

## TRANSIÇÃO INTERNA DO CÁLCULO: UMA DISCUSSÃO DO USO DO GEOGEBRA NO CONTEXTO DO CÁLCULO A VÁRIAS VARIÁVEIS

Francisco Regis Vieira Alves  
fregis@ifce.edu.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE

Modalidad: Comunicacion

Nivel educativo: Universitario

Palabras clave: Interpretación geométrica, Visualización, Geogebra, CAS Maple.

### Resumo

*Registramos no Brasil a escassez de trabalhos com interesse na transição interna do Cálculo em Uma Variável Real – CUV para o Cálculo a Várias Variáveis - CVV. Nas investigações recentemente desenvolvidas com este objeto de investigação (ALVES, 2011; ALVES & BORGES NETO, 2012; ALVES; BORGES NETO & INGAR, 2012)), destacamos o papel da tecnologia no sentido de promover a visualização e a apreensão perceptiva de propriedades de objetos matemáticos no espaço  $IR^2$  e  $IR^3$ . Assim, com o auxílio do Geogebra, podemos discutir situações do CVV que admitem uma interpretação imediata no contexto do CUV e possíveis ligações conceituais evidenciadas pelo CAS Maple. Tal perspectiva que orienta a abordagem didática que discutiremos pode favorecer ao aprendiz, o entendimento acerca da ligação conceitual, com apoio na representação gráfica, dos conceitos estudados tanto no CUV como no CVV que são discutidos, de modo prioritário, no espaço  $IR^2$  e  $IR^3$ .*

### 1. Introdução

Identificamos no Brasil, mesmo que de modo incipiente, estudos que buscam compreender, investigar e compreender as mudanças enfrentadas pelos estudantes acadêmicos, no período de um a dois anos em estudo no *locus* acadêmico. Ora, no Brasil, esse período corresponde, de modo geral, o espaço de tempo em que os alunos tomam o primeiro contato com o Cálculo em Uma Variável Real – CUV e, no ano subsequente, com o Cálculo a Várias Variáveis – CVV.

Nada mais natural esperar do aluno a manifestação da expectativa a respeito do fato de que o conteúdo apreendido ou, pelo menos, explicado pelo professor no primeiro período de estudo do CUV, funcione e facilite a apreensão e/ou o entendimento no contexto do CVV, todavia, tal fato nem sempre se manifesta de modo automático.

Assim, diante dos entraves indicados na literatura no Brasil em relação a *transição interna* (ALVES, 2011) do Cálculo, trazemos exemplos de situações, que envolvem uma visão de complementaridade entre o *software Geogebra* e, dada à complexidade dos conceitos do CVV, outro será usado, como o caso do *software* que constitui um Sistema de Computação Algébrica – *CAS Maple*.

## 2. Transição interna do Cálculo

Temos observado há décadas vigor na produção de investigações no contexto de ensino do Cálculo em Uma Variável Real – CUV, todavia, sobretudo no Brasil, divisamos a escassez de estudos pertinentes ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis – CVV. Por outro lado, a identificação de sérios entraves, há décadas indicados no CUV é digna, também, de atenção e vigilância dos professores no contexto de ensino do CVV, posto que, muitos destes problemas e entraves tendem a se manifestar, respeitadas algumas particularidades e especificidades, em ambos os contextos de ensino acadêmico (ALVES, BORGES NETO & MACHADO, 2007; ALVES, 2011; ALVES, BORGES NETO & INGAR, 2012).

Acentuamos o uso, numa perspectiva de complementaridade, dos *softwares Geogebra* e do *CAS Maple* permitem a descrição de um cenário de atividades de investigação inexequíveis quando restritas ao ambiente lápis/papel, fato que pode transformar e evitar uma aprendizagem apoiada apenas na reprodução automática de técnicas algorítmicas sofisticadas, embora, em várias circunstâncias, desprovidas de significado conceitual para o aprendiz. No próximo segmento, priorizaremos exemplos nos espaços  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

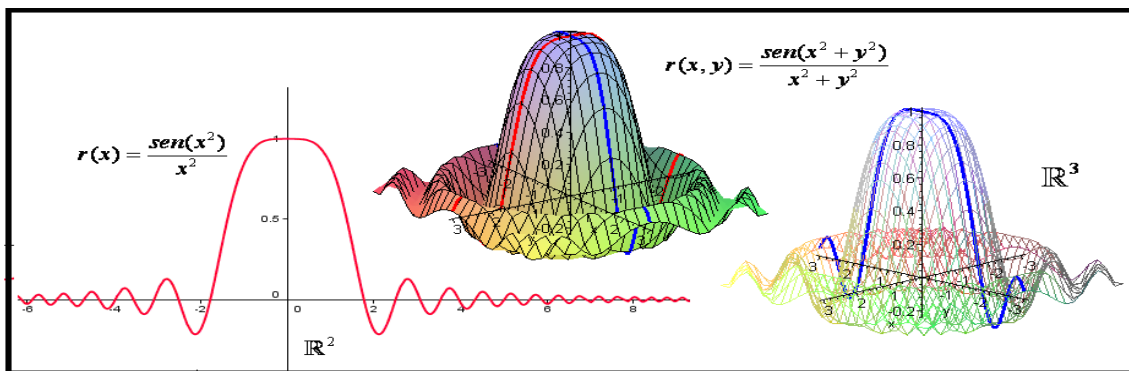
## 3. Exemplos de situações do CVV com uso do *Geogebra*

O estudo do CUV, com base na abordagem dos livros de Cálculo, se restringe na exploração dos conceitos no  $\mathbb{R}^2$ . Por outro lado, os conceitos do CVV, que possuem uma fundamentação formal em Análise no  $\mathbb{R}^n$ , são explorados, de modo predominante, no espaço  $\mathbb{R}^3$  e, com raras exceções, no  $\mathbb{R}^4$ . Por outro lado, a percepção e o entendimento, a partir da visualização, desses objetos conceituais, pode atuar no sentido de proporcionar uma *transição interna* (ALVES, 2011), do CUV para o CVV, de modo adequado. Nos casos em que discutimos neste trabalho, destacaremos as relações conceituais entre representações algébricas e geométricas, do CUV e do CVV.

Por exemplo, no CVV, estudam-se funções do tipo  $f(x, y) = x^3y - xy^3$ . Ora, um gráfico desta natureza é impraticável de se descrever, somente com lápis e papel. Ademais, quais são propriedades que podemos investigar relacionadas com esta função, no contexto do CVV, que podem ser analisadas no contexto do CUV e, reciprocamente?

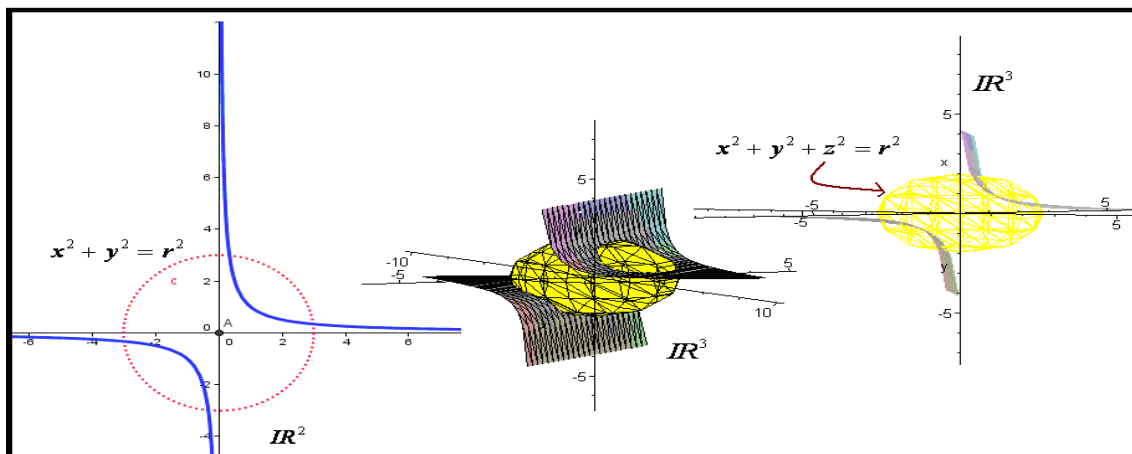
Reparemos que, nesse caso, temos  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e, o estudante deve compreender, por exemplo, que as funções  $f(3, y)$  e  $f(x, 3)$ , são as restrições da função  $f(x, y)$ , para um subconjunto do seu domínio que é o  $\mathbb{R}^2$ .

Com uma ideia semelhante, destacamos na figura 2, as funções  $r(x) = \text{sen}(x^2)/x^2$  e  $r(x, y) = \text{sen}(x^2 + y^2)/(x^2 + y^2)$ . A situação que buscamos significar, com base nos gráficos exibidos abaixo, é a qualidade de limitação da imagem das funções, nas proximidades das origens do  $\mathbb{R}^2$  e do  $\mathbb{R}^3$ . Com base ainda nas relações conceituais extraídas dos gráficos, concluímos, com o gráfico gerado pelo *Geogebra* que  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x^2)/x^2 = 1$  (lado esquerdo). De modo semelhante, com base na figura 1(lado direito) escrevemos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \text{sen}(x^2 + y^2)/(x^2 + y^2) = 1$ .



**Figura 1: Descrição de imagem limitada de funções com o *Geogebra* e o *CAS Maple***

Tanto no CUV como no CVV, se estuda a noção de imagem ilimitada de funções. Do ponto de vista topológico, dizer que uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é ilimitada significa que, não conseguimos obter uma bola no espaço  $\mathbb{R}^n$ , de modo que sua imagem (ou gráfico) não se encontra dentro da bola. No CUV, destacamos na figura 2 (lado esquerdo) uma circunferência e a função  $1/x$ . Mas, no lado direito da mesma figura, visualizamos o gráfico de  $1/(x+y)$  e, nas vizinhanças da origem  $(0,0,0)$ , possui um comportamento semelhante a função  $1/x$ , ou seja, não conseguimos uma bola (em nenhum dos dois casos) que contenha o gráfico dessas funções (ver fig. 2, lado esquerdo).



**Figura 2: Descrição de imagem ilimitada de funções com o *Geogebra* e o *CAS Maple***

No CUV estuda-se a noção de função *derivável*, por outro lado, no CVV, estudamos a noção de função *diferenciável*. Geometricamente, no CUV, a interpretação intuitiva deste conceito relaciona-se com a noção de coincidência entre o gráfico de uma função  $y = f(x)$  e uma reta tangente nesse ponto. No CVV, temos a noção de plano tangente ao gráfico de uma função. Por outro lado, a imagem metafórica sugerida pelos autores de livros didáticos, é significada por meio da noção de “bico” ou “quina” (fig. 3).

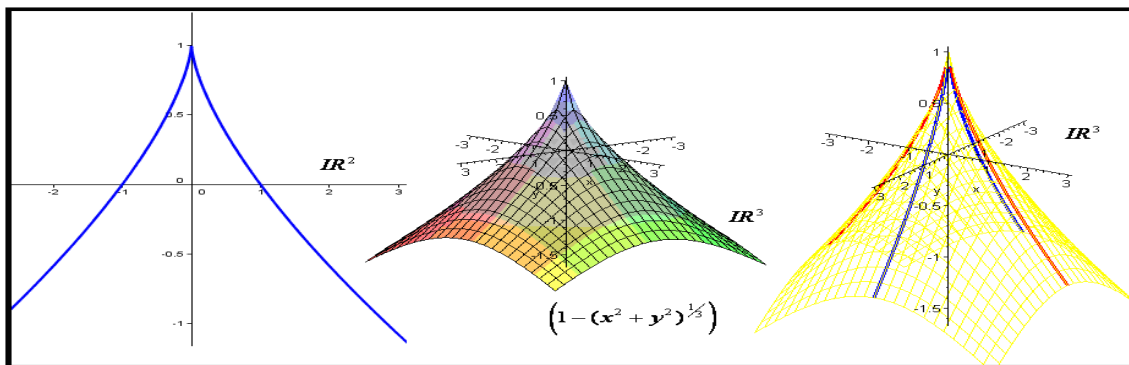
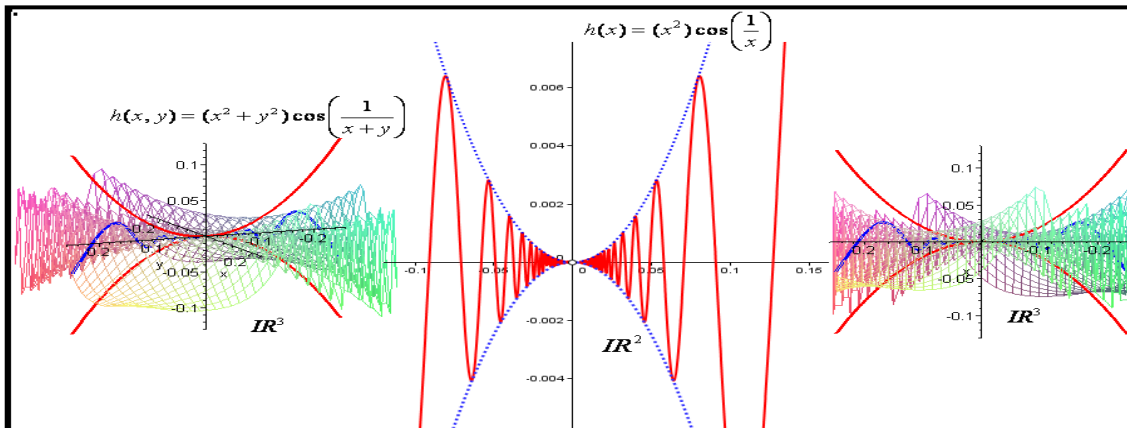


Figura 3: Descrição da noção da perda de diferenciabilidade com o *Geogebra* e o *CAS Maple*

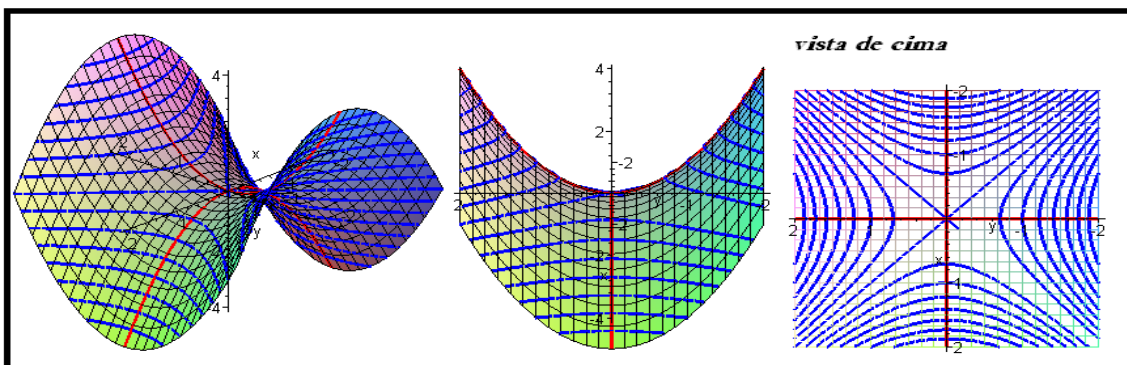
Por exemplo, na figura 3, do lado esquerdo, descrevemos o gráfico da função  $g(x) = 1 - (x^2)^{1/3}$ , enquanto que do lado direito, vislumbramos o gráfico da função  $g(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$ . Reparemos que em ambos as situações, percebemos a identificação de “bicos” ou “quinas” nos gráficos, nas proximidades da origem. Assim, depreendemos a perda de diferenciabilidade de ambas as funções, e relações conceituais entre os gráficos exibidos no  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

Vejamos outro exemplo com as funções  $h(x, y) = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x+y}\right)$  e  $h(x) = (x^2) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ . Uma das maneiras tradicionais de calcularmos tal limite pode ser por intermédio do uso do *teorema do sanduíche* estudado no contexto do CUV. Com o apoio do *Geogebra*, compreender as seguintes relações  $-x^2 \leq (x^2) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$  (no CUV). Todavia, no  $\mathbb{R}^3$ , com apoio nos gráficos fornecidos pelo *CAS Maple*, percebemos o mesmo comportamento relativo ao CUV



**Figura 4: Relações evidenciadas com o Geogebra e o CAS Maple do teorema do sanduiche**

Na figura 5, divisamos outro exemplo de conceito que pode ser significado com base na descrição e modelo matemático do CUV. De fato, com o *Geogebra*, obtêm-se o gráfico das funções  $y = x^2$  e  $y = -x^2$  que constituem as duas curvas parametrizadas por  $\alpha(t) = (t, t^2)$  e  $\beta(t) = (t, -t^2)$  sobre a região do espaço aonde temos definido o parabolóide hiperbólico, conhecido com um comportamento de “sela” (fig. 5).



**Figura 5: Descrição da noção da curva de nível e de sela com o Geogebra e o CAS Maple**

NO CVV, podemos investigar a existência do seguinte limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \text{ que, caso exista, é definido como a } \textit{derivada parcial} \text{ da}$$

função  $f(x, y)$  e denotamos por  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , no ponto  $(x_0, y_0)$ . Neste caso, lidamos

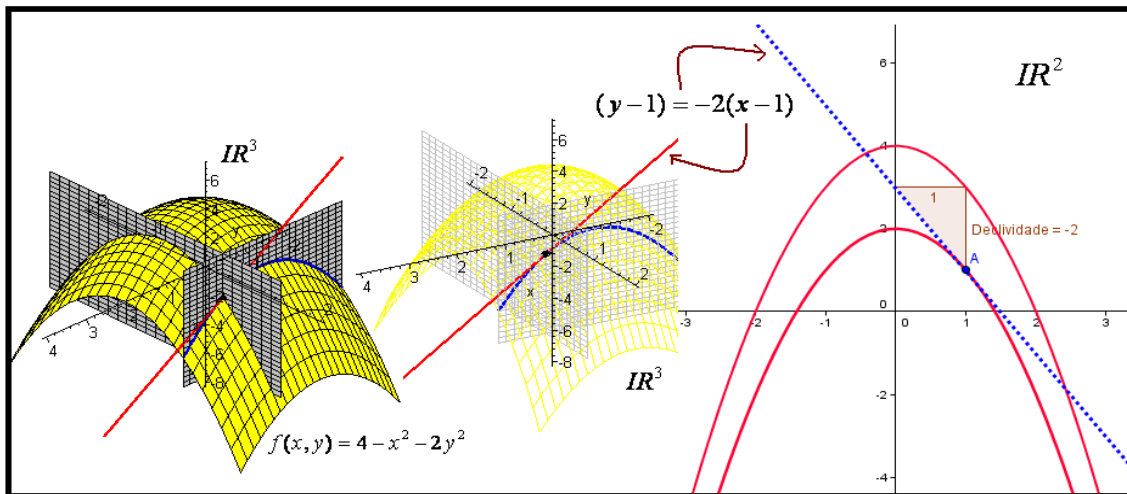
com a restrição da função  $f(x, y_0)$ . Por exemplo, se consideramos a função

$$f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2. \text{ Avaliamos } \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -2 \text{ que, no CUV, é justamente a}$$

declividade da reta descrita por  $(y - 1) = -2(x - 1)$ . Na figura 6, divisamos as relações entre os gráficos exibidos. O elemento invariante nesse caso, é que o entendimento, segundo o qual, tanto no CUV como no CVV, se obtém a declividade de uma reta.

Na figura 6, exibimos uma construção com o *Geogebra* que evidencia o comportamento da declividade da reta tangente, sobre uma curva obtida pela interseção da superfície

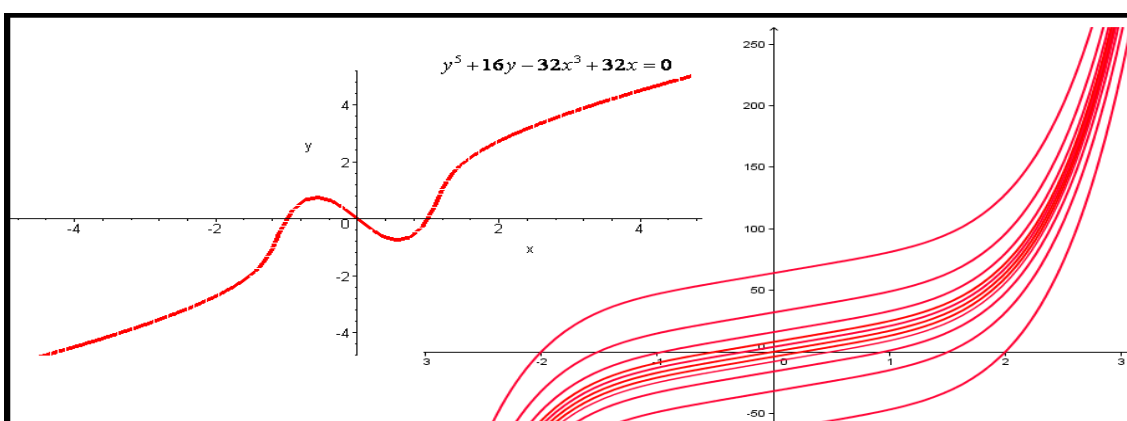
descrita pelo gráfico da função  $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ , com o plano de equação  $y = 1$ . A construção geométrica da obtenção da derivada parcial é exibida na figura 6 (lado esquerdo) e percebemos as devidas relações.



**Figura 6:** Descrição com o auxílio do *Geogebra* da restrição da função e o comportamento da declividade que coincide com a noção de derivada parcial no CVV

Para concluir, consideremos a seguinte equação em termos de duas variáveis  $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$ . Reparemos, com base na figura 5 (lado esquerdo), que o *locus* descrito por tal equação, define um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  que, aparentemente, possui as propriedades de ser o gráfico de uma função de  $y$  como variável de  $x$ , todavia, Krantz & Parks (2002, p. 2) sublinham que “nenhum fórmula para tal função existe.”

Por outro lado, quando escrevemos  $y^5 + 16y = 32x^3 - 32x$ , para cada valor fixado  $x \in \mathbb{R}$ , descrevemos a família de funções  $y^5 + 16y = k$ , com  $k = 32x^3 - 32x$ .



**Figura 7:** Com o *Geogebra* obtemos a descrição de uma família de funções

Por fim, o processo de integração no contexto do CUV, é recorrente a orientação dos autores de livros didáticos no Brasil, fornecer a descrição do processo de obtenção da área de uma região no plano  $\mathbb{R}^2$  que se encontra abaixo do eixo das ordenadas. De fato, na figura 7, divisamos com relativa facilidade o trecho abaixo do eixo. Por outro lado, o

trecho da curva que exibimos no plano (lado esquerdo, figura 7), corresponde exatamente a uma das restrições da função  $h(x, y) = y \sin(xy)$ , relativa ao seu domínio aqui considerado como  $[1, 2] \times [0, \pi]$ . Comparemos seu comportamento com base na fig. 8.

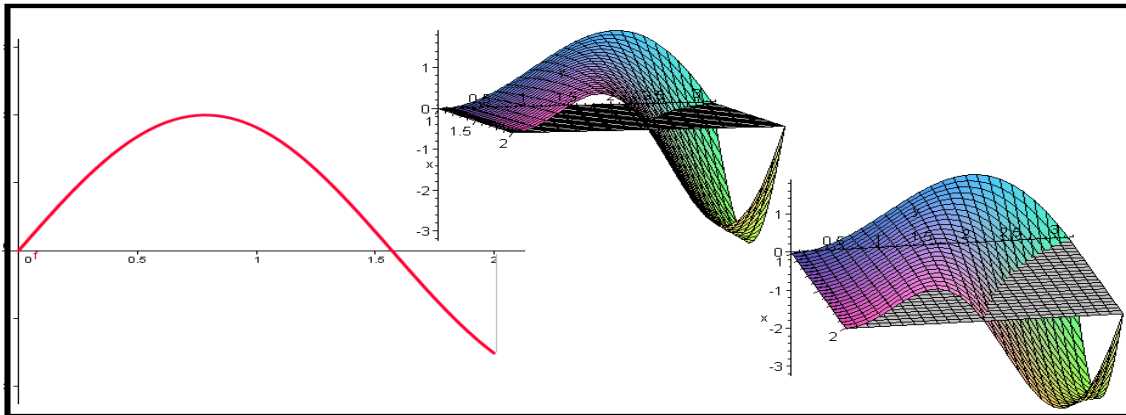


Figura 8: Visualização da região de integração no  $IR^2$  e no  $IR^3$

Desse modo, dada a representação gráfica fornecida pelo computador, podemos extrair e descrever o comportamento particular nessa região  $[1, 2] \times [0, \pi]$  e compreender, com o auxílio do *Geogebra*, a região que se encontra abaixo do plano  $xOy$ , bem com a região do espaço abaixo do gráfico. Apesar de que, quando restringimos tal tarefa ao quadro analítico, este elemento comum a ambos os contextos é desconsiderado, com o uso da tecnologia, evidenciamos um comportamento e raciocínio semelhante.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa comunicação, evidenciamos uma perspectiva de exploração didática envolvendo as possibilidades de complementaridade com vistas ao apoio ao entendimento, proporcionado pelos *softwares Geogebra e Maple*. Nos casos que discutimos há pouco, evidenciam o papel do *Geogebra* no sentido de proporcionar a compreensão de determinadas propriedades atinentes ao CUV e ao CVV no cenário da *transição interna*.

### REFERÊNCIAS

Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio; Machado, Rosélia, C. C. (2007). Uma sequência de Ensino para a aquisição do conceito de derivada parcial, direcional e teoremas correlatos no Cálculo em Várias Variáveis, In: *Conexões, Ciência e Tecnologia*, v. 1, n. 1, 29-34.

Disponível em: <http://revistaconexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/issue/archive>.

Alves, F. Regis. V. & Borges Neto. H. (2008). Aplicação da Sequência Fedathi na aquisição do processo de Integral Tripla com o auxílio do Maple. In: *XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Acessível em: [http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/trabalhos\\_comissao\\_cientifica.php](http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/trabalhos_comissao_cientifica.php)

Alves, Francisco. R. V. (2011). Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 353p. Disponível em: [http://www.teses.ufc.br/tde\\_biblioteca/login.php](http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php)

- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2011a). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. *Educação Matemática Pesquisa*. v. 13-3, 597-626, Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive>. Acesso em: 25 dez. 2011.
- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2011b). Análise de livros de cálculo a várias variáveis: o caso da comutatividade das derivadas parciais. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 1-12. Disponível em: [http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem](http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem)
- Alves, Francisco Regis; Borges Neto, H. & Alves Dias. M.. (2012). Implicações e aplicações da teoria das representações semióticas no ensino do Cálculo. In: *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. v. 5, Disponível em: <http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM>
- Alves, Francisco. R. V. (2012). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra. In: *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, 1, CLXV-CLXXIX, Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index>. Acessado em: 04 de Abril de 2012.
- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. Ingar, Kátia, V. (2012). Aplicações da Sequência Fedathi: sobre o ensino dos pontos críticos e de inflexão. VI Colóquio Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas. Disponível em: <http://irem.pucp.edu.pe/164/iv-coloquio-internacional-sobre-ensenanza-de-las-matematicas>
- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2012). Curvas parametrizadas: atividades envolvendo a visualização dos conceitos do Cálculo. In: *RELME 26*, p. 1-12. Disponível em: [http://www.relme26.ufop.br/index.php?option=com\\_content&view=frontpage&lang=pt](http://www.relme26.ufop.br/index.php?option=com_content&view=frontpage&lang=pt)
- Krantz. Steven. G. & Parks. Harold. R. (2002). *The implicit function theorem*. New York: Hardcover. 149p.