RELACIONES ENTRE LA VARIACIÓN DE PARÁMETROS Y LOS EFECTOS GEOMÉTRICOS EN LA FUNCIÓN AFÍN: UNA PROPUESTA DE ANÁLISIS CON GEOGEBRA

Angela K. Cervantes M. – Nidia R. López A. – Rafael E. Luque A. - Juan L. Prieto G.
akcervantesm@gmail.com – nidialopez80@hotmail.com – luque14@gmail.com – juanl.prietog@gmail.com
Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

Modalidad: CB.
Nivel Educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Parámetro, función afín, recta, GeoGebra.

Resumen

En la actualidad, el tema de la integración eficiente de las tecnologías en la enseñanza de la matemática es un tema controvertido dada las dificultades que encuentran los profesores para establecer relaciones entre el contenido matemático y las posibilidades que ofrecen los programas informáticos. Al respecto, consideramos que una forma de favorecer tales relaciones es mediante la participación del profesorado en experiencias de formación que ayuden a mejorar la comprensión de los objetos matemáticos que se enseñan, apoyados en recursos tecnológicos como el GeoGebra. En tal sentido, este trabajo presenta una secuencia para analizar los efectos geométricos provocados por la variación de los parámetros de la función $f(x) = ax + b$. *Los efectos de cambio de dirección y traslación que experimentan la familia de rectas correspondientes a la expresión antes indicada, son visualizados y explorados mediante la herramienta "Deslizador" del GeoGebra. La secuencia consta de tres pasos referidos a los valores posibles de los parámetros* a *y* b. *Consideramos que este tipo de secuencias brinda al profesor la oportunidad de potenciar su pensamiento matemático, tener un mejor dominio de los contenidos que enseña y contribuir con su práctica en la mejora de la calidad de la matemática escolar.*

INTRODUCCIÓN

Por muchos años la enseñanza de las funciones reales de variable real (afín, cuadrática, etc.) en el nivel de Educación Media se ha caracterizado por el desarrollo de métodos centrados mayormente en la memorización y aplicación directa de fórmulas y procedimientos de la resolución de ejercicios típicos. Como consecuencia, muchas veces los alumnos no logran "comprender" las características esenciales y el comportamiento de determinadas funciones a partir de su forma simbólica (Darmawan & Iwan, 2011). La situación tiende a agravarse ante la presencia de profesores de Matemática con dificultades para interpretar adecuadamente el comportamiento de una función afín determinada desde el punto de vista de su gráfica. Este hecho refleja la necesidad de promover experiencias formativas donde los profesores de Matemática tengan la oportunidad de mejorar su capacidad, para comprender los efectos geométricos asociados a la variación de los parámetros de la expresión que define una función.

Algunas investigaciones han mostrado lo provechoso de utilizar recursos tecnológicos, como el GeoGebra, para la aprehensión de tales efectos. Al respecto, Bayazit y Aksoy (2010) señalan que el GeoGebra es una herramienta de enseñanza potente que permite integrar el uso de las expresiones algebraicas y sus representaciones gráficas y, por lo tanto, si esta es integrada a la práctica del profesor los estudiantes tendrán una oportunidad de comprender el significado subyacente de las normas, los procedimientos y el hecho, conocimientos asociados a las nociones de ecuaciones y funciones. En este trabajo se plantea una secuencia para el análisis de la relación existente entre la variación de los parámetros de la función afín y los efectos geométricos que esta acción produce en la gráfica, haciendo uso del GeoGebra, con el objetivo de proporcionar a los profesores un instrumento para la apropiación, comprensión y enseñanza de estos contenidos.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS DEL DISEÑO

La secuencia aquí descrita se ha diseñado a partir de las siguientes consideraciones: (i) la variación de los parámetros en la expresión general $f(x) = ax + b$ produce efectos geométricos "globales" sobre la representación gráfica de la función afín correspondiente y, a su vez, (ii) estos efectos experimentados por la gráfica (la recta) pueden ser analizados mediante el uso del GeoGebra. Los efectos que se analizan son de dos tipos: *cambio de pendiente y traslación*, los cuales se caracterizan por las diferencias percibidas en cuanto al ángulo de inclinación y/o la posición relativa que tiene una recta con respeto a aquella correspondiente a la función identidad, cuya expresión es $f(x) = x$ y que actúa como referente. Dado que la variación de cada parámetro de $f(x) = ax + b$ produce un efecto único sobre la recta, se realiza el análisis de ambos efectos por separado, procurando con ello una mejor comprensión del tópico.

La utilización del GeoGebra para el análisis consiste básicamente en crear y usar dos deslizadores asociados unívocamente a los parámetros de la expresión $f(x) = ax + b$, cuyos valores se ajustan convenientemente, para cada intervalo [mínimo, máximo] establecido a lo largo de la secuencia. De esta manera, el uso de un deslizador, esto es, el ajuste del parámetro correspondiente dentro del intervalo conlleva a que se puedan apreciar las características de determinado efecto sobre la recta. Además, en el caso de cambio de pendiente, es necesario construir el ángulo formado entre el eje x y la recta correspondiente a $f(x) = ax + b$ para visualizar el cambio de dirección experimentado por estas rectas.

DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA

A continuación, se describe la secuencia de análisis organizada en dos apartados que responden a los efectos mencionados:

Cambio de pendiente

La variación del parámetro a de la función afín produce un efecto sobre la recta canónica llamado *cambio de pendiente*. Este efecto se relaciona con los cambios de inclinación que experimenta una recta con respecto al eje de las abscisas. En el análisis se toma como referente la inclinación de la recta correspondiente a la función identidad $f(x) = x$, la cual forma un ángulo de 45º con el *eje x* (medido desde el eje hasta la recta, en sentido contrario a las agujas del reloj). En este sentido consideramos que cualquier recta con un *ángulo de inclinación* diferente es una consecuencia de la variación del parámetro $a$para un valor distinto de 1. Para dotar de sentido a este efecto utilizando el GeoGebra, es conveniente realizar el análisis en dos momentos:

Cuando b=0: Análisis del cambio de pendiente en la función lineal

Cuando el valor del parámetro b es igual a 0, la forma general de la función afín se reduce a $f(x) = ax$, la cual es representativa de una familia muy particular de estas funciones, denominada "función lineal". La característica más resaltante de toda función lineal es que su gráfica "pasa" por el origen del sistema de coordenadas. Dado que el parámetro a puede tomar cualquier valor real, es conveniente orientar el análisis del cambio de pendiente para ciertos valores de este, los cuales serán considerados en el análisis como "singulares". Por ejemplo, $a = 1$ se considera un valor singular debido a que la recta definida por $f(x) = x$ corresponde a la función identidad y, al ser esta considerada como referente del cambio, no es posible que se perciba algún efecto geométrico.

Otro valor que consideramos singular es cuando $a = 0$, donde la recta correspondiente adquiere una dirección particular: *horizontal* (su ángulo de inclinación es 0º o 180º). Estos dos valores nos permiten dividir el estudio del cambio de pendiente en los siguientes tres casos:

a) Caso 1. Cuando a varía en $[1, +\infty)$

Para saber lo que ocurre a la recta referente cuando a varía en $[1, +\infty)$ utilizando GeoGebra, se debe ajustar el intervalo del deslizador convenientemente, por ejemplo, con valores para el mínimo de 1 y máximo de 20, 60 y 100, respectivamente, con el propósito de relacionar el *cambio de pendiente* con los elementos de la gráfica (la recta referente y el *eje y*). Luego de activar la opción "Animación Automática" al deslizador, y observar lo que sucede en cada intervalo es posible concluir lo siguiente: (i) a medida que a se acerca a un valor máximo cada vez mayor, el ángulo de inclinación observado tiende a ser 90º y, en consecuencia, la recta se acerca más al eje de las ordenadas, y (ii) para cualquier valor de a en el intervalo se observa la familia de rectas cuyos ángulos de inclinación están entre $45° y\ 90°$ (ver Figura 1a).

b) Caso 2: Cuando a varía entre [0, 1]

Para visualizar lo que le ocurre a la recta referente en este caso, debemos ajustar el intervalo del deslizador, para un mínimo y máximo de 0 y 1 respectivamente. Dada la proximidad entre los extremos, es conveniente utilizar un incremento de 0.1 ya que esto permite apreciar una mayor cantidad de rectas en el intervalo. Luego de esto, el uso de la "Animación Automática" permite observar el cambio de pendiente y concluir lo siguiente: (i) a medida que a se acerca al valor mínimo del intervalo, el ángulo de inclinación de la recta disminuye hasta llegar a ser $0°$ y, en consecuencia $f(x) = 0$ determina una recta horizontal que coincide con el eje de las abscisas, y (ii) la variación de a en el intervalo permite apreciar la familia de rectas cuyos ángulos de inclinación están entre $0°\ y\ 45°$, ambos inclusive (ver Figura 1b).

c) Caso 3: Cuando a varía en $(-\infty, 0]$

Para analizar el efecto cambio de pendiente cuando a varía en $(-\infty, 0]$, procedemos de forma análoga al caso 1, es decir, ajustando el intervalo del deslizador para distintos valores del mínimo, por ejemplo para -100, -60 y -20, con un máximo de 0. Tras activar la "Animación Automática" del deslizador, podemos observar que en los tres intervalos se concluye que: (i) a medida que a se acerca a un mínimo cada vez menor, el ángulo de inclinación observado tiende a ser 90º y, en consecuencia, la recta correspondiente se acerca más al eje de las ordenadas, (ii) a medida que a se acerca al valor máximo, el ángulo de inclinación de la recta aumenta hasta llegar a ser 180º,de tal modo que ésta es horizontal, y coincidente con el eje de las abscisas,

(iii) Cuando a toma el valor de -1, la recta $f(x) = ax$ es perpendicular a la canónica, por tanto el ángulo de inclinación es de $45° + 90° = 135°$ y, (iv) la variación de a en el intervalo permite apreciar la familia de rectas cuyos ángulos de inclinación están entre $90° y\ 180°$ (ver Figura 1c).

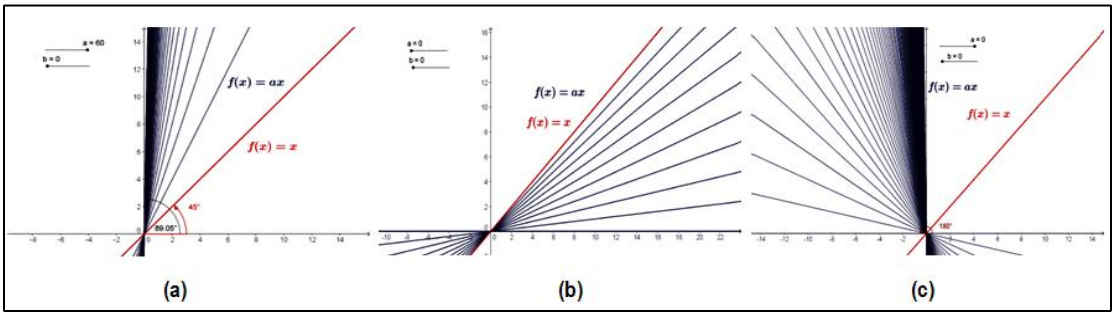

Figura 1. Cambios de pendiente producidos por la variación del parámetro a

Cuando b ≠0: Análisis del cambio de pendiente de la gráfica de $f(x) = ax + b$

En este caso, el cambio de pendiente experimentado por la familia de rectas que comparten un mismo valor de *b* (no nulo) tiene las mismas características del caso anterior, con la diferencia puesta en el punto de corte con el *eje y*. En este caso, las rectas de la familia cortan al eje de las ordenadas en un punto distinto al origen del sistema. Este corte define un efecto distinto al *cambio de pendiente* que es analizado en el apartado siguiente. Por ejemplo, si nos referimos a las rectas definidas por la expresión $f(x) = ax + \frac{3}{2}$, donde el intervalo del parámetro a se ajusta con valores para el mínimo de 1 y máximo de 60 y *b* toma el valor fijo de $\frac{3}{2}$, el efecto de cambio de pendiente, esto es, la variación en el ángulo de inclinación de cada recta de la familia con respecto al *eje x*, puede ser observado claramente con sólo dibujar la recta paralela al *eje x* que pasa por el punto de corte de $f(x) = ax + \frac{3}{2}$ con el *eje y* (ver Figura 2). Como puede verse, esta recta está determinada por la ecuación $y = \frac{3}{2}$.

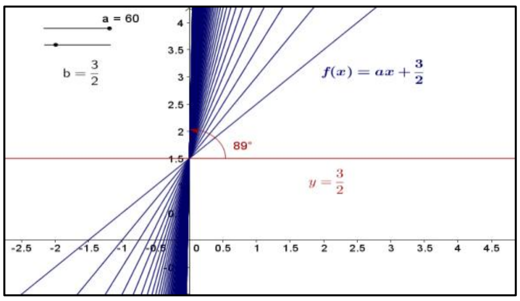

Figura 2. Cambios de pendientes en la familia de rectas definidas por $f(x) = ax + \frac{3}{2}$

Traslación

El efecto sobre la recta canónica que produce la variación del parámetro b de la función afín es llamado *traslación*. Este efecto se relaciona con los cambios de posición que experimenta una familia de rectas con respecto a la posición que ocupa el referente. El desplazamiento observado por las rectas asociadas a $f(x) = ax + b$ tras la variación de b se da en la dirección "vertical" y en dos sentidos según la posición ocupada por la recta canónica: *hacia arriba o hacia abajo de esta*. Para visualizar este efecto con GeoGebra basta con ajustar el deslizador de b en un intervalo [mínimo, máximo] conveniente, y realizar el análisis para una familia de rectas determinadas, por ejemplo, la correspondiente a la expresión $f(x) = 3x + b$, dónde $f(x) = 3x$ actúa como referente del efecto. Procurando una mejor visualización de este efecto, el ajuste del deslizador asociado al parámetro b se hace en tres momentos, considerando al 0 como un valor crítico pues el parámetro no lo toma.

Caso 1: Cuando b varía en (0,∞)

La variación de b en este intervalo muestra la familia de rectas de $f(x) = 3x + b$ que se han trasladado "hacia arriba" de la recta referente. Este efecto se observa con cualquier par de valores positivos para el mínimo y máximo del intervalo, por ejemplo 1 y 20, respectivamente. Luego de activar la "Animación Automática" se puede ver que, tras la variación del parámetro b, el valor que éste toma coincide con el valor de la ordenada del punto *(0, b)* que corta al *eje y* (ver Figura 2a).

Caso 2: Cuando b varía en (−∞,0)

Al igual que el caso anterior, la variación de b en un intervalo con valores mínimo y máximo negativo (p.e., -20 y -1, respectivamente) muestra una familia de rectas que se han trasladado "hacia abajo" de la recta referente. Además, se observa que el valor del parámetro *b* coincide con la ordenada de *(0, b)*, punto que corta al *eje y* (ver Figura 2b).

Caso 3: Cuando b varía en (−∞,∞)

En este caso es posible observar ambas familias de rectas, las desplazadas hacia arriba y hacia abajo de $f(x) = 3x$ (la referente). Para ello basta con ajustar el intervalo [mínimo, máximo] del deslizador de *b* con valores de signos distintos, por ejemplo, de -10 y 10, y activar la "Animación Automática" (ver Figura 1c). Para una mejor comprensión de este efecto, resulta más conveniente el análisis como se muestra en este caso ya que: (i) en cualquier sentido de la traslación, hacia arriba o hacia abajo, las rectas que se desplazan en el intervalo tienen la misma pendiente debido a que a tiene un valor fijo y, (ii) el valor que toma el parámetro b al manipular el deslizador siempre se corresponde con el valor de la ordenada del punto de corte con el *eje y*, lo que otorga un sentido a la idea de ordenada en el origen.

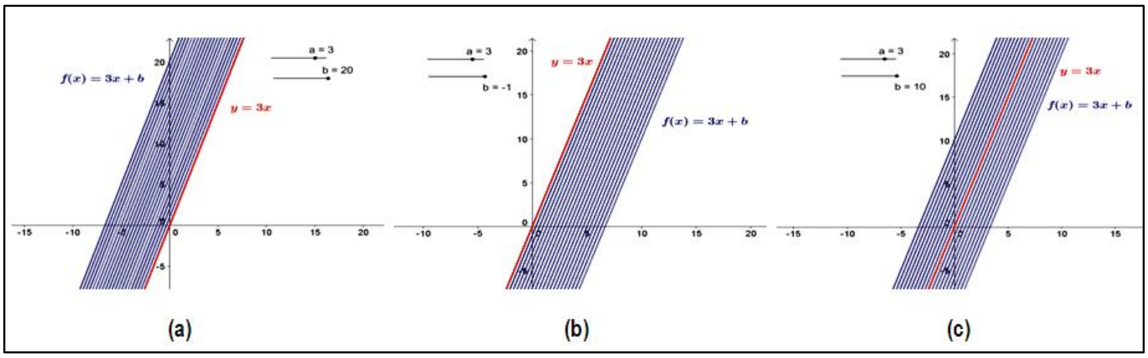

Figura 3. Traslaciones producidas por la variación del parámetro b.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Esta secuencia constituye una manera de dotar de sentido a los efectos geométricos asociados a la variación de los parámetros de la función $f(x) = ax + b$, con el doble propósito para la formación de profesores de Matemática de: (i) ampliar la compresión del tópico que subyace y (ii) favorecer los procesos de integración eficiente de recursos tecnológicos en la práctica de enseñanza de la matemática. En cuanto a los recursos, Hohenwarter (2006) señala que actualmente es posible tratar con funciones matemáticas mediante el uso de los conocidos programas de geometría dinámica y, al respecto, el autor asegura que el GeoGebra ofrece varias ventajas educativas en comparación con los demás programas de este tipo y con los métodos tradicionales de enseñanza. Además, debido a que las gráficas son muy posiblemente la forma de representación más significativa de las funciones en el ámbito escolar (Basurto y Gallardo, 2011), la propuesta aquí descrita permite desarrollar habilidades para anticipar el comportamiento de una recta dada la forma de su expresión simbólica, cuestión que puede convertirse en objeto de enseñanza y que es de gran valor para la población de estudiantes de Educación Media, impactando así en los métodos de enseñanza, especialmente en el diseño de secuencias didácticas y de tareas matemáticas para estos alumnos.

Bibliografía

- Basurto, E. y Gallardo, A. (2011). El estudio de los parámetros por medio de tecnologías hibridas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, 287-296. Ciudad Real: SEIEM.

- Bayazit, I y Aksoy, Y. (2010).Connecting Representations and Mathematical Ideas with GeoGebra.*Geogebra International Journal of Romania*, 1 (1), 93-106.

- Darmawan, D. y Iwan, P. (2011). On the teaching of analyzing the effects of parameter changes on the graph of function. Trabajo presentado en la *Fourth National Conference on Mathematics Education*, Julio, Yogyakarta.

- Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using GeoGebra. Trabajo presentado en el *Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*, Julio, Dresden.

- Losada, R. (2007). GeoGebra: La eficiencia de la intuición. *La Gaceta de la RSME*, 10 (1), 223-239.