

LUGAR GEOMÉTRICO, ¿SÓLO RASTROS QUE DEJAN LOS PUNTOS?

Rosa Ana Ferragina – Leonardo José Lupinacci

rosaferragina_1@hotmail.com – leolupinacci@yahoo.com.ar

Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE) – Universidad Nacional de San
Martín (UNSAM) Argentina

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Formación y actualización docente, Medio

Palabras clave: GeoGebra, Geometría, Lugar geométrico, Construcciones

Resumen

Generalmente, para encontrar un lugar geométrico se hace necesario ubicar varios puntos en el plano o el espacio con la finalidad de discernir la forma que tendrá la solución del problema. Lo anterior puede resultar complejo cuando se lo analiza con lápiz y papel. Sin embargo, un software de geometría dinámica, a modo de una poderosa lente, permitirá visualizar el camino que deja un objeto matemático (punto, segmento, figura, etc.) cuando se lo mueve respecto de otros que están dentro de una misma configuración, aun cuando éstas sean complejas. Presentando diversos problemas, el taller propone analizar cómo sería posible re significar construcciones que se repetían casi de un modo algorítmico, pero que en su mayoría no ponían en juego propiedades geométricas. Además, la personalización de la barra de herramientas de GeoGebra, permite facilitar la aparición de diferentes estrategias de resolución y poner en primer plano a las condiciones de formación de un lugar geométrico. También se reflexionará acerca de las herramientas Activa Rastro y Lugar Geométrico de GeoGebra si se complementan, cuándo y cómo es conveniente la incorporación de cada una. Tomaremos como marco teórico los aportes de la génesis instrumental.

1. La geometría en la formación docente. La integración de un software dinámico.

Numerosos son los investigadores en Didáctica de la matemática que han considerado de interés el análisis de las prácticas de enseñanza de la Geometría (Alsina (1991, 1997), Laborde (1998), Santaló (1993, 1994), Villella (1999, 2001), entre otros), destacando la importancia que tiene esta rama de la matemática en la formación de los ciudadanos y específicamente en la formación de los profesores, responsables a su vez de ofrecer a sus alumnos una *cultura geométrica* que les permita desarrollar competencias específicas en dicho campo para obtener una visión global de las aplicaciones actuales y una actitud positiva por la belleza y el buen razonar que la misma promueve (Alsina, 1997).

Es por estas cuestiones que en este taller proponemos poner en primer plano a la Geometría y, si bien son muchos los temas sobre los cuales se pueden reflexionar sobre cómo están presentes a lo largo de la formación básica del docente, hemos seleccionado como objeto de estudio a la noción de lugar geométrico.

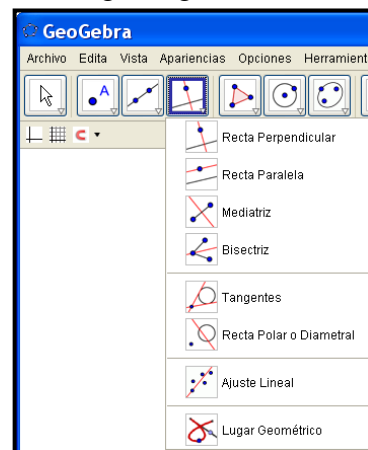
En la enseñanza, a este concepto se lo limita con la presentación y aplicación de procedimientos algorítmicos de la geometría métrica o, en otros casos, analizando problemas que implican la búsqueda y análisis de lugares geométricos únicamente a partir de relaciones propias de la geometría analítica. Estas caracterizaciones se expresan a menudo en las construcciones con sólo lápiz y papel, puesto que es necesario ubicar varios puntos en el plano o el espacio con la finalidad de poder discernir la forma que tendrá la solución del problema, resultando una tarea compleja y costosa. Pero la integración de un software de geometría dinámica, como GeoGebra, permite analizar e incluso trazar las trayectorias que ciertos objetos matemáticos describen al moverse en relación a otros elementos que se desplazan en misma construcción. Es decir que, “*el software funciona como un lente poderoso que le permite a los estudiantes visualizar trayectorias de objetos matemáticos aun dentro de situaciones o configuraciones complejas.*”(Santos Trigo; 2001; 249).

De este modo, nos proponemos reflexionar sobre la noción de Lugar Geométrico en los cursos de Geometría para la formación de profesores, y cómo se re significa a partir de la integración de esta herramienta informática, como es el caso de GeoGebra.

2. La construcción de lugares geométricos con GeoGebra

Algunas herramientas de GeoGebra posibilitan el trazado de lugares geométricos de un modo directo, esta presencia explícita respondería a que son las más utilizadas en otros desarrollos más complejos.

Pero, si lo que nos proponemos es caracterizar la formación de un lugar geométrico, entonces presentaríamos problemas que involucren a las condiciones de formación, sin utilizar esas herramientas específicas.



2.1. Herramientas y Restricciones

Analicemos lo presentado en el ítem anterior, con el siguiente problema:

¿Dónde podría ubicarse un centro de abastecimiento alimenticio de modo que esté a la misma distancia de un pueblo **A** que de otro **B**?

La solución se encontraría al construir un segmento de extremos **A** y **B**, trazar luego su mediatriz, puesto que todo punto de esta recta, como lugar geométrico, equidista de sus extremos.

Pero, ¿qué procedimiento realizaríamos si la **Barra de Herramientas** de GeoGebra se modifica eliminando, por ejemplo, las herramientas que permiten la construcción de lugares geométricos directos y también la de punto medio de un segmento.



Esta restricción es posible, porque

GeoGebra posee una interface que permite una **Confección de Barra de Herramientas Particular**, se ocultan opciones de la misma y sólo quedan a disposición aquellas que consideramos pertinentes con el trabajo matemático que deseamos desarrollar.

Para este caso, ¿qué otros conocimientos pondríamos en juego? Una posibilidad sería pensar en el trazado de dos circunferencias con centro en los puntos **A** y **B**, con un radio que supere a la mitad de la distancia entre esos puntos, procedimiento que por ejemplo nos permitiría analizar cuestiones relativas a las razones del uso de circunferencias y la condición pedida para sus radios.

A partir de estas posibilidades, analizamos cómo el término *herramienta*, referido a un elemento de GeoGebra que nos brinda la posibilidad de restringir su uso, se adapta y re significa dentro del contexto de la génesis instrumental. Disciplina sensible a las cuestiones instrumentales, que estudia cómo un artefacto (el software, en este caso) se convierte en un instrumento, puesto que se integra a las actividades humanas para construir conocimiento matemático (Trouche; 2004).

Una variante del problema anterior, podría ser:

Se quiere ubicar otro centro de abastecimiento alimenticio, de modo que esté a la misma distancia de otros 3 pueblos **C**, **D** y **E**, ¿dónde estaría construido?

Algunas cuestiones que podríamos discutir con este cambio: ¿Personalizaríamos la **Barra de Herramientas**?, ¿por qué? Y, si lo realizamos, ¿sería del mismo modo o propondríamos otra?, ¿por qué?

2.2. Procedimientos

Si proponemos la construcción de un dibujo dinámico a partir de una serie de condiciones dadas por un texto (sin tener modelo dinámico ya construido), cuando realicemos ajustes y/o modificaciones sobre la misma, es posible que reconozcamos tanto las propiedades involucradas, como así también si este procedimiento contempla todas las propiedades necesarias para la construcción. Un ejemplo de lo explicitado puede ser:

- Construir un ángulo cualquiera.
- Construir una circunferencia con centro en el vértice y un radio cualquiera.
- Poner nombre a los puntos de intersección entre la circunferencia y los lados del ángulo. Por ejemplo **P** y **Q**.
- Construir una circunferencia con centro en **P** y radio igual al elegido en el paso 2.
- Construir una circunferencia con centro en **Q** y el mismo radio elegido en el paso anterior.
- Determinar el punto o los puntos de intersección (**I**) entre las últimas circunferencias trazadas.
- Construir la recta que pasa por el vértice del ángulo y por el punto **I**.

El texto anterior, es una secuencia de pasos para construir, con regla y compás, la bisectriz de un ángulo. Revalorizar estos procedimientos permite reflexionar sobre la misma construcción y su fundamento, puesto que se han dejado de lado expresiones como «marcar un arco» modificándose por «construir una circunferencia». Además, de este modo, como el punto de intersección **I**, está a igual distancia de **P** y de **Q**, se puede deducir que equidista de los lados del ángulo, lo que revaloriza la definición de la bisectriz de un ángulo como lugar geométrico (recta que está a igual distancia de los lados) y, luego su consecuencia (divide al ángulo en dos partes iguales), que también es posible comprobar en la construcción realizada (Ferragina, Lupinacci, 2012).

3. Las Herramientas *Activa Rastro* y *Lugar Geométrico*, una posible complementariedad

GeoGebra ofrece dos herramientas para visualizar la trayectoria que describe un punto P cualquiera: **Lugar Geométrico** y **Rastro**. La primera describe a la curva que determina P , dependiendo del desplazamiento de otro punto que se encuentra sobre un objeto construido, por lo que si P no se mueve respecto de otro punto u objeto, esta herramienta no puede utilizarse. La traza o rastro de P son huellas que éste va dejando durante su desplazamiento.

Trabajaremos sobre la utilización de sólo una, ambas o ninguna, de las dos herramientas que ofrece el software, acorde con los objetos matemáticos que pretendamos caracterizar.

3.1. Explorar para tomar decisiones

El siguiente problema, que se basa en la condición que cumplen las mediatrices de los segmentos determinados por tres puntos no alineados, nos permitirá poner en primer plano a esas características cuando esbochemos una conjetura sobre la solución.

Construimos tres puntos fijos A , B y C , ¿qué condiciones debe cumplir el punto D , no fijo, para que las mediatrices del cuadrilátero $ABCD$ se corten en un único punto? (Laborde, 1998)

Algunas cuestiones que analizaremos: ¿Qué significa construir un punto fijo? ¿Dejaríamos utilizar la herramienta mediatriz?, ¿por qué? ¿Qué información brinda el punto de intersección de las mediatrices? ¿Qué herramienta permitirá visualizar la trayectoria de D ?, ¿por qué?

¿Se modifican las respuestas anteriores si los puntos A , B y C no son fijos?, ¿por qué?

En el problema, interactuamos de un modo continuo con el software para ubicar al punto D , como si fuera una experimentación. De acuerdo con las características de la construcción, no es posible utilizar la herramienta **Lugar Geométrico**. En cambio, sí puede activarse el **Rastro** del punto D . Pero, al ser éste un punto libre, la huella que deja en la pantalla, no necesariamente se corresponde con el lugar geométrico que buscamos. De todos modos, puede permitarnos conjeturar acerca de la posición que debe tener D

para que se cumpla la condición pedida. Es por ello que se hace necesario recurrir a otros conceptos matemáticos conocidos para delimitar la posición de **D**, en particular la condición para que las mediatrices se corten en un único punto.

Además, esa interacción con GeoGebra, permite que las construcciones se transformen en «tiempo real», contribuyendo de algún modo a formar hábitos que permitan, en ese proceso de transformación, partir de una situación particular y analizar sus propiedades invariantes, que conforman las bases intuitivas necesarias para una justificación formal (Sangwin, 2008).

3.2. Un problema con muchos rastros.

Construimos una circunferencia de centro **A** y radio **AB**. Sobre el radio, marcamos un punto **F**, luego un punto **M** sobre la circunferencia. Construimos la mediatriz del segmento **FM** y el segmento **AM**. Llamamos **P** a la intersección de la mediatriz con el segmento **AM**. ¿Qué trayectoria describe **P** cuando **M** se mueve sobre la circunferencia?

Podríamos analizar: ¿Qué herramienta es conveniente utilizar para la construcción de la circunferencia?, ¿por qué? ¿Qué condición verifica el punto **P** por su construcción? ¿Qué figura determina la trayectoria de **P**?, ¿qué paso/s de la construcción la condicionan?

Este problema nos permite discutir sobre la conveniencia de la utilización de una u otra herramienta de Geogebra para construir lugares geométricos. Consideramos que si recurrimos directamente a **Lugar Geométrico**, al modificar la posición de los puntos implicados, sólo veremos en la pantalla una única figura por cada cambio, puesto que la misma se va modificando en tiempo real. En cambio, activar la opción de **Rastro** para **P**, permite visualizar simultáneamente distintos lugares geométricos (generando así una familia de curvas), cuando se modifican las posiciones de los puntos **B** y **F**.

En última instancia, dejamos planteado un debate acerca de qué tipo de problemas propondríamos como óptimos para que la utilización de la herramienta **Lugar Geométrico** permitiera una conformación superior a la que se obtendría con activar el **Rastro**.

4. Una reflexión final

Como cierre de este taller, queremos compartir estas palabras que guían nuestra tarea: *“Nos dimos cuenta de que tenemos un poderoso medio para estimular el aprendizaje del estudiante a través de investigaciones matemáticas haciéndolas significativas, que se conectan fuertemente a las explicaciones producidas de los fenómenos inesperados, y las diferentes representaciones matemáticas de eso mismo.*

Para nosotros, el encuentro con la herramienta surgió de nuestra comprensión de su necesidad. Fue un punto de partida para motivarnos a aparearlo en consonancia con nuestros puntos de vista del aprendizaje, y así investigar y diseñar situaciones problema consecuentemente.” (Arcavi, 2003, p 41)

5. Referencias bibliográficas

- Alsina C., (1991). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Alsina, C, (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Arcavi, Hadas (2003). “El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque”. Documento de Trabajo del Grupo EM&NT. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle, Septiembre 2003.
- Ferragina, R., Lupinacci, L. (2012). Los puntos en su lugar. En: Ferragina, R. (ed.) (2012) *GeoGebra entra al aula de Matemática*. Pp. 69-80. Montevideo: Ediciones Espartaco..
- Laborde, C. (1998). Cabrí-geómetra o una nueva relación con la geometría. En: Puig, L. (ed.) (1998) *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática*. Pp. 33-48. Bogotá: Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.
- Santaló L. (1993) *La Geometría en la formación de profesores*. Buenos Aires: Red Olímpica.
- Santaló L. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la Matemática*. Buenos Aires: Troquel Educación.
- Santos Trigo, L. M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. En: *Avance y Perspectiva*. Vol 20. México. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. 247-258.

- Sangwin, C. (2008). *Geometrical functions: tools in GeoGebra*, 8 (4), pp. 17-20. In: MSOR Connections.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestations In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 281-307. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Villella J. (1999). *Cuando la Geometría es el tema de la reflexión matemática*. Documentos para la Capacitación Docente. UNSAM. Buenos Aires: Baudino Ediciones.
- Villella J. (2001), *Uno, dos, tres... Geometría otra vez*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.