CONSTRUINDO AS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS POR MEIO DO GEOGEBRA

Evelyn Rosana Cardoso – Valdeni Soliani Franco
prof_evelyn@hotmail.com – vsfranco@uem.br
Universidade Estadual de Maringá - Brasil

Modalidade: Minicurso
Nivel educativo: Médio
Palavras chave: Educação Matemática, Construção de Funções, Logarítmicas, Exponenciais.

Resumo

No Brasil a função Logarítmica, no Ensino Médio, em geral, é definida como segue: "Se chamarmos de base um número a *tal que* $L(a) = 1$, *a função* $L: IR^{+} \rightarrow IR$, *tal que* $L(x) = y$ *se, e somente se,* $a^{y} = x$, *é chamada de Função Logarítmica". Essa maneira de conceituar a função Logarítmica tem uma série de inconvenientes, como por exemplo, ela necessita de um estudo preliminar da função exponencial e suas propriedades, em particular que se saiba o significado de* a^{y} *quando y é irracional, e neste caso, ou se passa por cima dessas dificuldades, fazendo de conta que elas não existem – o que não é bom do ponto de vista científico – ou se gasta um tempo precioso, com longos detalhes técnicos. Outro inconveniente é que tratando todas as bases da mesma maneira, esta definição não permite apresentar o número e como uma base que se constrói naturalmente o que a diferencia das demais, pois ela "aparece" artificialmente na definição tradicional. Finalmente, a dificuldade de se estabelecer certas desigualdades fundamentais, como por exemplo,* $L(1 + x) < x$, *que não existirá, na maneira em que se fará a construção dessas funções no minicurso, utilizando o GeoGebra.*

Introdução

Durante três séculos, os logaritmos serviram como instrumento para simplificar cálculos aritméticos, efetuando com maior rapidez e precisão operações complicadas, tais como a multiplicação de dois números com muitos algarismos, ou uma potenciação com expoentes fracionários.

Hoje com a utilização de calculadoras compradas até na rua, por algumas moedas, tais operações são resolvidas facilmente. Mas, como se pode observar, por muitos outros motivos, os logaritmos fazem parte da grande maioria das estruturas curriculares do Ensino Médio e Superior da disciplina Matemática. Isso porque a função logarítmica e a sua inversa, a função exponencial, constituem ainda hoje, a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decrescimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente em um dado momento.

Desde a construção do conceito de logaritmo, feito pelo Lord Napier, no início do século XVII, um sistema de logaritmos é simplesmente uma tabela com duas colunas. A cada número real positivo x na coluna à esquerda corresponde, no mesmo nível à direita, um número real L(x) chamado o logaritmo de x (naquele sistema). Essa tabela deve satisfazer duas condições:

1. Se os números x da coluna à esquerda estiverem dispostos em ordem crescente, o mesmo deve ocorrer com seus logaritmos L(x) à direita;
2. Se multiplicarmos dois números positivos x e y, o logaritmo L($x.y$) do produto deve ser a soma dos logaritmos L(x) e L(y).

No Brasil, em geral, os livros didáticos, define logaritmos da seguinte forma "Se chamarmos de base de um sistema de logaritmos L, ao número a tal que L(a) = 1, então denomina-se logaritmo a função L: $IR^+ \rightarrow IR$, tal que L(x) = y se, e somente se, $a^y = x$."

De acordo com LIMA (1991), são vários os inconvenientes de tal definição:

1. Ela requer que se estudem preliminarmente a função exponencial e suas propriedades, em particular que se saiba o significado de a^y quando y é irracional, e que se provem regras como $a^y.a^z = a^{y+z}$ para $y,z \in IR^+$ quaisquer. Opa!!! Problema: ou se passa por cima dessas dificuldades, fazendo de conta que elas não existem – o que deixa a desejar do ponto de vista de honestidade científica – ou se esgota a paciência do aluno, com longos detalhes técnicos.
2. Tratando todas as bases da mesma maneira, ela não permite apresentar espontaneamente o número e como uma base especial que se distinga naturalmente das demais, e "aparece" artificialmente na definição tradicional. Veremos que os logaritmos de base e surgem naturalmente de problemas com origens das mais diversas.
3. A dificuldade de se estabelecer certas desigualdades fundamentais, como por exemplo, L(1 + x) < x (válida para logaritmos de base e), que é óbvia na definição que faremos neste curso.

Fundamentação Teórica

O minicurso está fundamentado na obra de Lima (1991). A parte teórica do texto é utilizada para introduzir por meio do software GeoGebra o logaritmo natural de um número real positivo, o número de Nepper "e" e a função exponencial.

Resultados

No minicurso será utilizada a seguinte definição para um Sistema de Logarítmos: Um **Sistema de Logaritmos** é uma função L: $IR^+ \rightarrow IR$, que possui as seguintes propriedades:

1. L é crescente, ou seja, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;
2. $L(x.y) = L(x) + L(y)$, para quaisquer x e y reais positivos.

Por intermédio desta definição, é possível demonstrar que várias propriedades e resultado são satisfeitos. Enunciamos alguns deles.

Propriedade 1: Uma função logarítmica L: $IR^+ \rightarrow IR$ é sempre injetiva, pois números diferentes têm logaritmos diferentes.

Propriedade 2: O logaritmo de 1 é zero.

Propriedade 3: Os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos e os números maiores que 1 têm logaritmos positivos.

Propriedade 4: Para todo $x > 0$, tem-se $L(x) = –L(x)$.

Propriedade 5: Para quaisquer $x, y \in IR^+$, temos que: $L(x/y) = L(x) – L(y)$

Propriedade 6: Para todo $x \in IR^+$ e todo número racional r = p/q, tem-se:

$$L(x^r) = r \cdot L(x)$$

Propriedade 7: Uma função logarítmica $L:IR^+ \rightarrow IR$ é ilimitada, superiormente e inferiormente.

Teorema 1: *Dadas as funções logarítmicas* L, M: $IR^+ \rightarrow IR$, *existe uma constante* $c > 0$ *tal que* $M(x) = c.L(x)$, *para todo* $x > 0$.

Teorema 2: Toda função logarítmica L é sobrejetiva.

Observação 1: Segue das propriedade 1 e do teorema 2, que toda função logarítmica é bijetora.

Observação 2: Segue da observação 1, que dada a função logarítmica L: $IR^+ \rightarrow IR$, existe um único número $a > 0$, tal que $L(a) = 1$. Este número é chamado de *base* do sistema de logaritmos L.

Observação 3: Se L_a e L_b são funções logarítmicas, $L_a(a) = L_b(b) = 1$, então o Teorema 1 garante a existência de uma constante $c > 0$, tal que $L_b(x) = c.L_a(x)$, para todo $x > 0$. Fazendo x = a, resulta que $L_b(a) = c$. Portanto, $L_b(x) = L_b(a) .L_a(x)$, que é a fórmula de *mudança de base*.

De posse desses resultados, inicia-se a construção de uma função logarítmica, por intermédio do GeoGebra.

Para iniciar com o GeoGebra, constrói-se alguns gráficos de funções e a partir deles obtém-se a área determinada pelo gráfico e o eixo x, utilizando-se das funções Soma Inferior, Soma Superior e Soma Trapezoidal, juntamente com o controle deslizante para aumentar ou diminuir o número de divisões do intervalo.

Existe uma relação estreita entre a área definida por uma hipérbole no plano cartesiano e os logaritmos.

Essa relação foi observada pelo jesuíta Gregory Saint Vincent, em 1647 e depois por Newton em 1660. Embora nenhum dos dois perceberam a identificação entre essa área e os logaritmos naturais, nem o número “*e*”, porém seus trabalhos indicam que a ideia é bem antiga.

Trataremos a seguir dessa área, para depois definirmos o logaritmo natural.

Seja H o ramo **positivo** do gráfico da função $y = 1/x$, isto é, da função que associa a cada número real positivo x, o número $y = 1/x$. Assim,

$$H = \{(x, y); x > 0, y = \frac{1}{x}\}.$$

Define-se o número H_a^b, como sendo a área determinada por H, no intervalo [a,b], limitada pelo eixo x.

Propriedade fundamental: Para qualquer número real $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} possuem a mesma área.

Uma consequência dessa propriedade é pode-se restringir as considerações às áreas das faixas da forma H_1^c, pois $\text{Área}\left(H_a^b\right) = \text{Área}\left(H_1^{b/a}\right) = \text{Área}\left(H_1^c\right),$ em que $c = b/a$.

É fácil verificar no GeoGebra que quando $a < b < c$:

$$\text{Área}\left(H_a^b\right) + \text{Área}\left(H_b^c\right) = \text{Área}\left(H_a^c\right).$$

Para evitar o problema de restringirmos ao caso, $a < b < c$, definimos o número:

$$L(H_a^b) = \begin{cases} \text{Área}(H_a^b), & \text{se } a < b \\ 0, & \text{se } a = b \\ -\text{Área}(H_a^b), & \text{se } a > b \end{cases}.$$

Note que agora para quaisquer a, b e c, temos:

$$L\left(H_a^b\right) + L\left(H_b^c\right) = L\left(H_a^c\right)$$

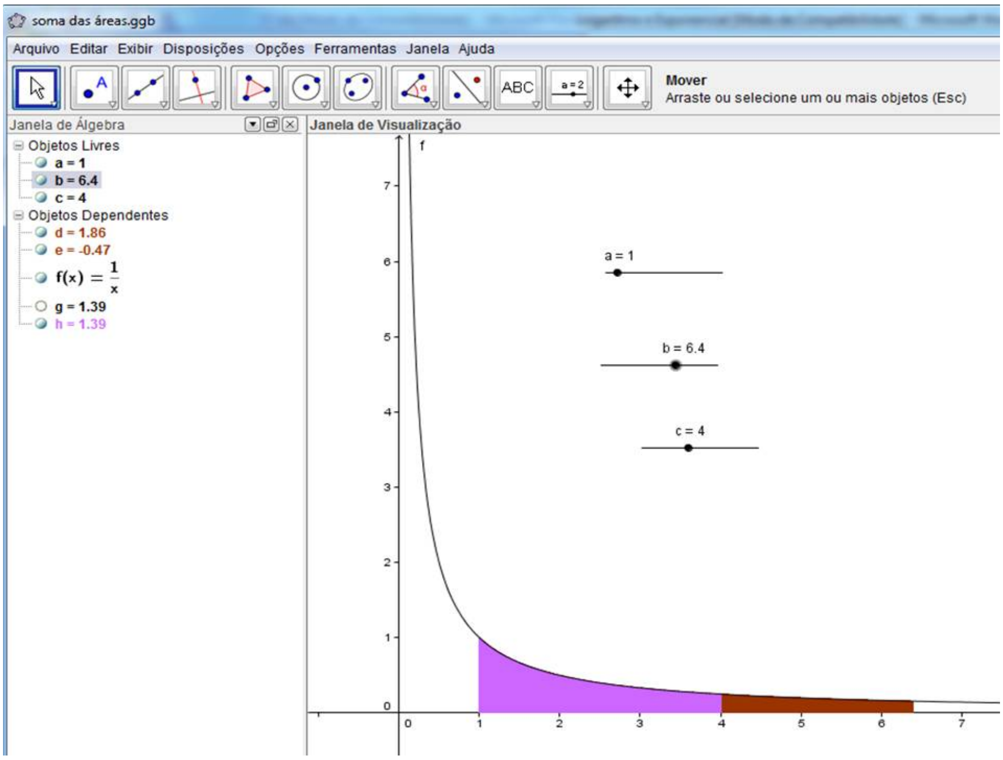

Figura 1: Soma dos números $L\left(H_a^b\right)+L\left(H_b^c\right)=L\left(H_a^c\right)$

Fonte: autores

Seja x um número real positivo. Definiremos o logaritmo natural de x como o número $L(H_1^x)$. Assim, por definição, quando $x > 0$, escrevendo ln x para indicar o logaritmo natural de x, temos:

$$\ln x = L\left(H_1^x\right).$$

Utilizando o GeoGebra e esta definição, é possível calcular os logaritmos naturais de qualquer número real, com uma visualização do que está sendo calculado.

Teorema: ln: $\mathrm{IR}^+ \to \mathrm{IR}$ é uma função logarítmica.

Demonstração:

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. De fato, $L\left(H_1^{xy}\right)=L\left(H_1^x\right)+L\left(H_x^{xy}\right)$. Pela propriedade fundamental, temos $\text{Área}\left(H_x^{xy}\right)=\text{Área}\left(H_1^y\right)$, donde segue o resultado.
2. ln é uma função crescente. De fato, Suponha que $x,y \in \mathrm{IR}^+$ e que $x < y$. Isso significa que existe um número $a > 1$, tal que $y = ax$. Assim, $\ln y = \ln a + \ln x$. Como $a > 1$, temos que $\ln a > 0$, e assim, $\ln y > \ln x$.

□

Como as funções logarítmicas são bijetoras, existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Tal número é representado pela letra *e*. Ele é a base do sistema de logaritmos naturais.

Assim, $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. Por intermédio do GeoGebra, é possível estimar o valor de "*e*".

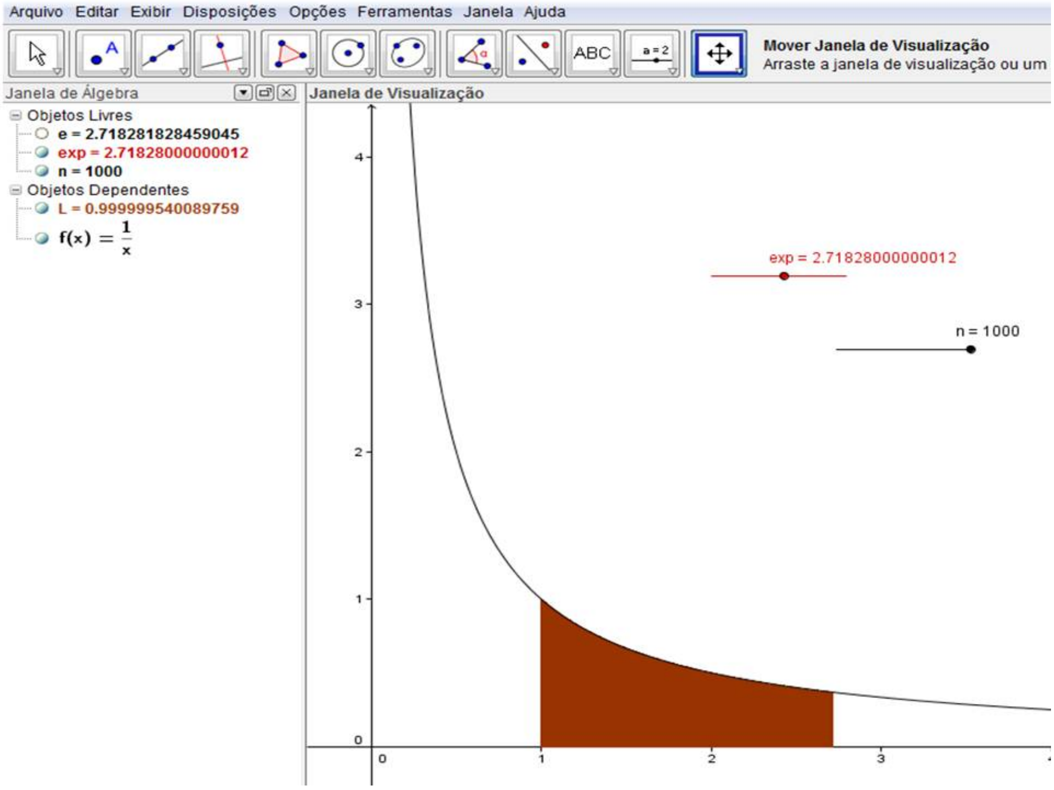

Figura 2: exp é uma estimativa para o número *e*.
Fonte: autores

Teorema: Seja $r = p/q$ um número racional. Tem-se que $y = e^r$ se, e somente se, $\ln y = r$.

Demonstração: Se $y = e^r$, então $\ln y = r \cdot \ln e = r$.

Reciprocamente, seja y > 0, um número real tal que $\ln y = r$. Como $\ln e^r = r$ e a função logarítmica é bijetora, temos o resultado.

□

Assim, pelo menos para potência de expoente racional de e, o logaritmo natural de um número é o expoente ao qual se deve elevar a base a fim de obter esse número.

O último teorema nos motiva definir a potência e^x, em que x é um número real qualquer.

Definição: Dado um número real x, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x.

Observando a tela do GeoGebra, $y = e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa de hipérbole H_1^y tenha área x. Note que agora faz sentido tomar e^x, mesmo com x irracional.

Utilizando o GeoGebra, é possível, além de obter, compreender o significado desta exponencial.

Enquanto ln x tem sentido apenas para $x > 0$, e^x é definido para todo valor real de x. A correspondência $x \to e^x$ define uma função cujo domínio contém todos os números reais. Esta é a **função exponencial**.

A função exponencial $y = e^x$ é a função inversa da função logarítmica natural. Isto quer dizer que as igualdades a seguir são válidas para todo x real, e todo $y > 0$, $\ln(e^x) = x$ e $e^{\ln y} = y$.

Seja k uma constante positiva. Em vez de $y = 1/x$, podemos considerar a hipérbole $y = k/x$ para definirmos logaritmos. Para cada valor de k escolhido, temos um novo sistema de logaritmos. Evidentemente, a escolha de $k = 1$ é a mais natural, por isso chamamos os logaritmos estudados até agora de natural.

Para concluir o minicurso, será explorado estas outras funções logarítmicas, por meio do GeoGebra.

Referencias bibliográficas

Lima, E.L. (1991). *Logaritmos*. Rio de Janeiro: IMPA.

Soares, E. C (2011). Uma investigação histórica sobre os Logaritmos com sugestões didática para a sala de aula. *Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)* – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.