobre B e depois sobre B’. A mediatriz será traçada e por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como “a”. Trace a mediatriz de CC’. Por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como “b”.



**Figura 3 – Ferramenta mediatriz**

Use a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” (Figura 4), clique em “a” e depois em “b”. O *software* GeoGebra determinará o ponto D de interseção das duas mediatrizes. Use a ferramenta “Círculo Definido pelo Centro e Um de seus Pontos”, clique em D e depois em B. Será traçada a circunferência “d” que também passa por B’, C e C’. Marque os pontos F e E de interseção das circunferências “c” e “d”. Para fazer isso use a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” e clique no “Círculo c” depois no “Círculo d”.



**Figura 4 – Ferramenta interseção de dois objetos**

Será necessário traçar o arco que liga F a E e que passa no interior do círculo determinado por “c”. Para isso, use a ferramenta “Arco circular dados o centro e dois pontos” (Figura 5) e clique primeiramente em D, depois em F e depois em E. Será traçado o arco ligando F a E. Por padrão, o nome desse arco será “e”.



**Figura 5 – Ferramenta arco circular dados o centro e dois pontos**

Observe se o arco traçado é interior a “c”. Para isso, na “Janela de Álgebra” (Figura 6) em “Objetos Dependentes” clique com o lado direito do mouse sobre “e” na última opção “Propriedades...” abrirá uma janela, com várias abas para formatar, sendo uma delas a cor. Selecione a cor desejada, depois na aba “Estilo” coloque a “Espessura da linha” em 7.



**Figura 6 – Janela de álgebra**

Para finalizar no canto inferior e direito clique em “Fechar”. Veja que a cor da H\_Reta foi alterada. Caso o arco “e” seja exterior a “c” você deve com a ferramenta “Arco circular dados o centro e dois pontos” clicar primeiramente em D, depois em E e depois em F. Será traçado o arco ligando F a E. Por padrão, o nome desse arco será “e”. Agora sim, observe se o arco traçado é interior a “c”. Para isso, troque a cor do arco “e”.

Isso ocorre, pois essa ferramenta do *software* GeoGebra traça arcos no sentido anti-horário, então, dependendo de sua construção será necessário apagar o arco traçado e clicar nos pontos na ordem D, E e F.

Escolha, no menu “Ferramentas”, a opção “Criar uma Nova Ferramenta...”. Como Objeto Final, escolha o arco “e”, clique em “Próximo”. Como objetos iniciais, escolha “Ponto B” e “Ponto C”. Pressione a tecla “Ctrl” para selecionar os dois objetos mediante o uso do mouse, clique em “Próximo”. Como nome da ferramenta escolha

“H\_Reta”, deixe a caixa “Exibir na Caixa de Ferramentas” selecionada e clique em “Concluído”.

O *software* GeoGebra criará a ferramenta e a adicionará um novo botão no menu. Escolha, no menu “Ferramentas”, a opção “Gerenciamento de Ferramentas...”. Selecione a ferramenta recém criada, clique em “Gravar Como”, escolha o local no qual a ferramenta será gravada, escolha como nome “Ferramenta H\_Reta” e clique em “Gravar”. Depois clique em “Fechar” para fechar a “Ferramenta de Gerenciamento”. Está pronta sua ferramenta H\_Reta. Sugestão: Salve o arquivo com o nome “Construção da ferramenta H\_Reta”.

Para fazer o teste da ferramenta H\_Reta abra o *software* GeoGebra. Em “Exibir” desabilite a opção “Eixo” para que não exiba os eixos coordenados. Em seguida, em “Arquivo→Abrir...”, selecione a “Ferramenta H\_Reta” e clique em “Abrir”. Verifique que a ferramenta foi “carregada”, olhe o botão no menu. É dessa maneira que “carregamos” ferramentas pré-programadas no *software* GeoGebra.

Lembre-se que, dessa maneira, quando a ferramenta H\_Reta for ser utilizada, será necessário clicar no centro do plano hiperbólico e depois nos dois pontos.

### **Construção da macro ferramenta H\_Segmento e seu teste de funcionamento**

Para a construção da ferramenta H\_Segmento abra o *software* GeoGebra. Em “Exibir” desabilite a opção “Eixo” para que não exiba os eixos coordenados.

Use a ferramenta “Círculo dados centro e raio” e trace uma circunferência “c” de centro A e raio 5 unidades.

Marque pontos B e C dentro do círculo. Use a ferramenta “Inversão”, clique no ponto B e depois na circunferência. Será criado o ponto B', que é o inverso de B em relação a circunferência. Ainda com a ferramenta “Inversão”, clique em C e depois na circunferência. Será criado o ponto C', inverso de C em relação a circunferência.

Use a ferramenta “Mediatriz” e trace a mediatriz do segmento BB'. Para fazer isso tome a ferramenta “Mediatriz” clique sobre B e depois sobre B'. A mediatriz será traçada e por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como “a”. Trace a mediatriz de CC'. Por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como “b”.

Use a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, clique em “a” e depois em “b”. O *software* GeoGebra determinará o ponto D de interseção das duas mediatrizes. Use a ferramenta “Arco circular dados o centro e dois pontos” e clique primeiramente em D,

depois em B e depois em C. Será traçado o arco ligando C a B. Por padrão, o nome desse arco será “d”.

Observe se o arco traçado é interior a “c”. Caso o arco “e” seja exterior a “c” você deve refazer este último passo. Para isso tome novamente a ferramenta “Arco circular dados o centro e dois pontos” e clique primeiramente em D, depois em C e depois em B. Será traçado o arco ligando C a B. Por padrão, o nome desse arco será “d”. Agora sim, observe se o arco traçado é interior a “c”.

Na “Janela de Álgebra” em “Objetos Dependentes” clique com o lado direito do mouse sobre “d” na última opção “Propriedades...” abrirá uma janela, com várias abas para formatar, sendo uma delas a cor. Selecione a cor desejada, depois na aba “Estilo” coloque a “Espessura da linha” em 7. Para finalizar no canto inferior e direito clique em “Fechar”. Veja que a cor do H\_Segmento foi alterada.

Escolha, no menu “Ferramentas”, a opção “Criar uma Nova Ferramenta...”. Como Objeto Final, escolha o arco “d” clique em “Próximo”. Como objetos iniciais, escolha “Ponto B” e “Ponto C”. Pressione a tecla “Ctrl” para selecionar os dois objetos mediante o uso do mouse, clique em “Próximo”. Como nome da ferramenta escolha “H\_Segmento”, deixe a caixa “Exibir na Caixa de Ferramentas” selecionada e clique em “Concluído”. O *software* GeoGebra criará a ferramenta e a adicionará um novo botão no menu.

Escolha, no menu “Ferramentas”, a opção “Gerenciamento de Ferramentas...”. Selecione a ferramenta recém criada, clique em “Gravar Como”, escolha o local no qual a ferramenta será gravada, escolha como nome “Ferramenta H\_Segmento” e clique em “Gravar”. Depois clique em “Fechar” para fechar a “Ferramenta de Gerenciamento”. Está pronta sua ferramenta H\_Segmento. Sugestão: Salve o arquivo com o nome “Construção da ferramenta H\_Segmento”.

### **Construção da macro ferramenta H\_Distância e seu teste de funcionamento**

Para a construção da ferramenta H\_Distância abra o *software* GeoGebra. Em “Exibir” desabilite a opção “Eixo” para que não exiba os eixos coordenados. Use a ferramenta “Círculo dados centro e raio” e trace uma circunferência “c” de centro A e raio 5 unidades. Marque pontos B e C dentro do círculo. Use a ferramenta “Inversão”, clique no ponto B e depois na circunferência. Será criado o ponto B’, que é o inverso de B em relação a circunferência. Ainda com a ferramenta “Inversão”, clique em C e depois na

circunferência. Será criado o ponto  $C'$ , inverso de  $C$  em relação a circunferência.

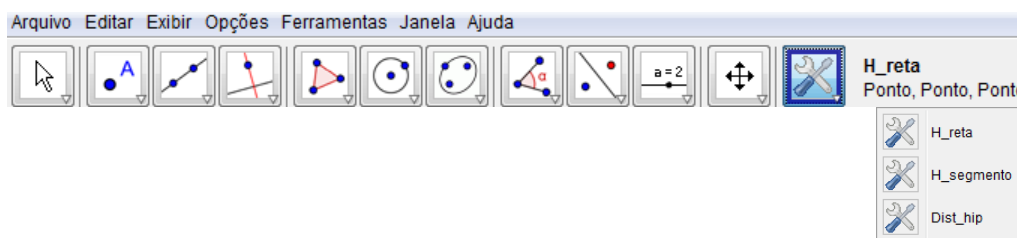
Use a ferramenta “Mediatriz” e trace a mediatriz do segmento  $BB'$ . Para fazer isso tome a ferramenta “Mediatriz” clique sobre  $B$  e depois sobre  $B'$ . A mediatriz será traçada e por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como “a”. Trace a mediatriz de  $CC'$ . Por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como “b”.

Use a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, clique em “a” e depois em “b”. O *software* GeoGebra determinará o ponto  $D$  de interseção das duas mediatrizes. Use a ferramenta “Círculo Definido pelo Centro e Um de seus Pontos”, clique em  $D$  e depois em  $B$ . Será traçada a circunferência “d” que também passa por  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ . Marque os pontos  $F$  e  $E$  de interseção das circunferências “c” e “d”. Para fazer isso use a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” e clique no “Círculo c” depois no “Círculo d”. Altere, caso precisar, as posições de  $B$  e  $C$  para que  $F$  esteja entre  $B$  e  $B'$  e  $E$  esteja entre  $C$  e  $C'$ .

Escreva no campo “Entrada” a seguinte linha:  $r = (2^{\frac{1}{2}} \cdot (\text{Distância}[B,E] \cdot \text{Distância}[C,F]) / (\text{Distância}[B,F] \cdot \text{Distância}[C,E])) - 2$  em seguida aperte a tecla “Enter”. Aparecerá na coluna algébrica o nome “r” seguido de um número, esse número será a distância Hiperbólica entre  $B$  e  $C$ . Mova o ponto  $B$  para locais próximos do ponto  $F$  e observe que a distância Hiperbólica aumenta. Mova  $B$  para local próximo de  $C$  e observe que a distância Hiperbólica diminui.

Em Ferramentas clique em “Criar uma Nova Ferramenta...”, escolha como objeto final o “Número r” e como objetos iniciais os pontos  $B$  e  $C$ . Escolha como nome “Dist\_hip”. Escolha, no menu “Ferramentas”, a opção “Gerenciamento de Ferramentas...”. Selecione a ferramenta recém criada, clique em “Gravar Como”, escolha o local no qual a ferramenta será gravada, escolha como nome “Ferramenta H\_Distância” e clique em “Gravar”. Depois clique em “Fechar” para fechar a “Ferramenta de Gerenciamento”. Está pronta sua ferramenta H\_Distância. Sugestão: Salve o arquivo com o nome “Construção da ferramenta H\_Distância”.

Para fazer o teste da ferramenta H\_Distância abra o *software* Geogebra. Em “Exibir” desabilite a opção “Eixo” para que não exiba os eixos coordenados. Em seguida, em “Arquivo→Abrir...”, selecione a “Ferramenta H\_Distância” e clique em “Abrir”. Verifique que a ferramenta foi “carregada”, olhe o botão no menu como podemos observar na Figura 7.



**Figura 7 – Exemplo de todas as ferramentas construídas carregadas no GeoGebra**

### Considerações Finais

Podemos concluir que o *software* GeoGebra permite trabalhar com a Geometria Hiperbólica, em especial o Modelo de Poincaré, por meio da construção de ferramentas hiperbólicas (macro ferramentas) que substituem o menu euclidiano do mesmo. As ferramentas hiperbólicas tornaram-se novas ferramentas do GeoGebra, enriquecendo o ambiente de trabalho além de possibilitar novas situações para o ensino da geometria não-euclidiana, em especial a Geometria Hiperbólica, ou seja, conseguimos criar um menu hiperbólico.

### Referências bibliográficas

- BONETE, Izabel P. (2000). *As Geometrias Não-Euclidianas em Cursos de Licenciatura: Algumas Experiências*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas.
- CABARITI, Eliane. (2004). *Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado*. (Dissertação Mestrado em Educação Matemática). Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, São Paulo.
- FERREIRA, Luciano. (2011). *Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica: “construção do Plano de Poincaré” com o uso do software Geogebra*. (Dissertação Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática). Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná.
- LOVIS, Karla Aparecida. (2009). *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que fazem os professores*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Paraná.
- PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do. *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica Matemática*. Curitiba, 2008.
- SANTOS, Talita Secorun dos. (2008). *A inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica*. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná.