

## CONJETURAS SOBRE TRIÁNGULOS DETERMINADOS POR MEDIATRICES, BISECTRICES Y ALTURAS DE UN TRIÁNGULO

Mario Dalcín  
mdalcin00@gmail.com

Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática de Formación Docente,  
Montevideo-Uruguay

Modalidad: C

Nivel educativo: Terciario, Formación y actualización docente

Palabras clave: Conjetura, geometría empírica.

### Resumen

*Trabajando en un ambiente dinámico se formulan conjeturas en torno a triángulos determinados por mediatrices y bisectrices de un triángulo y también por sus mediatrices y alturas. Se propone la inclusión en la enseñanza de la formulación de conjeturas como proceso de la actividad matemática en el ámbito de la Geometría Euclidiana.*

### Introducción

La existencia de la Geometría Dinámica desde hace pocas décadas ha posibilitado la exploración de conjeturas en el ámbito de la Geometría Euclidiana. A su vez, en el ámbito de la Didáctica de la Matemática se ha dado cabida a la geometría empírica, como es el caso de Houdement y Kuzniak (1999a, 1999b, 2000) que plantean tres geometrías:

*Geometría I. La geometría natural.* La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

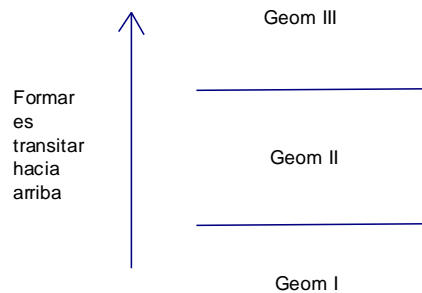
*Geometría II. La geometría axiomática natural.* La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.

*Geometría III. La geometría axiomática formalista.* Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

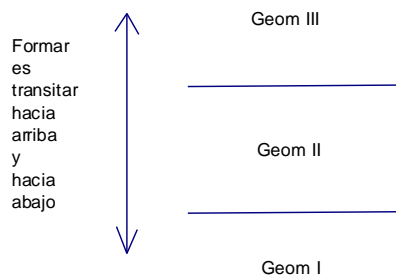
Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cual dar cuenta de toda la geometría, desde la que se trabaja en la enseñanza primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático.

Estas Geometría I, Geometría II y Geometría III podrían pensarse en un primer momento como niveles a través de los cuales una persona estudiando geometría debería transitar; concebirlas como una jerarquía, la Geometría II mejor que la Geometría I, la

Geometría III mejor que la Geometría II. Así es como ha sido concebida tradicionalmente la enseñanza de la geometría, un camino unidireccional, siempre ascendente.



Sin embargo, no se trata de dirimir cuál de estas geometrías es mejor, no es eso lo que está planteado: los autores postulan tres geometrías posibles, tres enfoques distintos de un mismo hecho, pero donde ninguno niega a los otros. Las prácticas permiten ver en cuál se está trabajando en cada momento, son tres dimensiones distintas, el camino deductivo es uno de esos caminos (Geometría II), pero el camino puede ser el de constatar mediante mediciones (Geometría I), o validar al interior de un sistema axiomático formal (Geometría III). Cada una de estas dimensiones no niega a la otra. Esto permite concebir la formación de un estudiante en el ámbito de la geometría como un tránsito continuo entre estas tres dimensiones.



Por otro lado, Kuzniak (2006) plantea un vínculo entre su modelo de las Geometrías I, II, III y los niveles de van Hiele, lo cual facilita establecer conexiones entre un modelo medianamente difundido y manejado por los docentes como es el de van Hiele y este nuevo modelo.

Consideramos que la amplitud del modelo de Houdement y Kuzniak (1999a, 1999b, 2000) de las Geometrías I, II, III, puede ser de utilidad para entender el trabajo geométrico de nuestros estudiantes y así poder contribuir a su desarrollo.

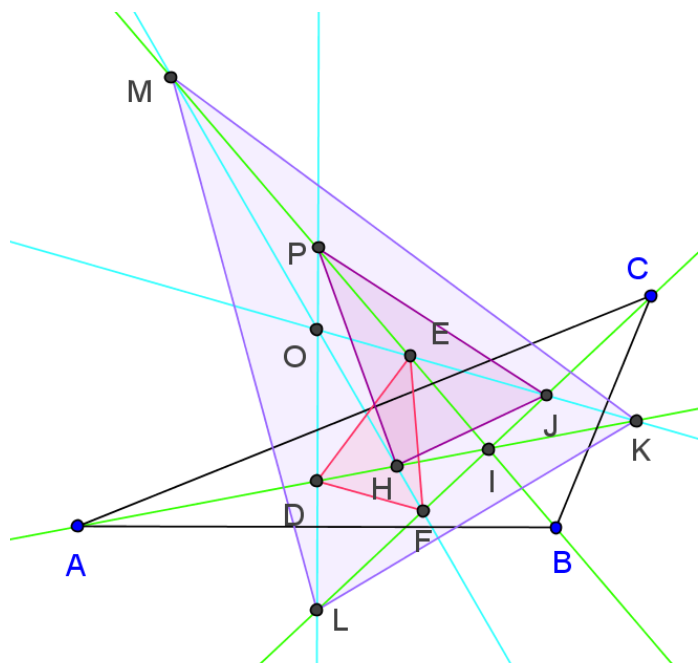
## Conjeturas en torno a triángulos determinados por mediatrices y bisectrices de un triángulo

ABC triángulo de circuncentro O e incentro I.

Se consideran los triángulos DEF, HPJ, KLM según el cuadro siguiente.

$\cap$	Mediatriz AB	Mediatriz BC	Mediatriz CA
Bisectriz A	D	K	H
Bisectriz B	P	E	L
Bisectriz C	M	J	F

Una figura correspondiente a dicha situación se presenta de la siguiente manera:



### 1

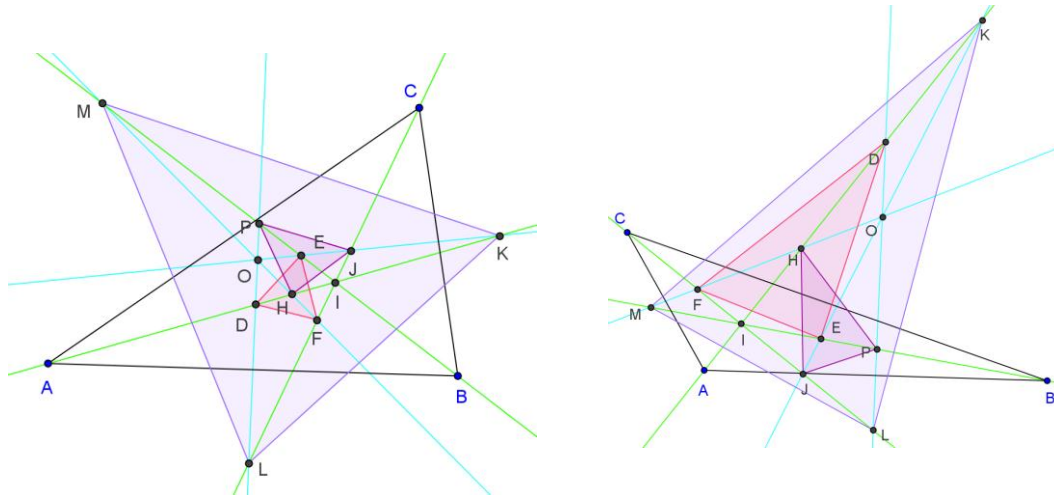
En una primera observación se puede apreciar cierta similitud entre los tres triángulos considerados. De dicha observación surge natural la pregunta en torno a si dichos triángulos serán semejantes.

Midiendo sus ángulos tenemos:

$$\begin{array}{lll}
 m\angle FDE = 78,70^\circ & m\angle PHJ = 78,70^\circ & m\angle MKL = 78,70^\circ \\
 m\angle DEF = 62,96^\circ & m\angle HJP = 62,96^\circ & m\angle KLM = 62,96^\circ \\
 m\angle EFD = 38,34^\circ & m\angle JPH = 38,34^\circ & m\angle LMK = 38,34^\circ
 \end{array}$$

## 2

Arrastrando la figura dinámica se observa que no es posible conseguir que los triángulos DEF, HJP y KLM (después de lo verificado empíricamente en 1, alcanza con observar uno solo de estos triángulos) sean rectángulos u obtusángulos.



## 3

Tanto a partir de 1, como de 2, podría surgir la pregunta acerca de si es posible vincular la medida de los ángulos de los triángulos DEF, HJP, KLM con la medida de los ángulos del triángulo ABC.

$$\begin{array}{lll} m\angle FDE = 79,28^\circ & m\angle PHJ = 79,28^\circ & m\angle MKL = 79,28^\circ \\ m\angle DEF = 72,28^\circ & m\angle HJP = 72,28^\circ & m\angle KLM = 72,28^\circ \\ m\angle EFD = 28,44^\circ & m\angle JPH = 28,44^\circ & m\angle LMK = 28,44^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} m\angle CAB = 21,44^\circ \\ m\angle ABC = 123,13^\circ \\ m\angle BCA = 35,43^\circ \end{array}$$

$$\frac{m\angle ABC + m\angle BCA}{2} = 79,28^\circ$$

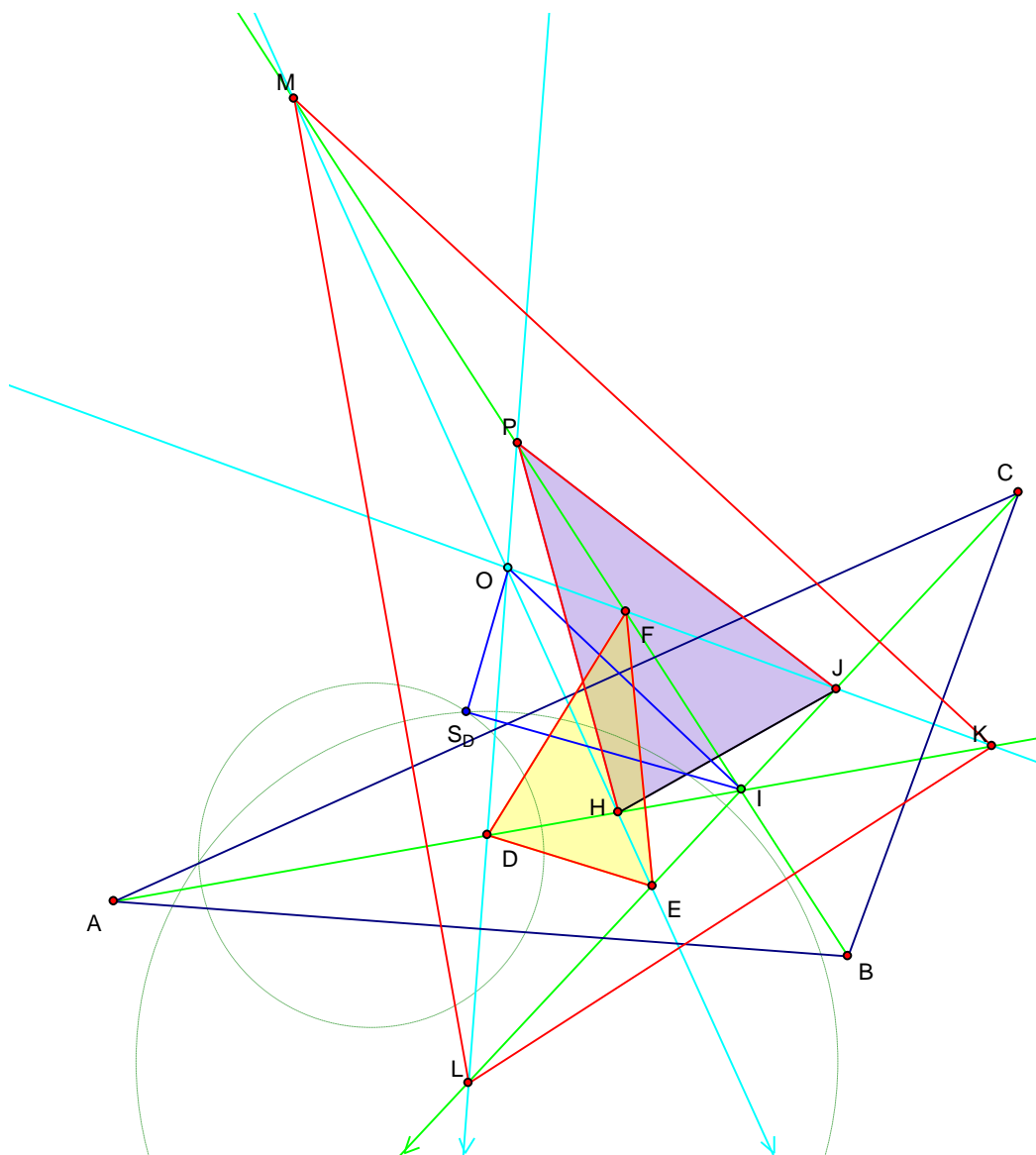
$$\frac{m\angle CAB + m\angle ABC}{2} = 72,28^\circ$$

$$\frac{m\angle BCA + m\angle CAB}{2} = 28,44^\circ$$

4

También a partir de lo observado en 1 podría surgir la pregunta sobre qué semejanzas hacen corresponder un triángulo en otro.

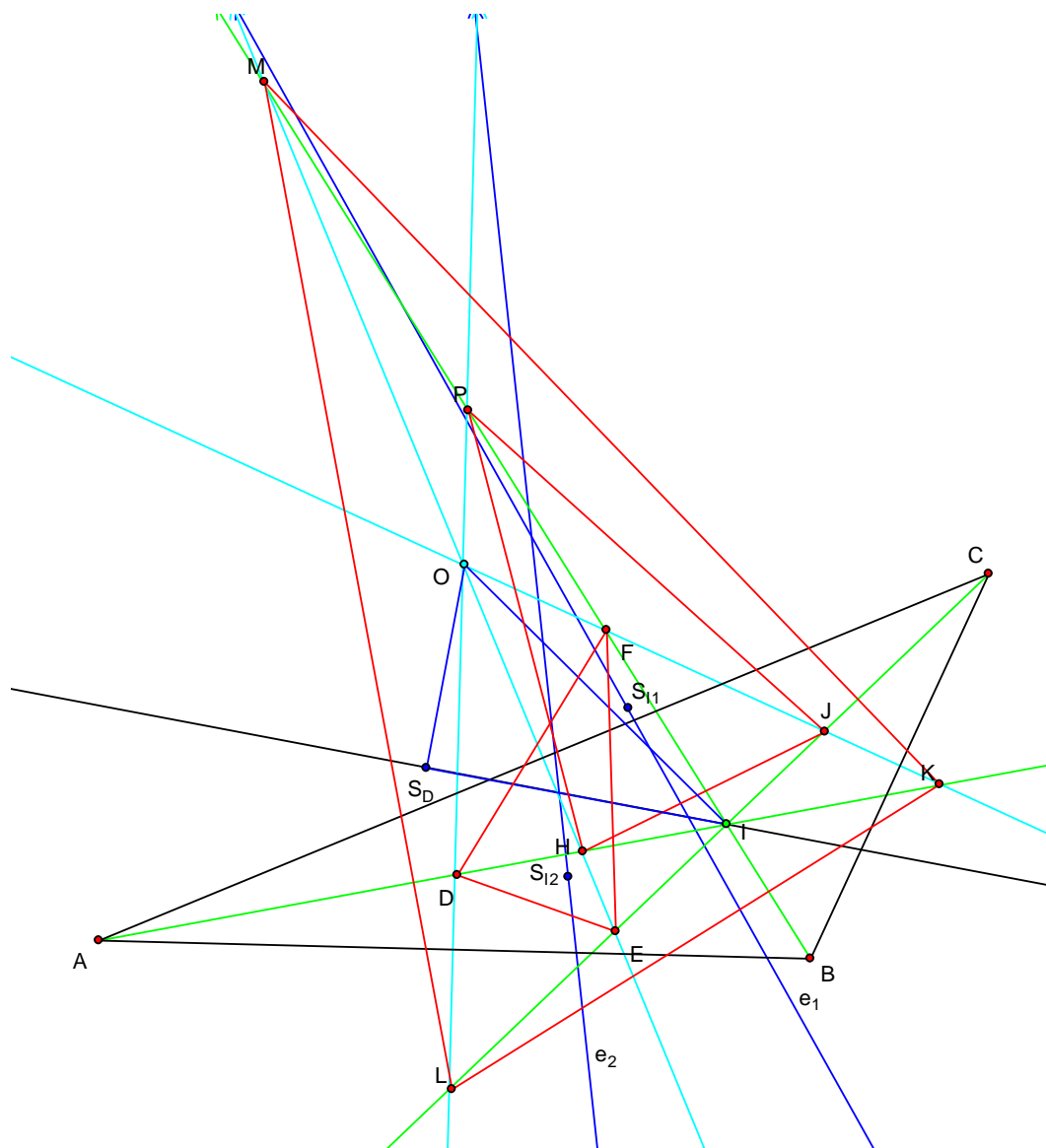
Veamos la semejanza que transforma DEF en HJP.



Es una semejanza directa de centro  $S_D$ , y donde el punto  $S_D$  cumple que  $OS_D I = 90^\circ$ .

5

HJP y KLM se corresponden en semejanza indirecta de centro  $S_{11}$  y eje  $e_1$ .  
 KLM y DEF se corresponden en semejanza indirecta de centro  $S_{12}$  y eje  $e_2$ .



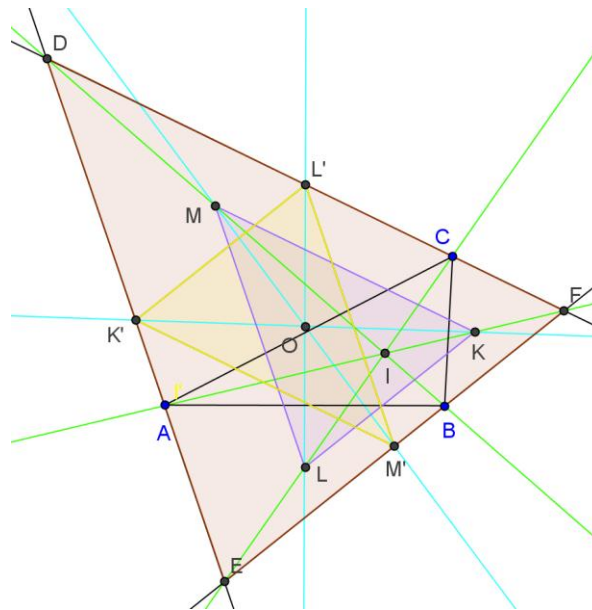
Se cumple que la recta  $S_D I$  es bisectriz del ángulo  $S_{11} S_D S_{12}$ .

6

Suponiendo una analogía entre el comportamiento de los triángulos determinados por mediatrices y bisectrices puede habilitar la intriga acerca del comportamiento de los triángulos determinados por mediatrices y bisectrices exteriores.

Se consideran los triángulos  $D'E'F'$ ,  $H'J'P'$ ,  $K'L'M'$  según el cuadro siguiente.

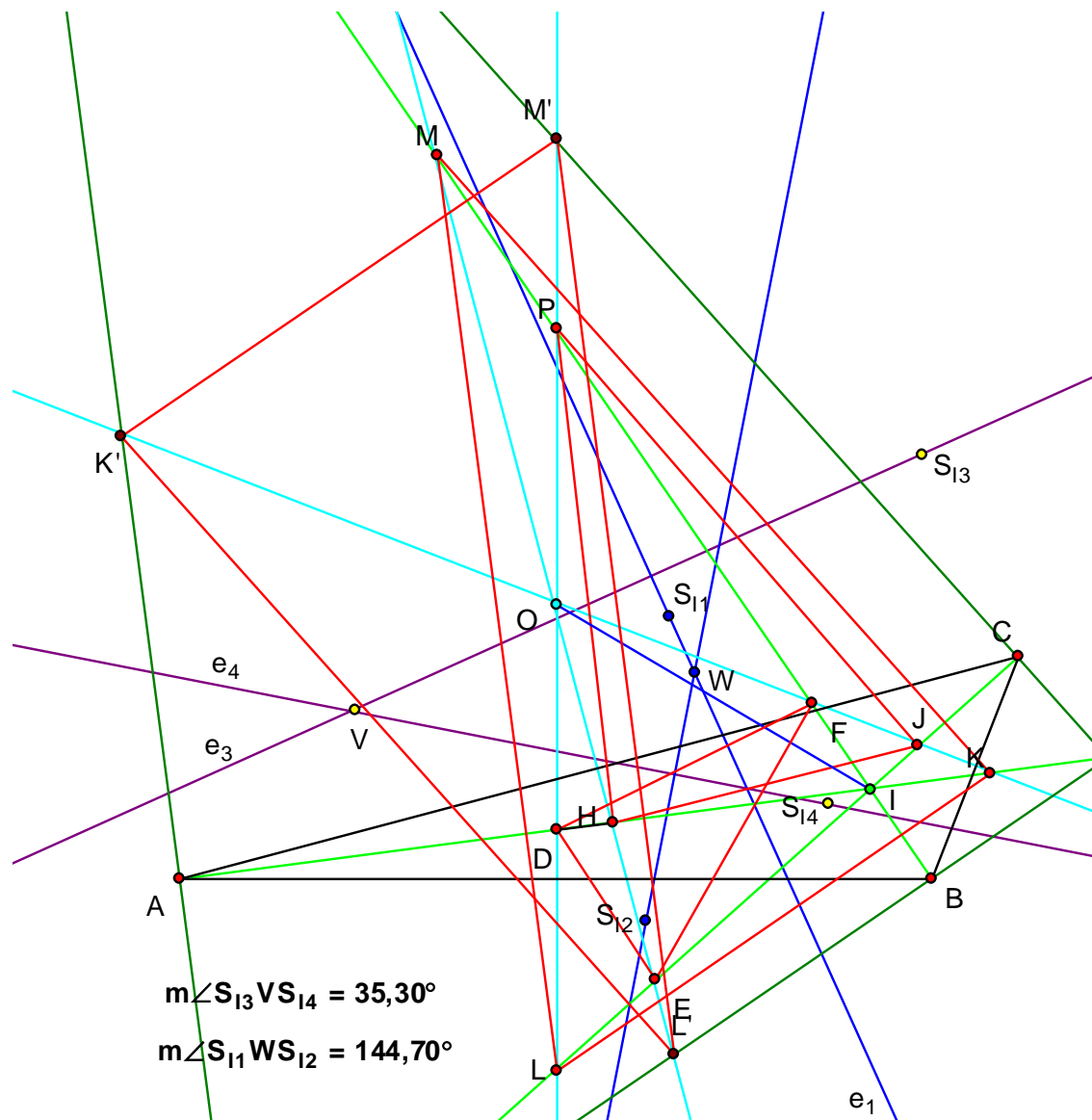
$\cap$	Mediatriz AB	Mediatriz BC	Mediatriz CA
Bisectriz ext A	D'	K'	H'
Bisectriz ext B	P'	E'	L'
Bisectriz ext C	M'	J'	F'



- Los triángulos  $K'M'L'$  y  $KLM$  se corresponden en simetría de centro el circuncentro  $O$  de  $ABC$ .
- Los triángulos  $DEF$  -determinado por las bisectrices exteriores- y  $KLM$  se corresponden en homotecia de centro el incentro  $I$  de  $ABC$  y razón 2.

7

Prestemos ahora atención a los triángulos  $K'M'L'$  y  $DEF$ , así como a  $K'M'L'$  y  $HJP$ .



Los triángulos  $K'M'L'$  y  $DEF$  se corresponden en semejanza indirecta de centro  $S_{14}$  y eje  $e_4$ ,

Los triángulos  $K'M'L'$  y  $HJP$  se corresponden en semejanza indirecta de centro  $S_{13}$  y eje  $e_3$ .

Se cumple además que el ángulo entre los ejes  $e_1e_2$  es igual al ángulo entre los ejes  $e_3e_4$ .

## Conjeturas en torno a triángulos determinados por mediatrices y alturas de un triángulo

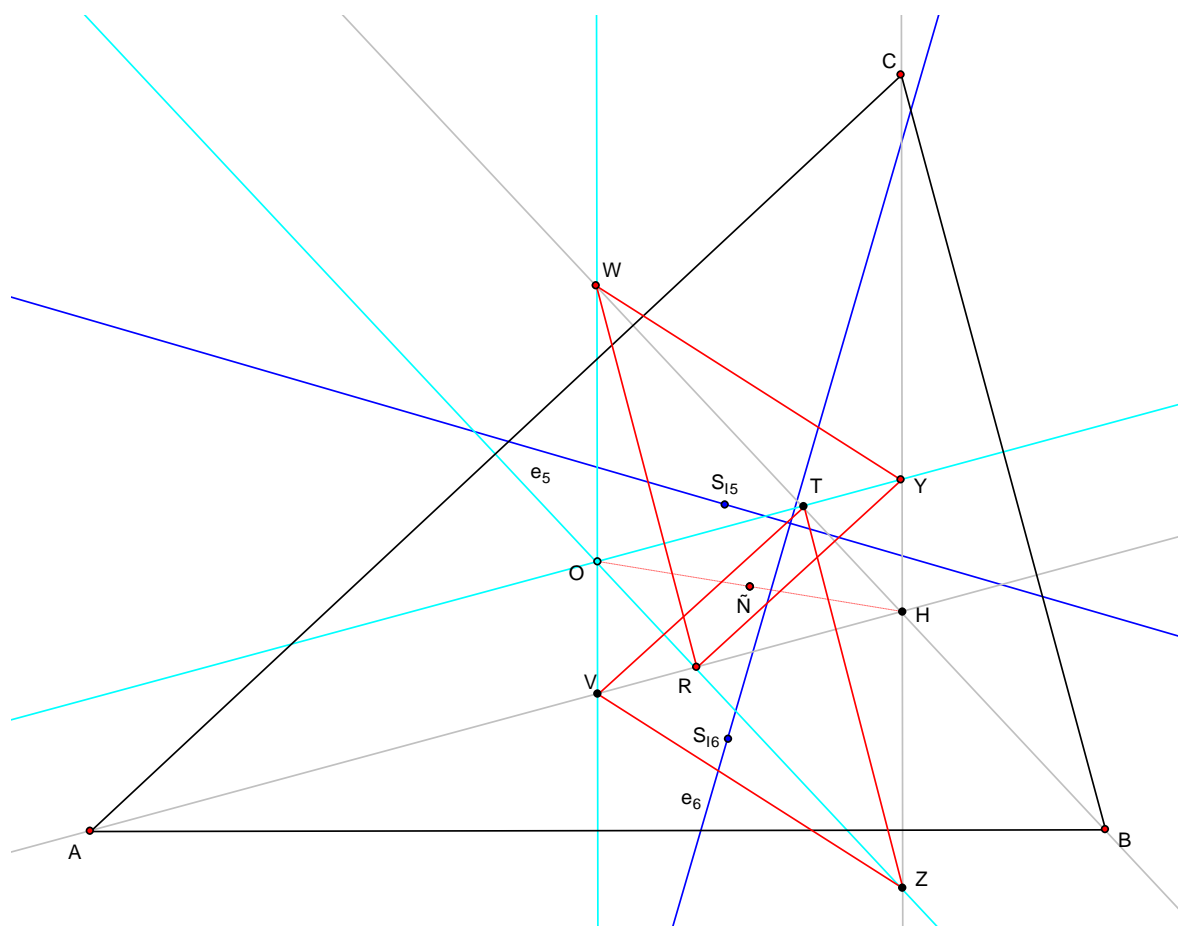
ABC triángulo de circuncentro O y ortocentro H.

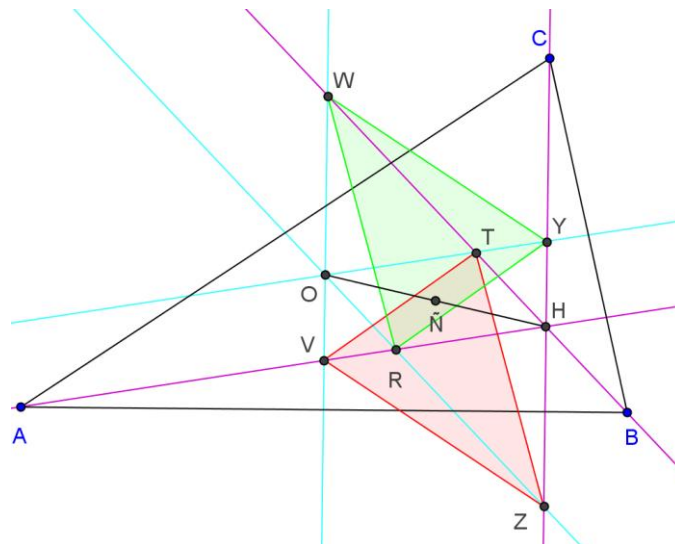
Se consideran los triángulos ZVT y WYR según el cuadro siguiente.

$\cap$	Mediatriz AB	Mediatriz BC	Mediatriz CA
Altura A	V	-	R
Altura B	W	T	-
Altura C	-	Y	Z

### 8

Si observamos los triángulos ABC, ZVT, WYR...





... vemos que  $ABC$ ,  $ZVT$ ,  $WYR$  son semejantes.

## 9

Los triángulos  $ZVT$  y  $WYR$  se corresponden en simetría central de centro  $\tilde{N}$ , punto medio de  $OH$ .

## 10

Los triángulos  $ABC$  y  $WYR$  se corresponden en semejanza indirecta de centro  $S_{15}$  y eje  $e_5$ ,  $ABC$  y  $ZVT$  se corresponden en semejanza indirecta de centro  $S_{16}$  y eje  $e_6$ .

¿Se cumple que los ejes  $e_5$  y  $e_6$  son perpendiculares?

### Aclaración

Las observaciones anteriores no las he visto en los libros de Geometría Euclidiana que tengo a disposición. Tampoco he recibido respuesta a consultas vía correo electrónico hechas a especialistas en Geometría Euclidiana acerca de si dichas observaciones son cosa ya sabida. Mientras tanto me entretengo buscando elaborar explicaciones deductivas para lo hallado. Agradezco a quien pueda ofrecer alguna pista sobre estas cuestiones vistas en algún libro o artículo. Y bienvenido quien quiera hacer correcciones, reformulaciones, agregar nuevas conjeturas, o pensar demostraciones para estas observaciones.

## Reflexión final

Según el diccionario de la RAE conjetura es “Juicio que se forma de las cosas o acaecimientos por indicios y observaciones”. En el caso de las conjeturas antes expuestas hay más que indicios sobre su veracidad dado que las mismas están basadas en observaciones hechas en base a una figura dinámica que habilita la consideración de infinitos casos. En las figuras dinámicas se hicieron mediciones (básicamente de ángulos) y se hicieron cálculos con dichas mediciones, también se hicieron construcciones y verificaciones en base a dichas mediciones. Con esto sostenemos que en el ámbito de la Geometría I estas conjeturas son teoremas, en el ámbito de la Geometría II estas conjeturas siguen siendo conjeturas ya que no tienen una demostración, una deducción de su validez a partir de afirmaciones más básicas.

Consideramos que a la hora de enseñar Geometría Euclidiana, ya sea en enseñanza primaria, media o terciaria, sería deseable incluir actividades donde la formulación de conjeturas esté presente. En algunos casos es factible que los estudiantes estén en condiciones de elaborar pruebas deductivas, en otro es posible que sin elaborar una prueba deductiva puedan validar empíricamente algunas propiedades mediante el uso de Geometría Dinámica. Sobre la demostración de estas propiedades se podrá volver o no en años siguientes, en ambos casos el trabajo ya hecho amplía el mundo geométrico de los estudiantes y contribuye a desarrollar la capacidad de hacerse preguntas geométricas, a desarrollar un ojo geométrico, a concebir la Geometría Euclidiana no como un territorio ya explorado y agotado, sino también como un mundo a construir.

## Referencias

- Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999a). Geométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*, 51, 5-21.
- Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999b). Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonsseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40 (3), 283-312.
- Houdement, C. y Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 2, 89-116.