O PAPEL DO CONTRA EXEMPLO NO ENSINO DO CÁLCULO: UMA DISCUSSÃO COM O USO DO *GEOGEBRA*

Francisco Regis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE

Modalidad: Comunicacion
Nivel educativo: Universitário
Palabras clave: Raciocínio dedutivo, Argumentação, Contraexemplo, Geogebra.

Resumo

O que distingue e diferencia uma dedução formal de uma argumentação? Como promover e proporcionar um cenário de aprendizagem que estimule o exercício da argumentação que, em tese, deve anteceder uma dedução formal, apoiada em inferências lógicas livres de contradição? Tencionamos, nesta comunicação, introduzir uma perspectiva (DUVAL, 1991) que nos possibilitará responder alguns destes questionamentos. Outrossim, evidenciaremos que a exploração didática (com apoio na tecnologia) do contraexemplo constitui uma via diferenciada e evita o ritual de ensino do Cálculo que torna indene a hegemonia de deduções formais e simples aplicação de regras algorítmicas de forma irrefletida. Deste modo, apresentamos situações de didáticas em que o software Geogebra proporciona a visualização e o entendimento do significado dos contraexemplos em Matemática.

Introdução

Quando nos debruçamos sobre as dimensões históricas do conhecimento matemático, conseguimos divisar a pertinência do entendimento, segundo o qual, os saberes científicos que conhecemos hodiernamente, possuem resquícios e origem a partir de crenças, opiniões, ideias locais e informais que, ao passar do tempo, sofreram formulações e se tornaram o objeto de reflexão e sistematização por parte do homem.

Assim, nesse trabalho, apresentamos situações que envolvem o potencial de uma mediação didática, apoiada no *software Geogebra*. As situações envolvem a discussão de contraexemplos matemáticos restritos ao campo do Cálculo Diferencial. Nelas, evidenciaremos que, de acordo com a abordagem, a argumentação, oriunda da visualização e percepção, adquire lugar de destaque. Outrossim, apesar de fundamentar no raciocínio dedutivo matemático, a dedução, que se estrutura a partir do estabelecimento de regras de inferências, permite, em muitos casos, fortalecer apenas o conteúdo operacional das inferências, em detrimento do seu conteúdo semântico.

Sobre a estrutura do raciocínio dedutivo

A compreensão da noção da demonstração, como um instrumento conceitual e epistemológico, em Matemática, representa o “fio de Ariadne” em Matemática. Nesse sentido, de acordo com o nível e os objetivos, sem um entendimento do seu papel e do seu poder na solidificação e construção do edifício matemático, registramos o possível comprometimento de uma aprendizagem posterior, de natureza conceitual. Outrossim, o uso da demonstração envolve, de modo intrínseco, a mobilização de um raciocínio lógico-formal, apoiado em inferências lógicas (do tipo "Se...então...") que evoluem, na medida em que, empregamos definições, propriedades e teoremas formais.

Neste sentido, Duval (1991, p. 233-234) acrescenta ainda que o raciocínio dedutivo apresenta "a particularidade de ser integrado a outras formas de raciocínio, por exemplo, o raciocínio por absurdo.". O autor indica uma condição importante para que o aluno adquira um entendimento da atividade de demonstração em Matemática, que constitui na compreensão do funcionamento do raciocínio por absurdo (*reductium ad absurdum*).

Ademais, Duval (1991, p. 234) sublinha a relevância da distinção entre um *raciocínio dedutivo* de uma *argumentação*. Na próxima seção nos deteremos na discussão envolvendo a importância do contraexemplo no contexto específico do Cálculo. Para tanto, optamos por demarcar, do ponto de vista cognitivo e, consequentemente, epistemológico, a estrutura e natureza do raciocínio matemático pertinente ao uso de contraexemplos na atividade matemática.

Sendo assim, cabe aqui a distinção, introduzida por Duval (1991, p. 234-235) de dois tipos de passagem: a primeira corresponde a um passo de raciocínio, enquanto que a segunda, consiste na transição de um passo do raciocínio para outro passo seguinte de outro raciocínio. O primeiro tipo é descrito pelo autor como uma *inferência* (*inférence*). No segundo caso, o autor emprega o termo em francês "enchaînement" que traduziremos como *sequência de raciocínio*.

Duval (1991, p. 235) explica que a passagem de inferência é condicionada por uma teoria local e possui uma organização ternária (fig. 1). A partir de sua descrição, distinguimos um *raciocínio dedutivo* de um *raciocínio argumentativo*. Neste ultimo, se evidencia o conteúdo semântico, em contraposição do *raciocínio dedutivo*, no qual, o estatuto operacional é colocado em destaque.

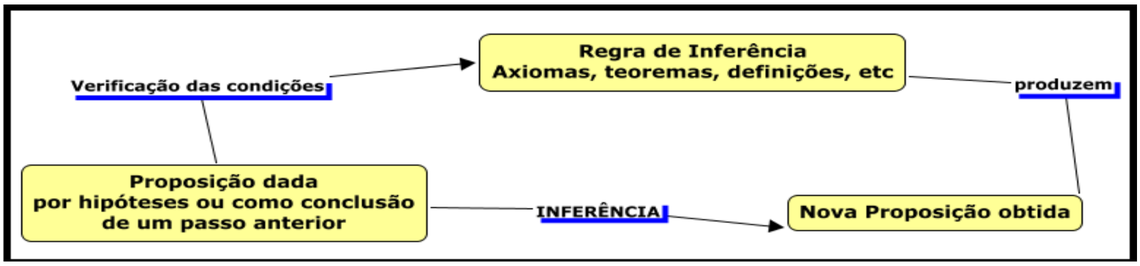

Figura 1: Duval (1991) descreve o funcionamento ternário de um passo de dedução.

Vale acentuar que um raciocínio "não se limita apenas a um único passo de inferência ou a uma única argumentação, mas, deve articular vários." (Idem, 1991, p. 239). Do ponto de vista da lógica proposicional, quando deparamos uma inferência do tipo $H_{hipotese} \to T_{tese}$, buscamos, com apoio na lógica dual aristotélica, a verificação de uma verdade (V) ou uma falsidade (F). No primeiro caso, a hipótese é suficiente para a T_{tese}.

Por outro lado, toda sentença proposicional carrega um conteúdo semântico que, segundo o solucionador do problema, pode assumir significados distintos e diversos (conforme o sistema de crenças do indivíduo). Mas, no caso em que a inferência $H_{hipotese} \to T_{tese}$ não for verdadeira, podem ocorrer os seguintes casos: (i) as hipóteses não são suficientes; (ii) as hipóteses não permitem o estabelecimento de uma inferência. Na próxima seção, discutiremos situações envolvendo apenas a condição (i).

Nesta condição, diante de hipóteses apenas necessárias, mas não suficientes, a tese pode ser verificada ou não. Em Matemática Pura, a prática usual exige o fornecimento de um contraexemplo. No caso em que temos hipótese suficiente, a tese sempre decorre. Por exemplo, toda função $y = f(x)$ diferenciável será, *a fortiori*, contínua. Esta sentença proposicional assume o valor lógico (V), como consequência da definição de diferenciabilidade. No próximo segmento, discutiremos alguns exemplos específicos.

Exploração de contraexemplos com o auxílio do *Geogebra*

Nessa seção, destacaremos algumas sentenças proposicionais *standard* no Cálculo e discutiremos, em cada caso, se o conhecimento envolvido nos conduz a um conhecimento válido ou, de fato, é uma falsidade. Nesse ultimo caso, o *software Geogebra* nos auxiliará no sentido da descrição geométrica de um contra-exemplo. Deste modo, a partir da visualização, o indivíduo pode desenvolver uma *argumentação* e, não apenas uma forma de raciocínio dedutivo que, como indicamos na seção anterior, acentua o caráter operacional, em detrimento do viés semântico de cada sentença.

Proposição 1: Se uma função $f:[a,b] \to IR$ é contínua em (a,b), então assume valores extremos em $[a,b]$.

Proposição 2: Se uma função $y = f(x)$ é definida em $[a,b]$ e vale $f(a)\cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Com relação a proposição 1, na figura 6, definimos a função $f(x) = \begin{cases} \tan x \text{ se } \mathrm{x} \in \left(-\pi/2, \pi/2,\right) \\ 0 \text{ se } \mathrm{x} = \pm\pi/2 \end{cases}$ (do lado esquerdo), enquanto na proposição 2, consideramos $g(x)=\begin{cases}1/x \text{ se x} \neq 0\\ 1 \text{ se x=0}\end{cases}$ (do lado direito). No caso de $f(x)$, contamos com sua continuidade em $(-\pi/2,\pi/2)$, todavia, nos extremos $[-\pi/2,\pi/2]$, com base no gráfico, vemos que não existem valores extremos assumidos. Enquanto que no caso da função $g(x)$, podemos avaliar que $g(-1)\cdot g(1)=-1<0$. Por outro lado, não ocorrem pontos $[-1,1]$, tais que $f(c)=0$. Donde, a proposição 2 admite contraexemplo.

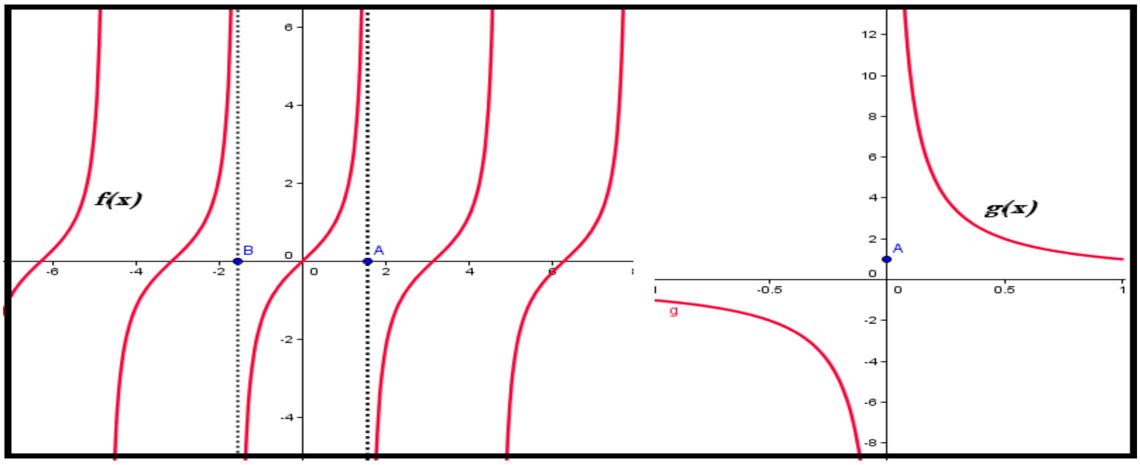

Figura 2: Situação de contraexemplo devido à ausência da continuidade das funções envolvidas

Proposição 3: Se uma função não linear, diferenciável e monótona em $(0,\infty)$, então sua derivada também será monótona em $(0,\infty)$.

Proposição 4: Se as funções $y=f(x)$ e $y=g(x)$ são diferenciáveis no intervalo (a,b) e se intersectam nele. Então, a função $\max\{f(x),g(x)\}$ não será diferenciável nos pontos em que ocorre $f(x)=g(x)$.

Na figura 2, divisamos o gráfico da função (não linear) $f(x)=x+sen(x)$, enquanto que $f'(x)=1+\cos(x)$. De imediato, depreendemos o caráter de não decrescimento da função $f(x)$ (fig. 2, lado esquerdo). Por outro lado, $f'(x)=1+\cos(x)$ não é nem crescente e nem decrescente. Segue que a proposição 3 não decorre. No caso da prop. 4, tomaremos $\max\{x^3,x^4\}$ são ambas funções diferenciáveis em $(-1,1)$ e a proposição 4 seria verdadeira apenas na condição em que $f'(a)\neq g'(a)$.

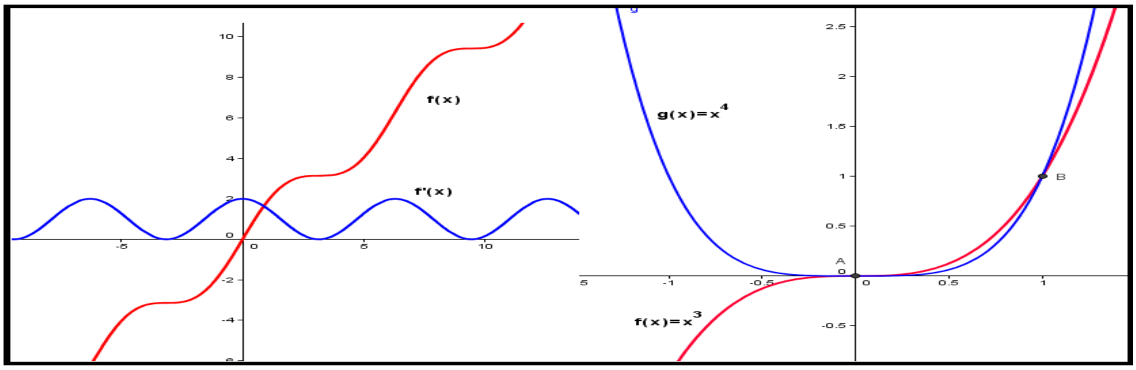

Figura 3: Situação de contraexemplo envolvendo a perda da monotonicidade

Proposição 5: Se uma função $y = g(x)$ não é diferenciavel num ponto $x = a$ e uma outra função $y = f(x)$ é não diferenciável em $g(a)$, então $F(x) = f(g(x))$ é não diferenciável em $x = a$. Neste caso, consideremos as funções $g(x) = 2/3x - 1/3|x|$ e $f(x) = 2x + |x|$, enquanto que $F(x) = f(g(x)) = 2\left(2x/3 - |x|/3\right) + |2x/3 - |x|/3|$. Nesta situação particular, vemos claramente que se tratam de duas funções não diferenciáveis na origem. Todavia, a figura 4, deve proporcionar uma argumentação que envolve o entendimento da composição das mesmas, produzindo uma função diferenciável, que constitui um contraexemplo para a proposição 5 que assume o valor lógico (F).

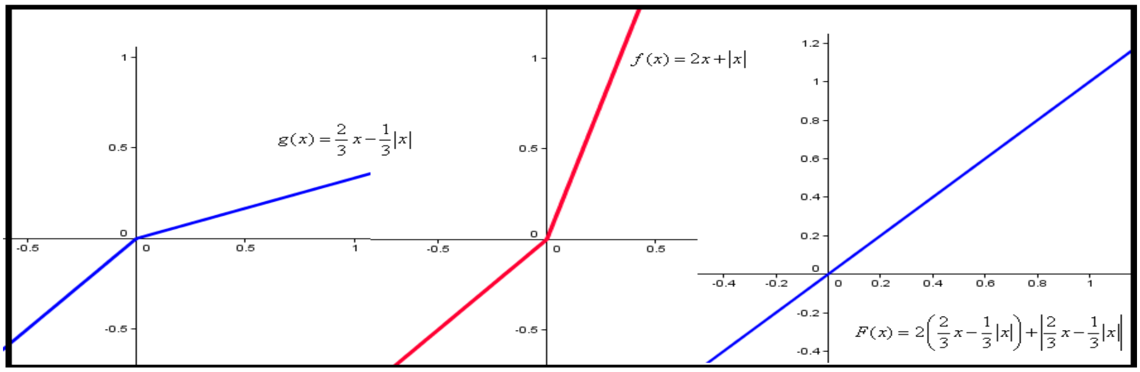

Figura 4: Situação de contraexemplo envolvendo a composição de funções

Proposição 6: Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ diferenciáveis em IR. Então vale $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Esta proposição caracteriza a condição da regra de L´Hospital. Neste sentido, Alves & Borges Neto (2012) discutem a descrição geométrica e a manifestação da noção de indeterminação (no quadro geométrico). Reparemos, pela figura 5 (gráfico azul), que o quociente $f(x)/g(x)$ tende para zero, na medida em que $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$. O mesmo comportamento, com arrimo na visualização, nos permite formular uma argumentação que proporciona a mesma ilação, ou seja, temos outra indeterminação na origem, com respeito agora ao comportamento de suas respectivas derivadas, todavia, devido à oscilação cte, o limite do quociente f'/g' não existe.

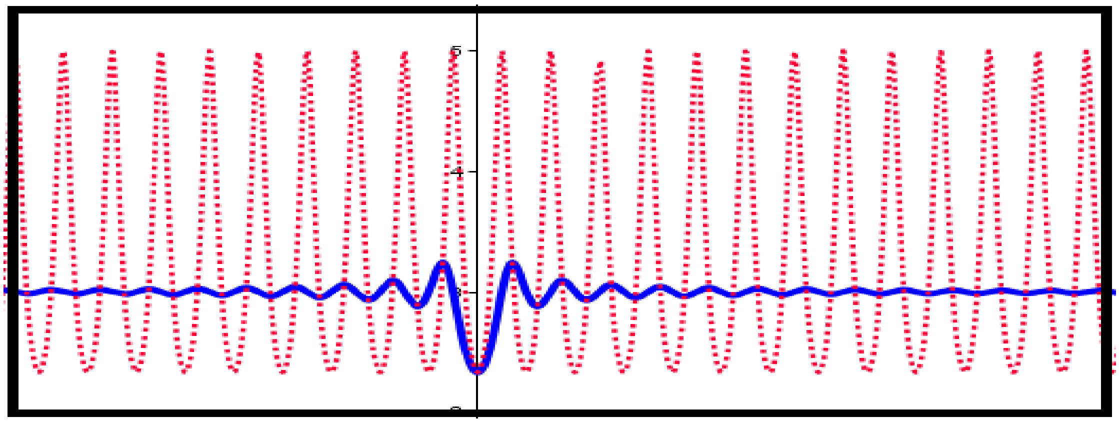

Figura 5: Situação de contraexemplo envolvendo a noção de existência de limite

Proposição 7: Se uma função $y = f(x)$ diferenciável em $(0,\infty)$ e se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, então também existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

Com respeito a esta proposição, consideremos a função $f(x) = sen(x^2)/x$ e $f'(x) = \dfrac{2x^2\cos(x^2) - sen(x^2)}{x^2}$. Reparemos pelo gráfico em vermelho, abaixo, (fig. 6), que $\lim\limits_{x\to+\infty} sen(x^2)/x = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} sen(x^2)/x = 0$, pois, visualizamos que as oscilações tendem, paulatinamente, e para valores grandes da variável, a oscilar cada vez menos até tender a zero. Por outro lado, no interesse do cálculo de $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2\cos(x^2) - sen(x^2)/x^2$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2\cos(x^2) - sen(x^2)/x^2$, depreendemos que, apesar de possui uma imagem limitada, para $x \in IR^+ \cup IR^-$, as oscilações no intervalo $[-2,2] \subset IR$ são sempre as mesmas. Deste modo, não existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, como vemos no gráfico abaixo em azul (fig. 6), pois a imagem da função $2x^2\cos(x^2) - sen(x^2)/x^2$ não tende apenas para um único valor.

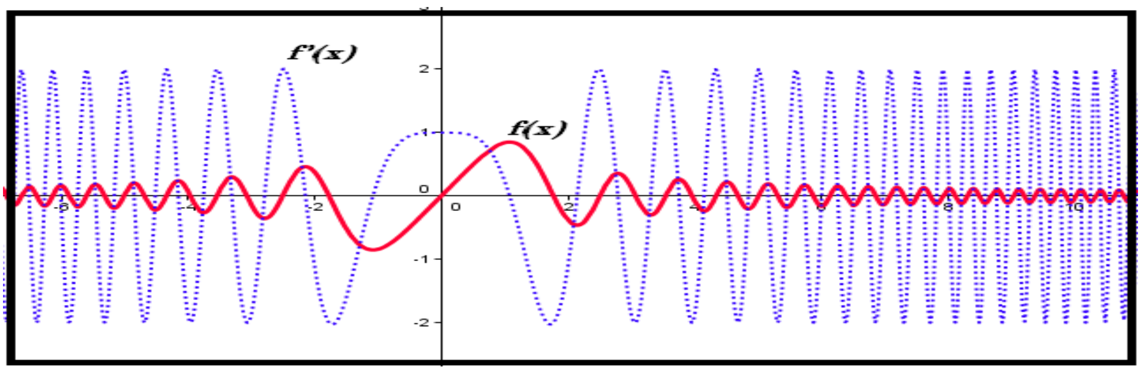

Figura 6: Situação de contraexemplo envolvendo a noção de existência de limite

Proposição 8: Se uma função $y = f(x)$ é diferenciavel e limitada em $(0,\infty)$ e existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, então existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Basta considerar $f(x)=\cos(\ln(x))$ que é diferenciável, pois se trata da composição de funções diferenciáveis (LIMA, 2010a), para $x \to +\infty$. Mas, assim, calculamos $f'(x) = -\dfrac{sen(\ln(x))}{x}$ e, consequentemente, com algumas propriedades em Análise Real, podemos inferir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, enquanto que não existe o limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\ln(x))$. Neste caso, de modo propositado, não fornecemos os elementos visuais pertinente ao comportamento do gráfico dessas funções. Merece destaque também que, sem o recurso computacional, a proposição 8 exige uma argumentação formal (isto é, uma dedução), para a verificação da validade de nossas ultimas afirmações. Por outro lado, discutiremos a próxima proposição com o auxílio computacional.

Proposição 9: Se uma função $y=f(x)$ em qualquer vizinhança de um ponto $x=a$ admite pontos em que não existe $f'(x)$, então não existe $f'(a)$.

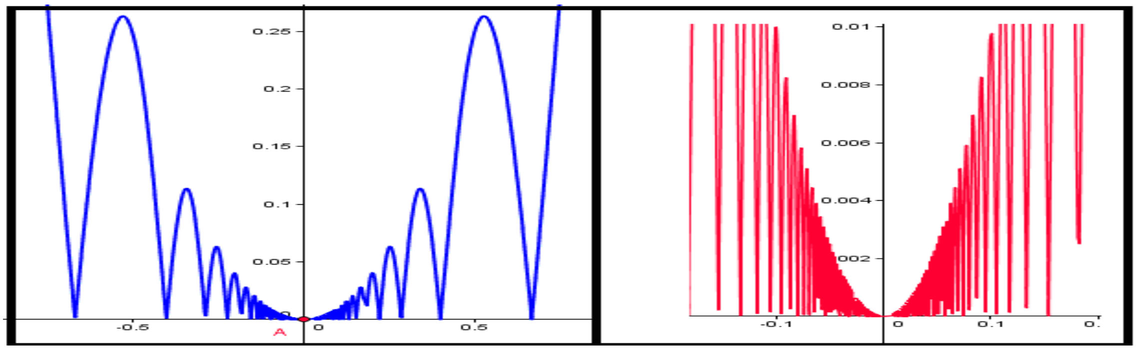

Figura 7: Situação de contraexemplo envolvendo a noção de existência de limite

Para descrever um contraexemplo conveniente, tomaremos a seguinte função $f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right| \text{ se } x\neq 0 \\ 0 \text{ se } x=0 \end{cases}$. Pelo gráfico (fig. 7, lado esquerdo) descrito pelo *Geogebra*, depreendemos que as oscilações se intensificam (fig. 7, lado direito), na medida em que $x \to 0^- \text{ e } x \to 0^+$, ou seja, existem pontos nas vizinhanças de $x=0$, onde não existe $f'(x)$, todavia, $\exists f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{\Delta x}\right)\right|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{\Delta x}\right)\right|=0$, pois, as oscilações tendem a zerar, para valores arbitrariamente próximos da origem.

Considerações finais

Reconhecidamente, um dos apanágios da tecnologia, diz respeito às possibilidades de explorar determinadas faculdades mentais esquecidas, quando restringimos nosso ensino apenas ao ambiente lápis/papel. Dentre as habilidades mentais recorrentemente requeridas em todas as figuras exibidas, colocamos ênfase na visualização e na percepção de propriedades matemáticas extraídas de cada gráfico produzido pelo *software Geogebra*, o que possibilita a produção de conjecturas.

Vale destacar que muitos dos gráficos (particulares) apresentados possuem dificuldades intrínsecas difíceis de serem superadas, até mesmo por matemáticos profissionais (LIMA, 2010b), apenas com o auxílio do lápis e do papel. Assim, as possibilidades do *Geogebra* se sobressaem, na medida em que, podemos explorar uma profusão de situações, a partir de alguns comandos básicos do programa. Por fim, na medida em que o professor conhece e distingue o *raciocínio dedutivo* do *raciocínio argumentativo* (DUVAL, 1991), alcança um patamar de mediação didática, na qual, a função do contraexemplo, absorve e promove uma diversidade de significados, apoiados, de modo inicial, na evolução de imagens mentais adequadas, por sua vez, condicionadas e elaboradas, de modo autônomo, pela idiossincrasia de seus aprendizes.

REFERÊNCIAS

Alves. F. R. Vieira & Borges Neto (2012). Uma sequência didática para explorar a regra de L´Hospital com o uso da tecnologia. In: Educação Matemática Pesquisa, v; 15, nº 2, 1-31. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/.

Duval. Raymond. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. In : *Educational Studies in Mathematics*. 22, p. 233-261.

Lima, E. L. (2010a). *Curso de Análise*. v. 1, Rio de Janeiro: Projeto Euclides.

Lima, E. L. (2010b). *Curso de Análise na Reta* (2011, 2 de fev.). Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=programa-de-verao-2011-analise-na-reta.

Acessado em: 10 de julho de 2012.

Klymchuk, Sergiv. (2007). Counter-examples in Calculus. New Zealand: Math Press.