GEMELAS DE ARQUÍMEDES

Mario Dalcín
mdalcin00@gmail.com
Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática de Formación Docente, Montevideo-Uruguay

Modalidad: Comunicación
Nivel educativo: Terciario, Formación y actualización docente
Palabras clave: Arquímedes, *arbelos*, geometría empírica

Resumen

En el Libro de los Lemas, *obra de Arquímedes (287 a.C. + 75 = 212 a.C.) compuesta por quince proposiciones referidas a cuestiones de geometría elemental, aparecen tres (4, 5 y 6) donde interviene el* arbelos *o cuchillo de zapatero: zona limitada por tres semicircunferencias tangentes de diámetros AB, AC, CB, donde C pertenece al segmento AB e incluidas en un mismo semiplano. La Proposición 5 presenta al arbelos dando nacimiento a dos gemelas: las Gemelas de Arquímedes. Lo que no sospechó Arquímedes hace 2300 años es que sus gemelas solo eran las dos primeras. Tanto de las dos primeras como de las que le siguieron trata esta presentación.*

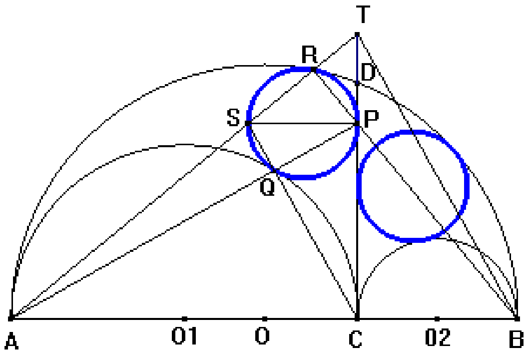
Introducción

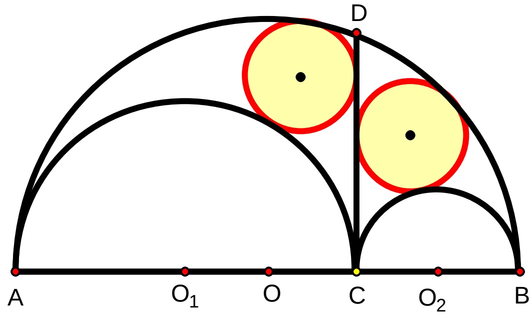
El presente artículo se propone homenajear a Arquímedes de Siracusa (287 a.C. + 75 = 212 a.C.) de quien se cumplen 2300 años de su muerte. Arquímedes poco escribió de geometría entendida en el sentido euclidiano, sin embargo dejó un tratado –el *Libro de los Lemas*- consistente en una serie de quince proposiciones referidas a cuestiones de geometría elemental. En el libro hay tres proposiciones (4, 5 y 6) donde interviene el *arbelos* o cuchillo de zapatero: zona limitada por tres semicircunferencias tangentes de diámetros AB, AC, CB, donde C pertenece al segmento AB e incluidas en un mismo semiplano. La Proposición 5 presenta al *arbelos* dando nacimiento a dos gemelas: las Gemelas de Arquímedes. Lo que no sospechó Arquímedes en aquel momento fue que las gemelas no eran solo dos.
Las figuras que aparecen en este extenso fueron hechas primero hace años en *Cabri Geometre* y luego –hace menos años- en *The Geometer's Sketchpad*. El presente texto, así como las figuras dinámicas que dieron origen a las figuras en ambos softwares, van a ser usadas próximamente en un taller donde se promoverá el uso de GeoGebra mediante la construcción de las mismas.

Gemelas 1 y 2: La Proposición 5 del *Libro de los Lemas*

Las circunferencias tangentes a CD y a las semicircunferencias de diámetros AB, AC y AB, CB respectivamente, son iguales.

P, R, Q son los puntos de contacto de la circunferencia tangente con el segmento CD y las semicircunferencias de diámetros AC y AB respectivamente. SP es diámetro.





Los puntos A, Q, P; C, Q, S; R, S, A; R, P, B están alineados. (Prop. 1 del *Libro de los Lemas*: Si en dos circunferencias tangentes construimos diámetros paralelos, sus extremos están alineados con el punto de tangencia).
T es la intersección de AR y CD.
En el triángulo (ABT):
TC y BR son alturas que se cortan en P, ortocentro del triángulo, por lo que debe ser AP $\perp$ BT.
Como también AP$\perp$ CS tenemos que CS//BT $\rightarrow$ ST/AT = CB/AB.
Los triángulos (TSP) y (TAC) son semejantes $\rightarrow$ ST/AT = SP/AC.
De lo anterior: SP/AC = CB/AB $\rightarrow$ SP = $2r_1r_2/r$.
El radio de la circunferencia PQR es entonces r_1r_2/r.
El razonamiento se puede reiterar para la otra circunferencia llegándose al mismo radio.
Esta es la demostración de Arquímedes.

Se puede hacer una demostración alternativa recurriendo al siguiente *Previo*:

$$\textit{CH altura en un triángulo ABC} \rightarrow AC^2 - BC^2 = AH^2 - BH^2$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en (AHC) y (BHC):
$AC^2 - BC^2 = (AH^2 + HC^2) - (HC^2 + BH^2) = AH^2 - BH^2$

$O_1O = AO - AO_1 = (r_1 + r_2) - r_1 = r_2$
Llamando x al radio de la circunferencia tangente a CD y a las semicircunferencias AC y AB:
$O_1O + OH + x = r_1 \rightarrow OH = r_1 - O_1O - x = r_1 - r_2 - x$
En (O_1OP) con altura PH:
$O_1P^2 - OP^2 = O_1H^2 - OH^2 \rightarrow$
$\rightarrow (r_1 + x)^2 - [(r_1 + r_2) - x]^2 = (r_1 - x)^2 - (r_1 - r_2 - x)^2$
$\rightarrow (r_1 + x)^2 - [(r_1 + r_2) - x]^2 = (r_1 - x)^2 - (r_1 - r_2 - x)^2$
$\rightarrow r_1^2 + 2r_1x + x^2 - (r_1 + r_2)^2 + 2(r_1 + r_2)x - x^2 = r_1^2 - 2r_1x + x^2 - (r_1 - r_2)^2 + 2(r_1 - r_2)x - x^2 \rightarrow 2r_1x + 2(r_1 + r_2)x + 2r_1x - 2(r_1 - r_2)x = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$
$\rightarrow (2r_1 + 2r_1 + 2r_2 + 2r_1 - 2r_1 + 2r_2)x = (r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2$
$\rightarrow 4(r_1 + r_2)x = 4r_1r_2$
$\rightarrow x = r_1r_2/(r_1 + r_2)$

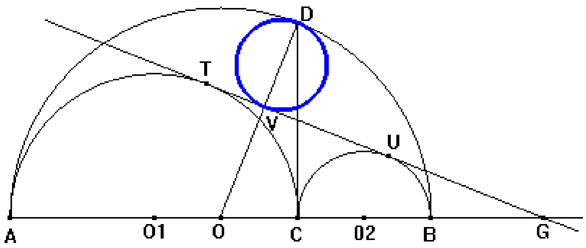
Gemela 3

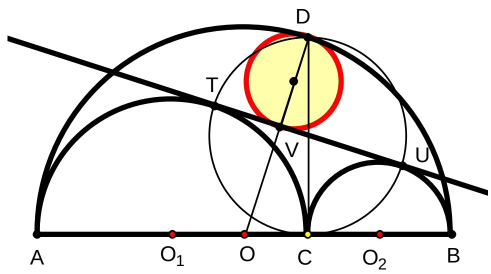
La circunferencia de diámetro máximo tangente a TU y a la circunferencia de diámetro AB es la 3er gemela.

$TU \cap OD = \{V\}$, $TU \cap AB = \{G\}$.

$OV/O_1T = GO/GO_1 \rightarrow OV = GO \times O_1T/GO_1 = (GB + 2r_2 + (r_1 - r_2))r_1/(GB + 2r_2 + r_1) =$
$= (r_1^2 + r_2^2)/(r_1 + r_2)$.

$VD = OD - OV = (r_1 + r_2) - (r_1^2 + r_2^2)/(r_1 + r_2) = 2r_1r_2/r$.

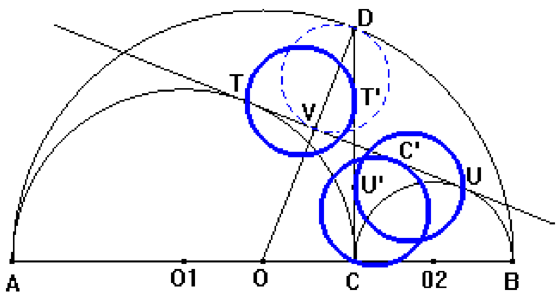


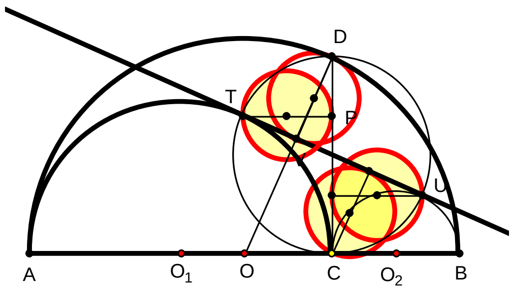


Gemelas 4, 5 y 6

C' el pie de la perpendicular a TU por C. La circunferencia de diámetro CC' es la 4ª gemela.
T', U' los pies de las perpendiculares a CD trazadas por T y U respectivamente. Las circunferencias de diámetros TT' y UU' son la 5ª y 6ª gemelas.

(CUDT) es rectángulo.

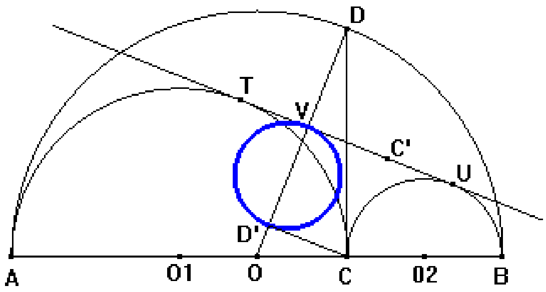


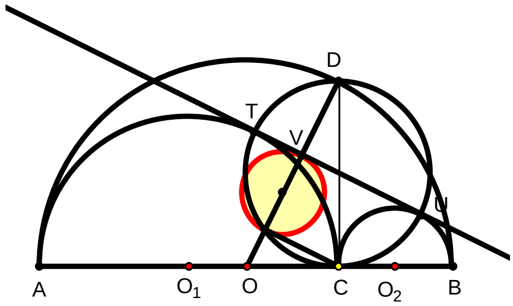


Gemela 7

D' el pie de la perpendicular trazada por C a OD. La circunferencia de diámetro VD' es la
7ª gemela.

(CC'VD') es rectángulo → VD' = CC'.

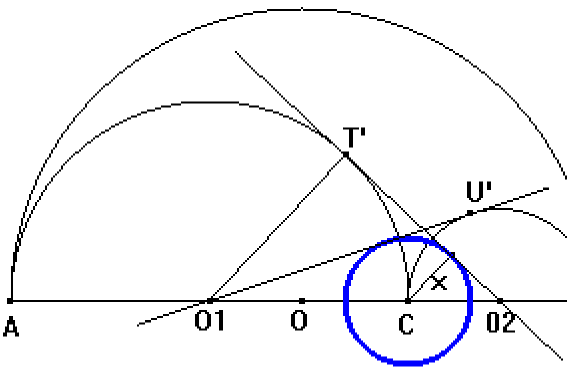


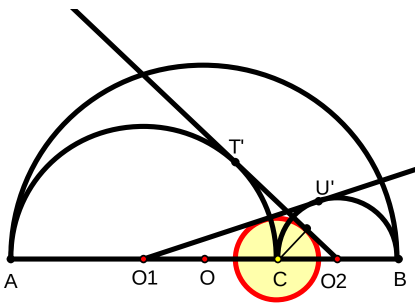


Gemela 8

O_2T' tangente a la circunferencia de diámetro AC. La circunferencia de centro C y tangente a O_2T' es la 8ª gemela. Esta 8ª gemela también es tangente a la tangente por O_1 a la circunferencia de diámetro CB.

$O_2C/O_2O_1 = x/O_1T' \rightarrow\ x = r_1r_2/(r_1 + r_2) = r_1r_2/r$.

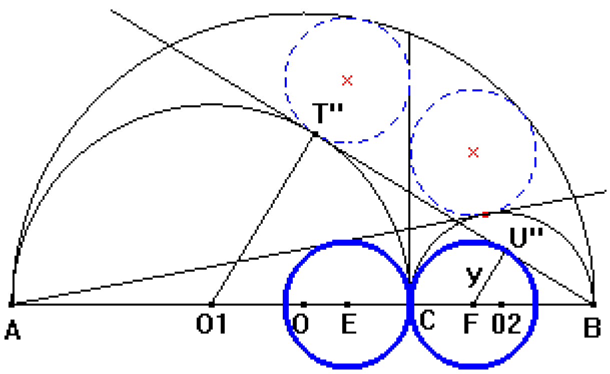


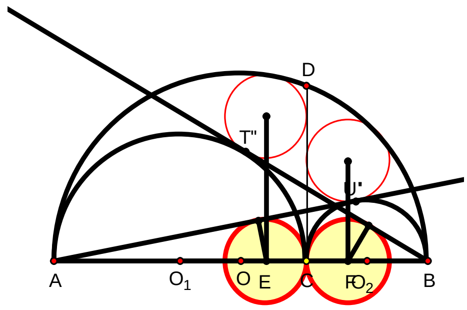


Gemelas 9 y 10

BT'', AU'' tangentes a las circunferencias de diámetro AC y CB respectivamente. F, E las proyecciones sobre AB de los centros de las circunferencias de diámetros S'P' y SP. Las circunferencias con centro F y tangente a BT'' y con centro E y tangente a AU'' son la 9ª y 10ª gemelas.

$y/O_1T'' = BF/BO_1 \rightarrow y = [(2r_2 - r_1r_2/r)r_1]/(r_1 + 2r_2) = r_1r_2/r$.

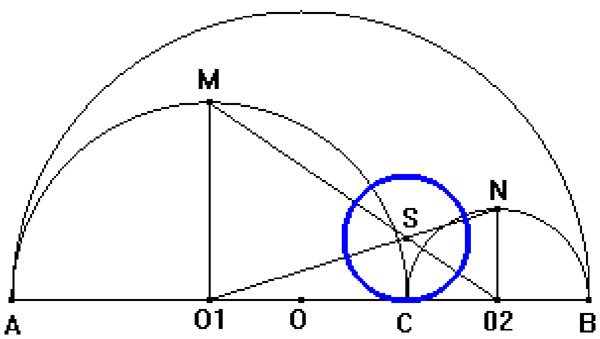


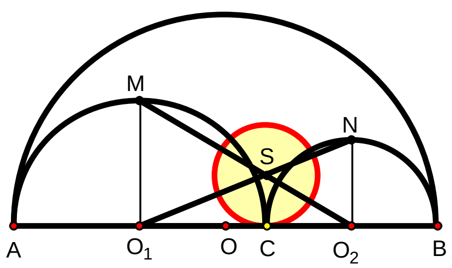


Gemela 11

O_1N y O_2M se cortan en S. La circunferencia de centro S y radio SC es la 11ª gemela.

Demostremos que SC es perpendicular a AB: consideremos s $\perp$ AB por S, s $\cap$ AB = {S'} $\rightarrow$
$(r_1 + r_2)/O_1S' = O_1O_2/O_1S' = O_1N/O_1S = O_1S/O_1S + SN/O_1S = 1 + r_2/r_1 = (r_1 + r_2)/r_1 \rightarrow$
$O_1S' = r_1 \rightarrow S' = C$.
$SC/NO_2 = O_1C/O_1O_2 \rightarrow SC = r_1r_2/r$.

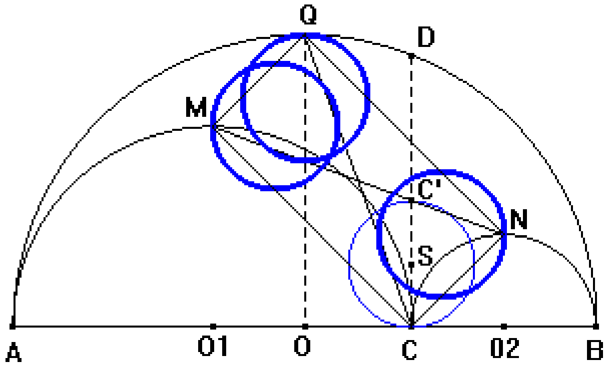


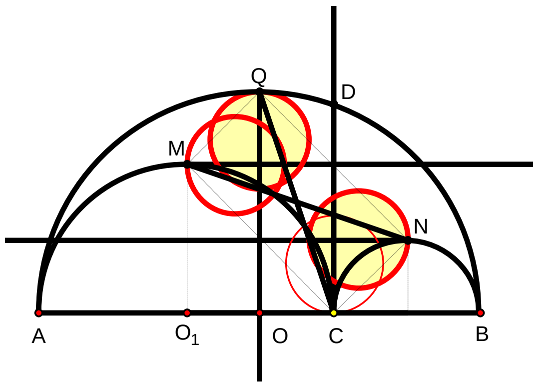


Gemelas 12, 13 y 14

La bisectriz de NQM corta a MN en Q’, la bisectriz de CNQ corta a CQ en N’ y la bisectriz de QMC corta a CQ en M’. Las circunferencias de diámetros QQ’, NN’, MM’ son la 12ª, 13ª y 14ª gemelas.

Si biz MCN $\cap$ MN = {C’}, demostremos que S es punto medio de CC’.
$SM/SO_2 = SO_1/SN = r_1/r_2$.
$O_1N/O_1S = O_1S/O_1S + SN/O_1S = 1 + r_2/r_1 = (r_1 + r_2)/r_1$.
$MO_2/MS = MS/MS + SO_2/MS = 1 + r_2/r_1 = (r_1 + r_2)/r_1$.
$\rightarrow O_1S/O_1N = MS/MO_2 = r_1/(r_1 + r_2)$.
$C'S/NO_2 = MS/MO_2$
$CS/NO_2 = O_1S/O_1N$
$\rightarrow C'S/NO_2 = CS/NO_2 \rightarrow C'S = CS$.
Ahora alcanza con recordar que (CNQM) es rectángulo.

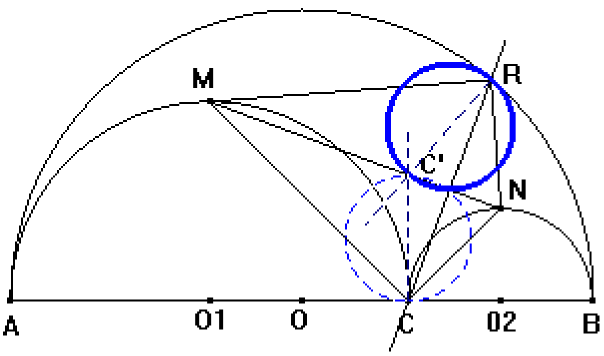


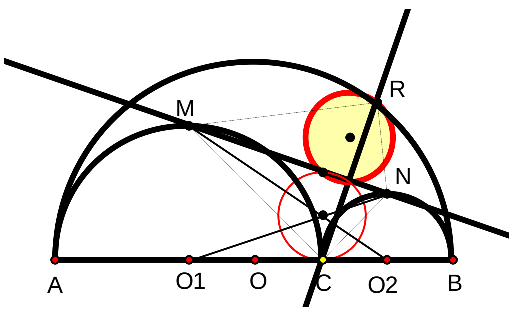


Gemela 15

La perpendicular por C a MN corta a la semicircunferencia de diámetro AB en R, la bisectriz de NRM corta a MN en C’. La circunferencia de diámetro RC’ es la 15ª gemela.

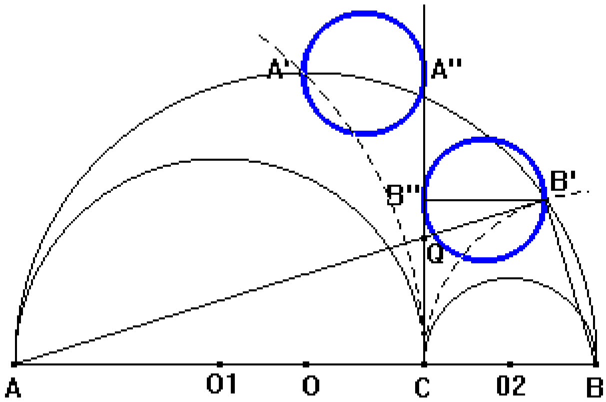
Basta recordar que los triángulos (MCN) y (MRN) simétricos.





Gemela 16 y 17

A', B' los puntos de intersección de la semicircunferencia de diámetro AB con las circunferencias de centros A y B y radios AC y BC respectivamente. A'', B'' las proyecciones de A', B' sobre la recta CD. Las circunferencias de diámetros A'A'' y B'B'' son la 16ª y 17ª gemelas.



En (ABB'):

$AB' = \sqrt{(AB^2 - BB'^2)} =$

$= \sqrt{[(2r_1 + 2r_2)^2 - (2r_2)^2]} =$

$= 2\sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}$.

$AB' \cap CD = \{Q\}$.

(AB'B) y (AQC) son semejantes $\rightarrow$

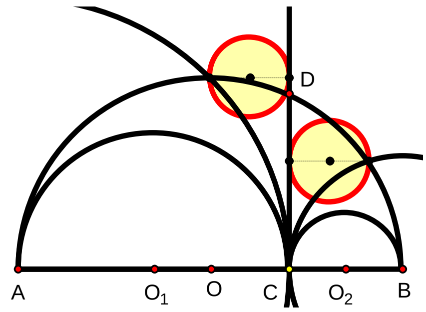
$\rightarrow QC/AC = BB'/AB'$

$\rightarrow QC = AC \times BP/AP =$

$= (2r_1)(2r_2)/ 2\sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}$

$\rightarrow QC = 2r_1r_2 / \sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}$ y como

$QC = QB'$ tenemos $QB' = 2r_1r_2 / \sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}$.



(ABB') y (B'QB'') son semejantes

$\rightarrow B'B''/B'Q = AB'/AB \rightarrow$

$\rightarrow B'B'' = AB' \times B'Q/AB$

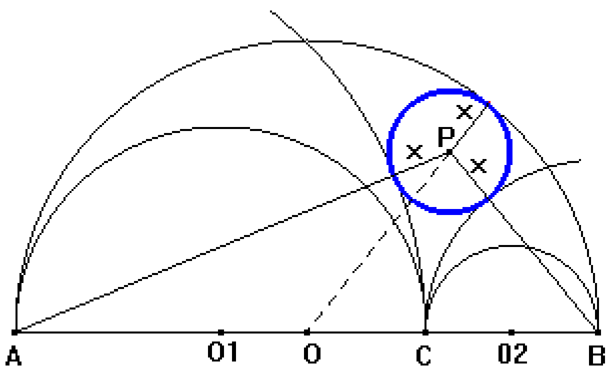
$\rightarrow B'B'' = [2\sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}.\ 2r_1r_2 / \sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}]/2(r_1 + r_2)$

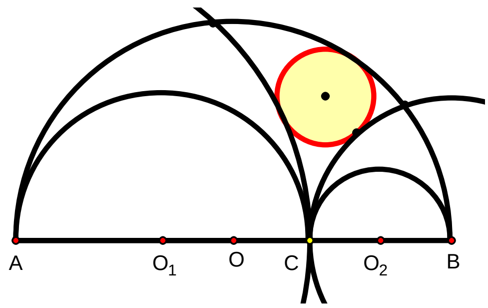
$\rightarrow B'B'' = 2r_1r_2 /(r_1 + r_2)$

$\rightarrow B'B'' = 2r_1r_2 /r$.

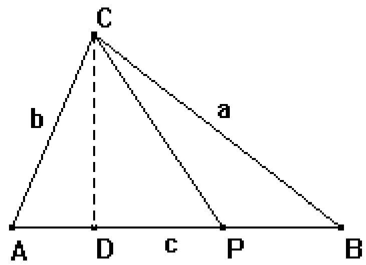
Gemela 18

La circunferencia inscripta en la región limitada por la semicircunferencia de diámetro AB y las circunferencias de centros A, B y radios AC, BC respectivamente, es la 18ª gemela.





En la demostración se usará el *teorema de Stewart*:
Si P pertenece al lado AB de un triángulo ABC $\rightarrow a^2 \times AP + b^2 \times BP = CP^2 \times c + AP \times BP \times c$.



A partir del teorema del coseno
en (PBC): $a^2 = BP^2 + CP^2 - 2.\ BP.\ PD$
en (APC): $b^2 = AP^2 + CP^2 - 2.\ AP.\ PD$
Multiplicando la primera igualdad por AP y la segunda por PB y luego sumando tenemos

$$a^2.\ AP + b^2.\ BP = CP^2.\ (AP + PB) + AP.\ BP.\ (AP + PB)$$
$$a^2.\ AP + b^2.\ BP = CP^2.\ c + AP.\ BP.\ c$$

Cuando P es punto medio de AB, CP es la mediana m_c y se puede expresar en función de los lados del triángulo: $a^2.\ c/2 + b^2.\ c/2 = m_c^2.\ c + (c/2).\ (c/2).\ c$

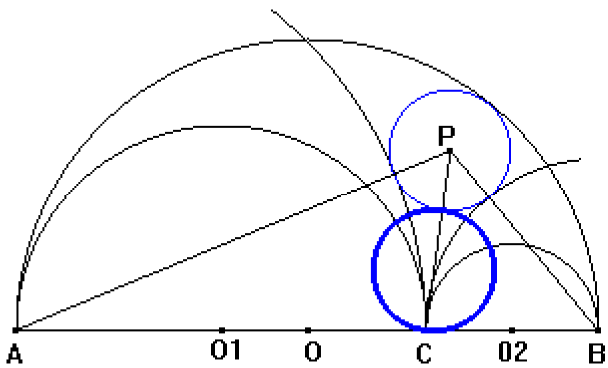
$$[(a^2 + b^2)/2]\ c = (m_c^2 + c^2/4).\ c$$
$$m_c^2 = (a^2 + b^2)/2 - c^2/4$$

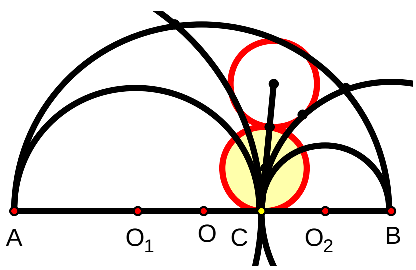
En (ABP), siendo x la medida del radio de la candidata a 18ª gemela, se cumple:

$$OP^2 = (BP^2 + AP^2)/2 - AB^2/4$$
$$\rightarrow [(r_1 + r_2) - x]^2 = [(2r_2 + x)^2 + (2r_1 + x)^2]/2 - [2(r_1 + r_2)]^2/4$$
$$\rightarrow (r_1 + r_2)^2 - 2(r_1 + r_2)x + x^2 = [4r_2^2 + 4r_2x + x^2 + 4r_1^2 + 4r_1x + x^2]/2 - (r_1 + r_2)^2$$
$$\rightarrow (r_1 + r_2)^2 - 2(r_1 + r_2)x = 2(r_1^2 + r_2^2) + 2(r_1 + r_2)x - (r_1 + r_2)^2$$
$$\rightarrow 4(r_1 + r_2)x = 2(r_1 + r_2)^2 - 2(r_1^2 + r_2^2)$$
$$\rightarrow 2(r_1 + r_2)x = (r_1 + r_2)^2 - (r_1^2 + r_2^2)$$
$$\rightarrow x = 2r_1r_2/2(r_1 + r_2)$$
$$\rightarrow x = r_1r_2 / r$$

Gemela 19

La menor circunferencia tangente a la 18ª gemela y que pasa por C es la 19ª gemela.





Usando la igualdad de Stewart en (ABP):
$[2r_2 + r_1r_2/(r_1 + r_2)]^2\ (2r_1) + [2r_1 + r_1r_2/(r_1 + r_2)]^2\ (2r_2) = CP^2.2(r_1 + r_2) + 2r_1.\ 2r_2.\ 2(r_1 + r_2) \rightarrow$

$$\{[2r_2 (r_1 + r_2) + r_1r_2]/(r_1 + r_2)\}^2 (2r_1) + \{[2r_1 (r_1 + r_2) + r_1r_2]/(r_1 + r_2)\}^2 (2r_2) = CP^2.2(r_1 + r_2) + 4r_1r_2.\ 2(r_1 + r_2) \rightarrow$$

$$\{[4r_2^2 (r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2^2 (r_1 + r_2) + r_1^2 r_2^2]/(r_1 + r_2)^2\}.r_1 + \{[4r_1^2 (r_1 + r_2)^2 + 4r_1^2r_2 (r_1 + r_2) + r_1^2 r_2^2]/(r_1 + r_2)^2\}.r_2 = CP^2.(r_1 + r_2) + 4r_1r_2 (r_1 + r_2) \rightarrow$$

$$[4r_1r_2^2 (r_1 + r_2)^2 + 4r_1^2r_2^2 (r_1 + r_2) + r_1^3 r_2^2 + 4r_1^2r_2 (r_1 + r_2)^2 + 4r_1^2r_2^2 (r_1 + r_2) + r_1^2 r_2^3]/(r_1 + r_2)^2 = CP^2.(r_1 + r_2) + 4r_1r_2 (r_1 + r_2) \rightarrow$$

$$[4(r_1 + r_2)^2 (r_1r_2^2 + r_1^2r_2) + 8r_1^2r_2^2 (r_1 + r_2) + r_1^3 r_2^2 + r_1^2 r_2^3]/(r_1 + r_2)^2 = CP^2.(r_1 + r_2) + 4r_1r_2 (r_1 + r_2) \rightarrow$$

$$[4r_1r_2 (r_1 + r_2)^3 + 8r_1^2r_2^2 (r_1 + r_2) + r_1^2 r_2^2 (r_1 + r_2)]/(r_1 + r_2)^2 = CP^2.(r_1 + r_2) + 4r_1r_2 (r_1 + r_2) \rightarrow$$

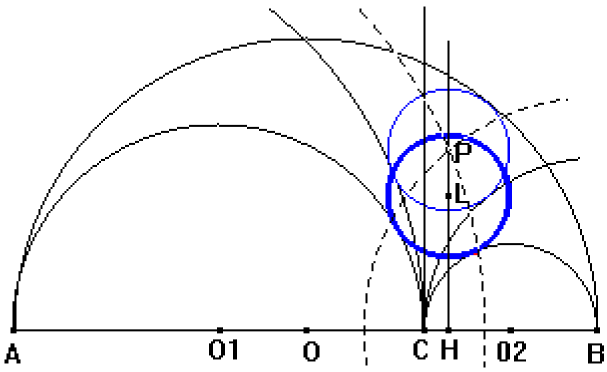
$$[4r_1r_2 (r_1 + r_2)^2 + 8r_1^2r_2^2 + r_1^2 r_2^2]/(r_1 + r_2) = CP^2.(r_1 + r_2) + 4r_1r_2 (r_1 + r_2) \rightarrow$$

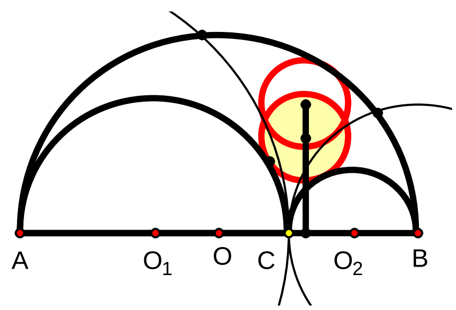
$$[4r_1r_2 (r_1 + r_2)^2 + 8r_1^2r_2^2 + r_1^2 r_2^2]/(r_1 + r_2) - 4r_1r_2 (r_1 + r_2) = CP^2.(r_1 + r_2) \rightarrow$$

$$9r_1^2r_2^2 /(r_1 + r_2) = CP^2.(r_1 + r_2) \rightarrow CP^2 = 9r_1^2r_2^2 /(r_1 + r_2)^2 \rightarrow CP = 3r_1r_2 /(r_1 + r_2).$$

Gemela 20

Por el centro de la 18ª gemela trazamos una recta perpendicular a AB. La circunferencia con centro sobre dicha recta y tangente simultáneamente a las semicircunferencias de diámetros AC y CB es la 20ª gemela.





Considerando un sistema de coordenadas con AB como eje de abscisas y CD como eje de ordenadas tenemos: $A(-2r_1,0)$, $B(2r_2,0)$.
La circunferencia $(C_{A,AP})$, de centro A y radio AP, tiene ecuación:

$$x^2 + y^2 + 4r_1x - r_1^2r_2(4r_1 + 5r_2)/(r_1 + r_2)^2 = 0$$

La circunferencia $(C_{B,BP})$, de centro B y radio BP, tiene ecuación:

$$x^2 + y^2 - 4r_2x - r_1r_2^2(5r_1 + 4r_2)/(r_1 + r_2)^2 = 0$$

La intersección de estas dos circunferencias contiene al punto P de abscisa:

$$(C_{A,AP}) - (C_{B,BP}): (4r_1 + 4r_2)x + [\, r_1^2r_2(4r_1 + 5r_2) - r_1r_2^2(5r_1 + 4r_2)]/(r_1 + r_2)^2 = 0 \rightarrow$$
$$4(r_1 + r_2)x + [\, r_1r_2 \,.\, 4(r_2^2 - r_1^2)]/(r_1 + r_2)^2 = 0 \rightarrow$$
$$(r_1 + r_2)x + r_1r_2(r_2 - r_1)]/(r_1 + r_2) = 0 \rightarrow$$
$$x = r_1r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2$$

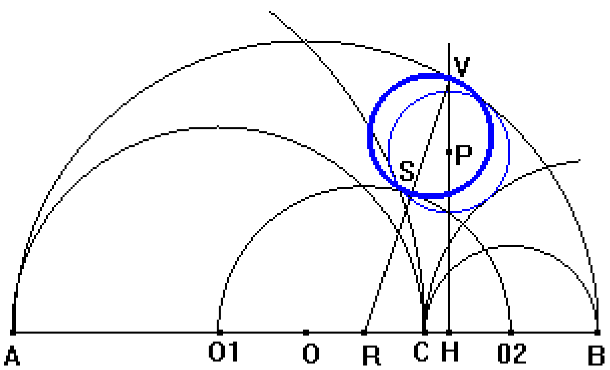
Si H es la proyección de P sobre AB tenemos que $CH = r_1r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2$
L centro de la ‘futura’ 20ª gemela.
En (O_1HL): $LH^2 = (r_1 + x)^2 - O_1H^2$
En (O_2HL): $LH^2 = (r_2 + x)^2 - O_2H^2$
$\rightarrow (r_1 + x)^2 - O_1H^2 = (r_2 + x)^2 - O_2H^2 \rightarrow$
$\rightarrow r_1^2 + 2r_1x + x^2 - O_1H^2 = r_2^2 + 2r_2x + x^2 - O_2H^2 \rightarrow$
$\rightarrow r_1^2 - r_2^2 + O_2H^2 - O_1H^2 = 2(r_2 - r_1)x \rightarrow$
usando el valor de CH hallado:
$\rightarrow r_1^2 - r_2^2 + [r_2 - r_1r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2]^2 - [r_1 - r_1r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2]^2 = 2(r_2 - r_1)x$
$\rightarrow$

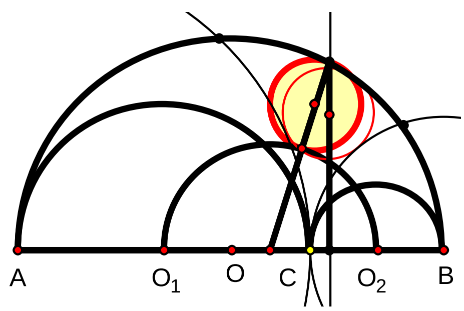
$\rightarrow r_1^2 - r_2^2 + r_2^2 - 2r_1r_2^2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2 + [\, r_1r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2]^2$
$- r_1^2 - 2r_1^2r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2 - [\, r_1r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2]^2 = 2(r_2 - r_1)x \rightarrow$

$x = (r_1r_2^2 + r_1^2r_2)/(r_1 + r_2)^2 = r_1r_2(r_1 + r_2)/(r_1 + r_2)^2 \rightarrow x = r_1r_2/(r_1 + r_2) \rightarrow x = r_1r_2/r.$

Gemela 21

La recta perpendicular a AB por el centro de la 18ª gemela corta a la semicircunferencia de diámetro AB en V. La menor circunferencia que pasa por V y es tangente a la semicircunferencia de diámetro O_1O_2 es la 21ª gemela.





R es centro de la circunferencia de diámetro O_1O_2.

$O_1R + RC = O_1C \rightarrow RC = O_1C - O_1R =$

$= r_1 - (r_1 + r_2)/2 = (r_1 - r_2)/2$

$RH = RC + CH =$

$= (r_1 - r_2)/2 + r_1r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2$

Usando la igualdad de Stewart en el triángulo (ABV) para el punto R:

$BV^2. AR + AV^2. BR =$

$= RV^2.AB + AR. BR. AB$

y el teorema del cateto en ABV:

$BH. BA. AR + AH. AB. BR = RV^2. AB + AR. BR. AB \rightarrow$

$BH. AR + AH. BR = RV^2 + AR. BR \rightarrow$

$[2r_2 - r_1 r_2 (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2].[(r_1 + (r_1 + r_2)/2]+[2r_1 + r_1 r_2 (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2].[(r_2 + (r_1 + r_2)/2] =$

$RV^2 + [r_1 + (r_1 + r_2)/2].[r_2 + (r_1 + r_2)/2]$

$\rightarrow$

$$RV^2 = 2r_1r_2 + 2r_2(r_1 + r_2)/2 - r_1^2r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2 - (r_1 + r_2)r_1 r_2(r_1 - r_2)/2(r_1 + r_2)^2 + 2r_1r_2 + 2r_1(r_1 + r_2)/2 - r_1 r_2^2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_2)r_1 r_2(r_1 - r_2)/2(r_1 + r_2)^2 - [r_1r_2 + r_1(r_1 + r_2)/2 + r_2(r_1 + r_2)/2 + (r_1 + r_2)^2/4] \rightarrow$$

$$RV^2 = 4r_1r_2 + (r_1 + r_2)^2 - r_1r_2(r_1 - r_2)^2/(r_1 + r_2)^2 - r_1r_2 - (r_1 + r_2)^2/2 - (r_1 + r_2)^2/4 \rightarrow$$

$$RV^2 = 3r_1r_2 + (r_1 + r_2)^2/4 - r_1r_2(r_1 - r_2)^2/(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$RV^2 = [12r_1r_2(r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_2)^4 - 4r_1r_2(r_1 - r_2)^2] / 4(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$RV^2 = \{ 4r_1r_2 [3(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2] + (r_1 + r_2)^4 \}/ 4(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$RV^2 = \{ 4r_1r_2 [2(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2] + (r_1 + r_2)^4 \}/ 4(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$RV^2 = [8r_1r_2(r_1 + r_2)^2 + 16r_1r_2 + (r_1 + r_2)^4] / 4(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$RV^2 = [(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2]^2 / 4(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$RV = [(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2] / 2(r_1 + r_2)$$

$SV = RV - RS = [(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2] / 2(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2)/2 \rightarrow$

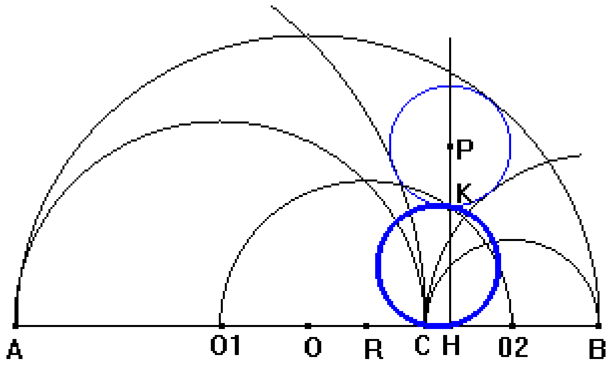
$SV = [(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2 - (r_1 + r_2)^2] / 2(r_1 + r_2) \rightarrow$

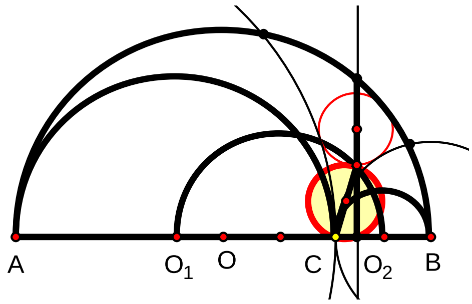
$SV = 4r_1r_2 / 2(r_1 + r_2) \rightarrow$

$SV = 2r_1r_2 / (r_1 + r_2)$

Gemela 22

La recta perpendicular a AB por el centro de la 18ª gemela corta a la semicircunferencia de diámetro O_1O_2 en K. La circunferencia de diámetro CK es la 22ª gemela.





Usando la igualdad de Stewart en (O_1O_2K) para el punto C:

$$O_2K^2 . r_1 + O_1K^2 . r_2 = KC^2 . (r_1 + r_2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)$$

y ahora usando el teorema del cateto en el mismo triángulo:

$$(O_2H . O_1O_2)\, r_1 + (O_1H . O_1O_2)\, r_2 = KC^2 . (r_1 + r_2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)$$

$$(r_1 + r_2) [r_2 - r_1r_2 (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2] r_1 + (r_1 + r_2) [r_1 + r_1r_2 (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2] r_2 = KC^2 . (r_1 + r_2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2) \rightarrow$$

$$[r_2 - r_1r_2 (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2] r_1 + [r_1 + r_1r_2 (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2] r_2 = KC^2 + r_1 r_2 \rightarrow$$

$$KC^2 = r_1 r_2 - r_1^2r_2 (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2 + r_1r_2 + r_1r_2^2 (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2 - r_1 r_2 \rightarrow$$

$$KC^2 = [r_1 r_2 (r_1 + r_2)^2 - r_1^2r_2 (r_1 - r_2) + r_1r_2^2 (r_1 - r_2)] / (r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$KC^2 = r_1 r_2 [(r_1 + r_2)^2 - r_1 (r_1 - r_2) + r_2 (r_1 - r_2)] / (r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$KC^2 = 4 r_1^2r_2^2 / (r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$KC = 2r_1r_2 / (r_1 + r_2)$$

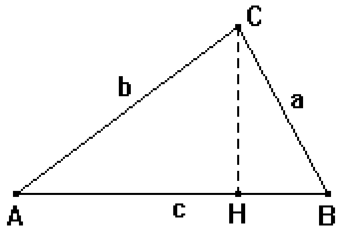
Gemela 23

W pertenece a la semicircunferencia de diámetro O_1O_2 y es centro de la circunferencia tangente a las semicircunferencias de diámetros AC y CB. La menor circunferencia que pasa por W y es tangente a AB es la 23ª gemela.

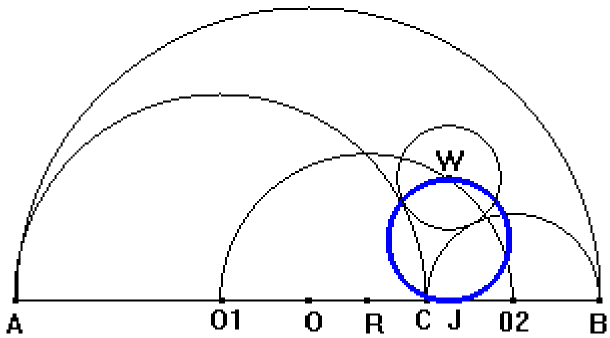
En un triángulo ABC, lados a, b, c y altura CH se cumple:

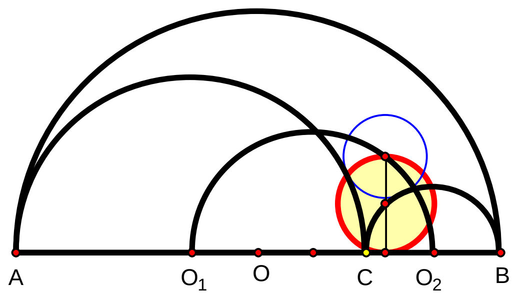
$$CH = 2\sqrt{[s (s - a)(s - b)(s - c)]} /c \quad \text{siendo } s = (a + b + c)/2$$

Aplicando Pitágoras en (BHC) y (AHC):



$a^2 = (c - AH)^2 + CH^2$
$b^2 = AH^2 + CH^2$ de donde
$a^2 - b^2 = c^2 - 2c.AH \rightarrow AH = (b^2 + c^2 - a^2)/ 2c$
por lo tanto $CH = \sqrt{\{b^2 - [(b^2 + c^2 - a^2)/ 2c]^2\}} \rightarrow$
$CH = \{\sqrt{[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]}\}/ 2c \rightarrow$
$CH = \{\sqrt{[(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]}\}/ 2c \rightarrow$
$CH = [\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}] / 2c \rightarrow$
$CH = \{\sqrt{[(b + c)^2 - a^2][(a^2 - (b - c)^2]}\} / 2c \rightarrow$
$CH = [\sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}] / 2c \rightarrow$
Como $a + b + c = 2s \rightarrow -a + b + c = 2(s - a)$
$a - b + c = 2(s - b)$
$a + b - c = 2(s - c) \quad \rightarrow$
$CH = [\sqrt{2s\, 2(s - a)2(s - b)2(s - c)}] / 2c \rightarrow$
$CH = [2\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}] / c$





Llamando x al radio de la circunferencia de centro W que es tangente a las semicircunferencias de diámetros AC y CB, usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$(r_1 + x)^2 + (r_2 + x)^2 = (r_1 + r_2)^2 \rightarrow x^2 + (r_1 + r_2)x = r_1r_2 \quad (*)$$

Usando la expresión hallada para la altura de un triángulo en función de sus lados en el triángulo (O_1O_2W)
$WJ = 2\sqrt{[(r_1 + r_2 + x)\, r_1\, r_2\, x]} / (r_1 + r_2) \rightarrow$
$WJ = 2\sqrt{\{r_1\, r_2 [x^2 + x (r_1 + r_2)]\}}/ (r_1 + r_2) \rightarrow$
sustituyendo por lo obtenido en la ecuación (*):
$WJ = [2\sqrt{(r_1^2r_2^2)}] / (r_1 + r_2) \rightarrow$
$WJ = 2r_1r_2 / (r_1 + r_2)$

Referencias

Bankoff, L. (1994). The marvelous arbelos. En R. K. Guy and R. E. Woodrow (Eds.), *The Lighter Side of Mathematics*, pp. 247-253. U. S. A.: MAA.

Dodge, C. W. (1994). Reflections of a problem editor. En J. Milo Anthony (Ed.), *In Eves' Circle*, pp. 63-72. U. S. A.: MAA.

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías. Tomo 1*. México: Uteha.

Heath, T. L. (1953). Book of Lemmas. En T. L. Heath (Ed.), *The Works of Archimedes*, pp. 301-318. U.S.A.: Dover.

Schoch, T. (1998). A dozen more arbelos twins.
http://www.biola.edu/academics/undergrad/math/woopy/arbel2.htm.

Shively, L. S. (1939). *An Introduction to Modern Geometry*. U.S.A.: John Wiley & Sons.

Woo, P. (1998). The arbelos.
http://www.biola.edu/academics/undergrad/math/woopy/arbelos.htm.