SUBGRUPOS DISCRETOS DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO

María Teresita Carrión Rebellato
pitacar@gmail.com
Consejo de Formación en Educación - Uruguay

Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Isometrías del plano, generadores del subgrupo, embaldosado, región fundamental.

Resumen

Este trabajo está constituido por animaciones realizadas con GeoGebra que permiten visualizar teselaciones del plano a partir de una figura inicial a la que se le aplica, en forma periódica y reiterada, dos o tres isometrías, que serían los generadores de uno de los subgrupos discretos de las isometrías del plano.

Al finalizar cada animación, se podrá apreciar una teselación que contiene todas las isometrías que pertenecen a ese grupo ornamental.

Entre ellos hay algunos inspirados en la obra del artista holandés M. C. Escher.

Algunas de estas animaciones se usaron como recurso auxiliar en el curso: "Grupos Ornamentales. Subgrupos discretos de las simetrías del plano" de los doctores Andrés Abella y Ángel Pereyra en el Tercer Coloquio Uruguayo de Matemática, desarrollado entre el 20 y el 22 de diciembre de 2011 en Montevideo.

Introducción

Un subgrupo discreto de isometrías del plano es un grupo de éstas que no contiene traslaciones de vectores arbitrariamente pequeños ni rotaciones de ángulos arbitrariamente pequeños. Dicho de otro modo, G es un subgrupo discreto de las isometrías del plano, si existen dos números reales positivos h y k tales que los módulos de los vectores de todas las traslaciones de G sean mayores o iguales que h y los ángulos de todas las rotaciones de G, tomados entre 0 y 2π, sean mayores o iguales que k.

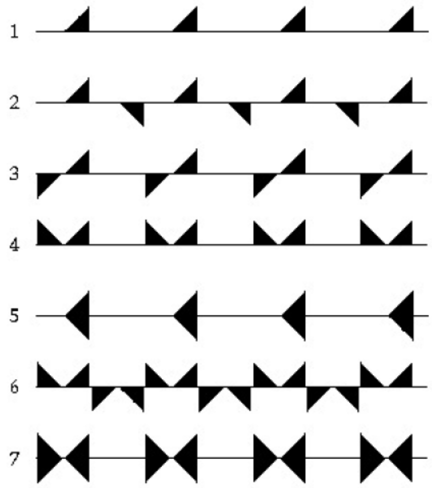
Si G no contiene traslaciones, es un grupo de Leonardo. En este caso, G solo puede contener rotaciones con centro en el mismo punto y/o simetrías axiales con ejes que pasen por ese punto, que será el punto fijo de todas las isometrías del grupo.

Si G contiene traslaciones en una sola dirección, es un grupo de friso, que además de las traslaciones, G puede contener simetrías centrales, simetrías axiales de eje paralelo o perpendicular a la dirección del friso y antitraslaciones con eje paralelo a la dirección del friso.

En otro caso, G será un grupo de embaldosado del cual hablaremos más adelante.

A continuación, podemos apreciar ejemplos de estos grupos:

Grupo de Leonardo



Los 7 grupos de friso

Lo interesante de estos grupos es que pueden ser generados por una, dos o hasta cuatro isometrías como máximo. Ser generado por n isometrías significa que está constituido por ellas, sus inversas y toda isometría que resulte de la composición de dos o más de ellas.

Se llama región fundamental, a un conjunto de puntos tal que él y sus imágenes en todas las isometrías del subgrupo, constituyen una partición del plano. Con esto se logra, partir el plano en regiones congruentes (iguales) a la que se le llama embaldosado, mosaico o teselación.

Grupos de embaldosado

Existen 17 grupos de embaldosado, resultado obtenido por Fedorov y Schoenfliess en 1890. Estos se pueden agrupar en cinco categorías, según las rotaciones que contienen:

- Grupos sin rotaciones:
    1) p1: generado por dos traslaciones de vectores linealmente independientes.
    2) cm: generado por una simetría axial y una antitraslación con ejes perpendiculares.
    3) pg: generado por dos antitraslaciones con ejes paralelos.
    4) pm: generado por dos simetrías axiales y una traslación.
- Grupos con rotaciones de ángulo π (simetrías centrales):

5) p2: generado por tres simetrías centrales.
6) cmm: generado por dos simetrías axiales de ejes perpendiculares y una simetría central.
7) pmm: generado por cuatro simetrías axiales con ejes en los lados de un rectángulo.
8) pmg: generado por una simetría axial y dos simetrías centrales.
9) pgg: generado por dos antitraslaciones de ejes perpendiculares.

- Grupos con rotaciones de ángulo $2\pi/3$:

10) p3: generado por dos rotaciones de ángulo $2\pi/3$.
11) p31m: generado por una simetría axial y una rotación de ángulo $2\pi/3$.
12) p3m1: generado por tres simetrías axiales en los lados de un triángulo equilátero.

- Grupo con rotaciones de ángulo $\pi/2$:

13) p4: generado por una simetría central y una rotación de ángulo $\pi/2$.
14) p4m: generado por tres simetrías axiales en los lados de un triángulo rectángulo isósceles.
15) p4g: generado por una simetría axial y una rotación de ángulo $\pi/2$.

- Grupo con rotaciones de ángulo $\pi/3$:

16) p6: generado por una simetría central y un giro de ángulo $2\pi/3$.
17) p6m: generado por tres simetrías axiales en los lados de un triángulo rectángulo con un ángulo $\pi/6$

Sobre la nomenclatura: La notación utilizada es la establecida por la Unión de Cristalografía (Comité Español) y consta de cuatro símbolos ordenados:

Símbolo 1: una letra p o c.

Símbolo 2: un número 1 si no hay rotaciones, 2 si la rotación mínima es de ángulo π, 3 si la rotación mínima es de ángulo $2\pi/3$, 4 si la rotación mínima es de ángulo $\pi/2$ o 6 si la rotación mínima es de ángulo $\pi/3$

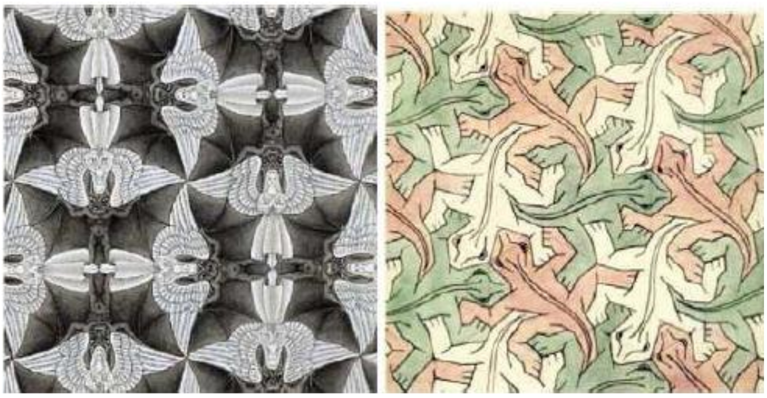
Símbolo 3: una letra o un número m (simetría axial), g (antitraslación) o 1 (ninguna de ellas)

Símbolo 4: una letra o un número m, g o 1, igual que el símbolo 3.

Esta notación se suele simplificar siempre que no dé lugar a confusión. Así por ejemplo el grupo p411 se simplifica en p4 y el p4gm se simplifica en p4g.

El artista holandés M. C. Escher estudió en profundidad los grupos de embaldosado. En 1922 llegó a Granada y quedó deslumbrado al visitar la Alhambra. Los creadores de los mosaicos de la Alhambra de Granada no conocían el teorema de clasificación de Fedorov, y seguramente no sabían cuántos grupos de simetrías podían usarse para teselar el plano y por eso resulta asombroso que hayan realizado diseños de los 17 grupos.

Inspirado en los mosaicos nazaríes, Escher da un paso más utilizando motivos irregulares, como por ejemplo los que podemos apreciar en la siguiente figura:



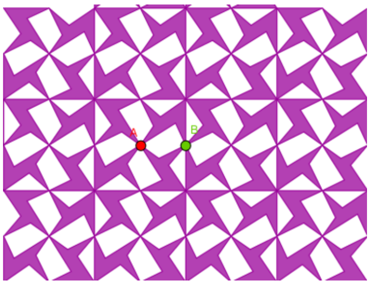
Las animaciones

Para generar un mosaico debemos conocer una región fundamental y cuáles son los generadores del grupo.

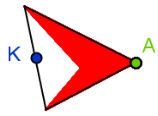
Se presentarán animaciones que permitan visualizar cómo a partir de una región fundamental y aplicando en forma reiterada y periódica las isometrías generadoras de uno de los subgrupos discretos, se logra la teselación del plano.

En la primera animación, se trabaja con el grupo p4 tomando como región fundamental un cuadrado, con un diseño asimétrico para que se aprecie el movimiento y la aplicación reiterada la rotación de centro A y ángulo $\pi/2$ y la simetría de centro B.

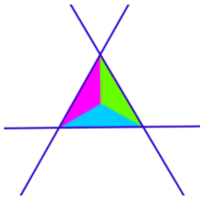
Al final de la animación, se llega a la siguiente teselación:



En segundo lugar, presentamos el grupo p6 con la siguiente región fundamental, aplicando la rotación de centro A y ángulo π/3 y la simetría de centro K.

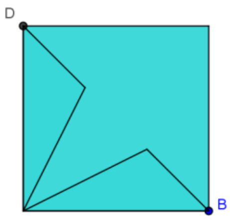
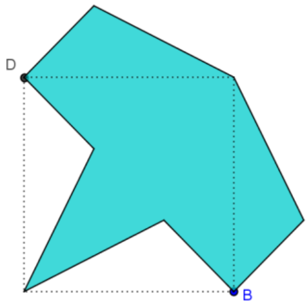


Y el grupo p3m1, con la región fundamental que se adjunta y las simetrías respecto a ejes que contienen los lados del triángulo.

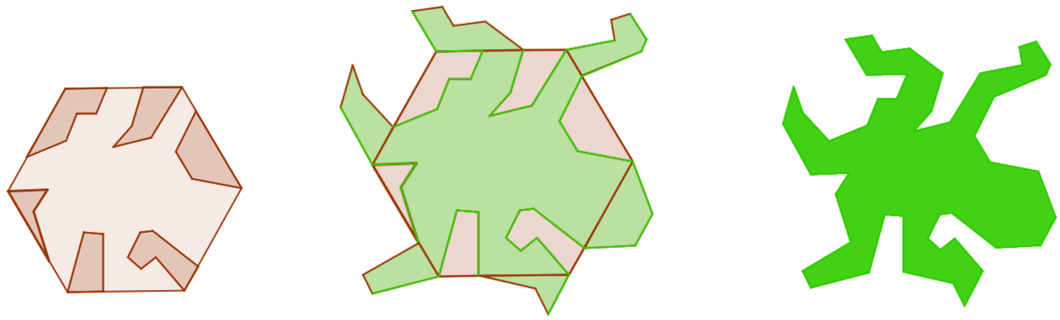


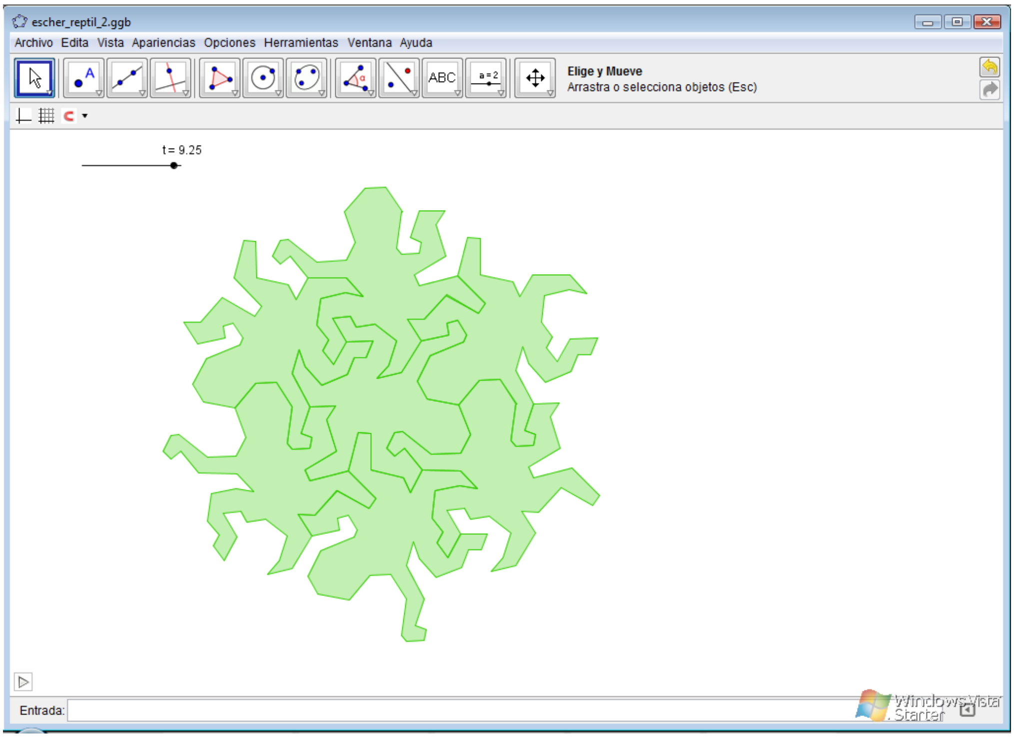
La región fundamental puede tener distintas formas. Un método para construir una región fundamental irregular consiste en modificar una región ya conocida.

Por ejemplo, si tenemos un cuadrado (ver figura) lo podemos modificar por medio de rotaciones de centros B y D y ángulo π/2 para obtener otra región de un grupo p4.

Modificando  se obtiene 

Finalmente, emulando una de las obras de Escher, se presentará un grupo p3, trabajando con una región fundamental irregular que parte de un hexágono regular y se modifica en un reptil:





Captura de pantalla durante la animación

Referencias bibliográficas

- Abella, A. y Pereyra, A. (2011) *Grupos Ornamentales. Subgrupos discretos de las isometrías del plano.* En Publicaciones Matemáticas del Uruguay – Vol. 13. Editorial Board.

- Garro Garro, JC, Rojo Montijano, J. (2009) Artículo: *"Un mosaico para Dubai"*. Jornadas Internacionales de Didáctica de las Matemáticas en Ingeniería. http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/JORNADAS%201/126%20Comunicaci%C3%B3n%20TESELACIONES%20DUBAI.pdf Consultado 10/09/2012

- Toth G.(2002) *Glimpses of Algebra and Geometry*, Second Edition. Ed. Springer.

- http://www.eschergranada.com/es/mc-escher/biografia consultado 31/10/2012

- http://www.geometriadinamica.es/Investigaciones/Arte-y-Geometria-Mosaicos/4.2-El-nombre-del-grupo-cristalografico.html Consultado 15/10/2012