UNA SECUENCIA PARA ANALIZAR LOS EFECTOS GEOMÉTRICOS RELACIONADOS CON LA FUNCIÓN CUADRÁTICA UTILIZANDO GEOGEBRA

Rafael E. Gutiérrez A. – Yender J. Araujo M.– Juan L. Prieto G.
rega1993@gmail.com – yjam15@hotmail.com – juanl.prietog@gmail.com
Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

Modalidad: CB.
Nivel Educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Parámetro, función cuadrática, parábola, GeoGebra.

Resumen

Quienes nos dedicamos a la formación de profesores de matemática vemos con preocupación cómo éstos enfrentan dificultades para la comprensión y enseñanza de algunos tópicos matemáticos fundamentales. Con el propósito de apoyarles, el siguiente trabajo describe una secuencia para el análisis de los efectos geométricos provocados por la variación de los parámetros de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ *sobre la parábola. La secuencia se apoya en el uso del GeoGebra, como medio para dar sentido a los efectos de deformación, traslación y reflexión, experimentados por las familias de parábolas concernientes a la expresión antes indicada. Teniendo en cuenta que estos efectos están relacionados con la variación de los parámetros, se describe una secuencia de tres pasos donde se explica cómo utilizar el GeoGebra para visualizar, identificar y/o relacionar los cambios sufridos por las parábolas. La puesta en práctica de esta propuesta puede conducir a mejoras en la calidad del razonamiento matemático de los docentes, colocándoles en condiciones favorables para impartir la enseñanza en la Educación Media. De esta manera, se busca potenciar los métodos de enseñanza de los profesores de matemática en Venezuela a través de la integración de Software Libre en la dinámica escolar.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

En la actualidad, llegar a comprender los efectos geométricos provocados por la variación de los parámetros de una función cualquiera sobre su gráfica se considera un propósito de aprendizaje matemático fundamental hacia el final de la Educación Media (NCTM, 2000). Sin embargo, los estudios dan cuenta de las dificultades que tienen los estudiantes para representar gráficamente una función cuadrática dada su escaza comprensión de los efectos geométricos mencionados anteriormente, producto de una enseñanza basada, en la mayoría de los casos, en el uso de fórmulas (Darmawan & Iwan, 2011). Una forma de trascender esta situación es mediante la elaboración de propuestas formativas que ayuden a los profesores a desarrollar una enseñanza basada en la comprensión de las características de una curva, a partir del valor de los parámetros de la función correspondiente.

Hoy en día, los profesores de matemática cuentan con programas informáticos que facilitan la exploración de esta clase de efectos geométricos sobre distintas familias de curvas. Uno de estos programas es el GeoGebra, un tipo de Software Libre innovador, dinámico y de fácil acceso desde la web, que está siendo utilizado por una comunidad importante de profesores e investigadores alrededor del mundo (Diković, 2009; Hohenwarter, 2006). Usando el GeoGebra para analizar los efectos geométricos que sufren las parábolas tras la variación de los parámetros de $f(x) = ax^2 + bx + c$, durante un conversatorio con profesores de matemática, se obtuvieron resultados interesantes para la práctica docente. La finalidad de este análisis es contribuir con los cambios en la manera de pensar del profesor sobre tales variaciones, a la vez que se busca impactar sobre sus métodos de enseñanza mediante la integración de tecnologías.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS DEL DISEÑO

El diseño de la secuencia instruccional parte de considerar que la variación de los parámetros de $f(x) = ax^2 + bx + c$ produce efectos geométricos sobre la gráfica correspondiente, los cuales pueden visualizarse con GeoGebra. Estos efectos son de tres tipos: *deformación, traslación y reflexión* (Darmawan et al., 2011), los cuales se definen a partir de los cambios de "forma" y "posición" experimentados por una parábola con respecto a la parábola canónica, cuya expresión es $f(x) = x^2$.

El análisis de estos efectos tiene en cuenta los siguientes elementos: (i) *eje de simetría*, recta paralela al *eje y* que divide a la curva en dos porciones simétricas; (ii) *vértice*, punto de intersección de la parábola con su eje de simetría; (iii) *eje de reflexión*, recta que es perpendicular al eje de simetría y que pasa por el vértice, y (iv) *concavidad*, ubicación de los puntos de la parábola con respecto a los semiplanos determinados por el eje de reflexión correspondiente. Dado que la variación de cada parámetro produce algún efecto sobre la parábola, se realiza el análisis de estos efectos de forma separada.

En cuanto al GeoGebra, la secuencia se apoya en el uso de tres deslizadores que se crean para ajustar el valor de los parámetros. Esta construcción garantiza que, al utilizar los deslizadores, se puedan visualizar los efectos geométricos mencionados. A continuación, se inicia el análisis siguiendo un itinerario estructurado en tres apartados.

DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA

La variación del parámetro a y sus efectos sobre la parábola

La variación del parámetro a en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$ produce dos efectos sobre la parábola canónica: *deformación y reflexión*. La *deformación* se relaciona con los cambios de posición experimentados por las ramas de la parábola, ya sea que éstas se alejen o acerquen a su eje de simetría. Cuando la distancia entre las ramas y el eje de simetría "aumenta", con respecto a la parábola canónica, se dice que la primera se ha transformado a causa de una "deformación" de tipo *dilatación* y, en el caso contrario, la deformación provocada sobre la curva es una *contracción.* La *reflexión*, por su parte, se refiere al cambio en la concavidad que sufre la parábola canónica o cualquiera otra que se tenga. Es importante destacar que, dependiendo del intervalo establecido para el deslizador correspondiente, ambos efectos sobre la parábola pueden visualizarse de manera separada o simultánea.

Deformación

Para visualizar el efecto de deformación experimentado por la parábola canónica, sin que intervenga el efecto de reflexión, basta con hacer variar el parámetro a en un intervalo comprendido en $(0, +\infty)$. Un valor notable en este intervalo es 1 ya que, cuando a toma este valor, la función correspondiente coincide con la canónica y, por tanto, no se percibe deformación alguna. Esta consideración conlleva a dividir el estudio de la deformación en dos casos:

Caso 1: Cuando a varía entre 0 y 1

Aquí es necesario ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador correspondiente en 0 y 1, respectivamente. Luego de activar la "Animación automática" al deslizador, se observa que ocurre una deformación de tipo *dilatación* en la parábola. Esta dilatación se hace más notable cuando el valor del parámetro se aproxima al mínimo del intervalo, es decir, las ramas de la parábola se encuentran cada vez más alejadas del eje de simetría. De forma análoga, en la medida que el valor de a se aproxima al máximo del intervalo, la dilatación tiende a ser menos notable con respecto a $f(x) = x^2$. Vale destacar que, por más cerca que a esté de 0 y 1, las ramas de la parábola no coinciden con el eje de reflexión ni con la parábola canónica (ver Figura 1a).

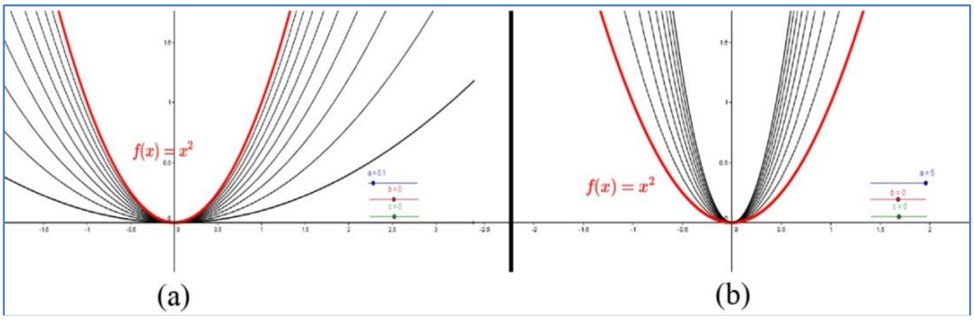

Figura 1. Efectos de deformación tipo dilatación y contracción sobre $f(x) = x^2$

Caso 2: Cuando a varía entre 1 y +∞

En este caso, los valores mínimo y máximo del deslizador deben ajustarse en 1 y cualquier otro número mayor que éste. Una vez realizadas varias exploraciones con distintos valores para el máximo del deslizador, se observa que la parábola canónica sufre una deformación de tipo *contracción* y que ésta es más evidente en la medida que el máximo del intervalo tienda al infinito (ver Figura 1b). Sin embargo, las ramas de la parábola nunca llegan a tocar al eje de simetría debido a que dejaría de ser una función.

Reflexión

Corresponde a esta parte del análisis develar lo que le ocurre a una parábola cuando el parámetro a varía en el intervalo $(-\infty, 0)$. En este intervalo se manifiestan los efectos de deformación y reflexión simultáneamente y, por lo tanto, según la interpretación que se haga, el estudio se puede centrar en uno u otro efecto. Se sabe que la reflexión es el resultado del cambio de concavidad que experimenta la parábola canónica o cualquiera deformación de ésta. Dado que este efecto está presente a lo largo de todo el intervalo $(-\infty, 0)$, en este apartado se explica un procedimiento para su análisis con el GeoGebra. Para comenzar, es necesario ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en -5 y 0, respectivamente, con la intensión de poder apreciar el efecto con mayor detalle. En este intervalo, al colocar el deslizador en -1 es posible observar la curva que es producto de la reflexión de la parábola canónica (ver Figura 2a).

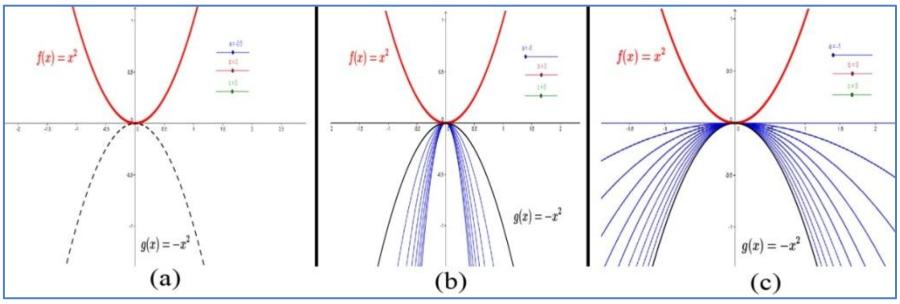

Figura 2. Efecto de reflexión sobre la parábola canónica o cualquiera otra

Por su parte, cuando el parámetro toma un valor distinto de -1 es posible visualizar la reflexión aplicada a alguna deformación de la parábola canónica. Más aún, al mover el deslizador a lo largo del intervalo, es posible reconocer las diferencias entre las parábolas reflejadas, en relación a las deformadas que las producen. Por un lado, si el deslizador se mueve entre el valor mínimo y -1, se visualiza la familia de curvas que son reflexión de alguna parábola contraída de la canónica (ver Figura 2b). Por otro lado, al mover el deslizador entre -1 y el valor máximo, se pueden observar todas las parábolas reflejadas que corresponden a la familia de dilatadas de la canónica (ver Figura 2c).

La variación del parámetro c y sus efectos sobre la parábola

En este apartado se analiza el efecto que experimentan las parábolas antes estudiadas cuando c cambia de valor. Esta variación produce un único efecto sobre las curvas, denominado *traslación*, el cual se caracteriza por el desplazamiento "vertical" de la parábola canónica o cualquiera otra. Este tipo de desplazamiento puede ser observado con cualquier valor posible que tomen los parámetros a y b. Sin embargo, dado que los efectos relacionados con el parámetro a ya fueron estudiados, se considera pertinente hacer el análisis de la variación de c en dos momentos, para los cuales se sugiere mantener el valor de a en un número fijo con el fin de apreciar la traslación manifestada por una misma familia de parábolas cuyo referente es $f(x) = ax^2$.

Caso 1: Variación de c con $b = 0$

El análisis requiere ajustar el deslizador asociado a b en cero y elegir un intervalo "conveniente" para el deslizador de c que permita observar el desplazamiento de una familia de parábolas y las relaciones que se establecen entre éstas y el resto de los elementos de la gráfica (los ejes cartesianos). Por ejemplo, si se quiere analizar el desplazamiento de la familia de parábolas definidas por $f(x) = -2x^2 + c$, basta con seleccionar un intervalo para el deslizador cuyos valores mínimo y máximo estén dentro de la vista gráfica. En consecuencia, se presentan los siguientes momentos:

a) *Cuando los valores mínimo y máximo son de igual signo.* Al activar la "Animación automática" al deslizador de c con valores mínimo y máximo positivos (o negativos), se puede apreciar sólo la familia de parábolas trasladadas hacia "arriba" (o hacia "abajo") con respecto a la parábola referente $f'(x) = -2x^2$ (ver Figura 3a).

b) *Cuando los valores mínimo y máximo son de distinto signo*. Al activar la "Animación automática" al deslizador de c con valores de signos distintos, por ejemplo -5 y 5, respectivamente, se puede observar las dos familias de parábolas del caso anterior al mismo tiempo, las trasladadas hacia "arriba" y hacia "abajo" con respecto a la parábola referente $f'(x) = -2x^2$ (ver Figura 3b).

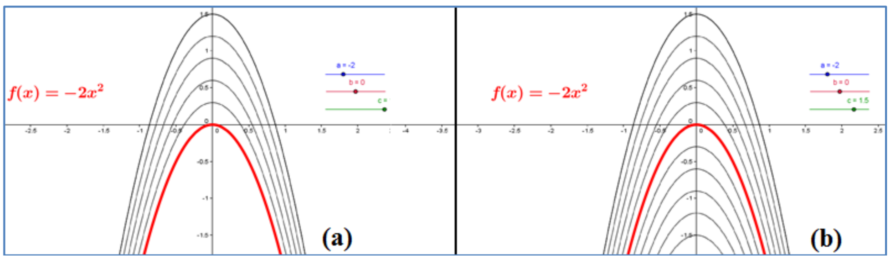

Figura 3. Traslación de la parábola $f'(x) = -2x^2$ "hacia arriba" y/o "hacia abajo"

Por tal motivo, es de mayor provecho ajustar el deslizador de c bajo esta condición. Además, se recomienda utilizar la opción "Activar Rastro" sobre la curva mostrada para apreciar mejor la familia de parábolas trasladadas para ambos casos.

Para estudiar las relaciones entre una familia de curvas determinada (p.e, aquellas que conciernen a $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$) y los ejes coordenados, se recomienda analizar los siguientes momentos, en los cuales, el deslizador de c es ajustado tomando las consideraciones anteriores. La exploración de la gráfica conlleva a lo siguiente:

a) *Cuando* a>0. Tras activar "Animación automática" al deslizador, se observa que el *eje* x es cortado en dos puntos únicamente por la familia de parábolas trasladadas hacia "abajo" de $f'(x) = 0{,}5x^2$, quién actúa como referente del efecto (ver Figura 4a).

b) *Cuando* a<*0*. Luego de activar "Animación automática" al deslizador, se observa que el *eje* x es cortado en dos puntos únicamente por la familia de parábolas trasladadas hacia "arriba" de la referente $f'^{(x)} = -0{,}5x^2$ (ver figura 4b).

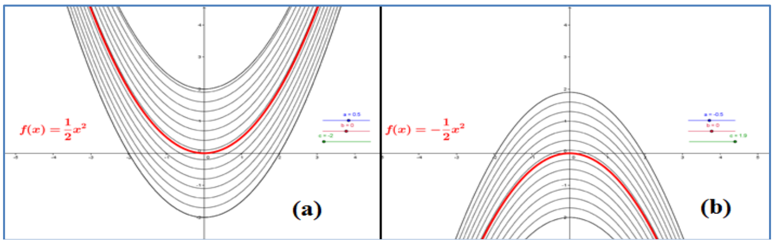

Figura 4. Relaciones entre una familia de curvas y el eje x

Al respecto, se sugiere explorar estos momentos con otras familias de parábolas para corroborar que: (i) el efecto de traslación sufrido por cualquier familia de parábolas tras la variación de c siempre es "vertical", (ii) cuando a y c son positivos o negativos ambos, la parábola correspondiente no corta al *eje x*, y (iii) cuando a es positivo y c es negativo, o viceversa, la parábola asociada siempre corta en dos puntos al *eje x*.

Caso 2: Variación de c con b ≠ 0

En este caso, la familia de curvas involucradas (p.e., las asociadas a $f(x) = 2x^2 + 3x + c$) sufre el mismo efecto de traslación que en el apartado anterior, con la diferencia que el eje de simetría de la familia es una recta paralela al *eje y*. Además, esta recta pasa por el punto $\left(\frac{b}{2a}, 0\right)$ y, por lo tanto, se puede determinar conocidos a y b (ver Figura 5).

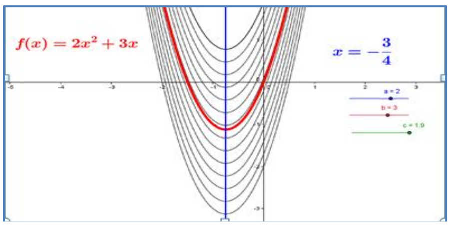

Figura 5. Traslación de una familia de curvas con b ≠ 0

La variación del parámetro b y sus efectos sobre la parábola

Al igual que en el caso anterior, la variación de b en $f(x) = ax^2 + bx + c$ produce un efecto de *traslación* caracterizado por el desplazamiento de la familia de parábolas en dos direcciones: *horizontal y vertical*, simultáneamente. Para dotar de sentido al desplazamiento es necesario considerar la relación existente entre el par de valores que toman a y c, y el que va tomando b en un momento dado. Esta relación adquiere un sentido de aplicación práctica cuando se estudian los siguientes casos:

Caso 1: Cuando a y c son positivos

Para observar lo que ocurre en este caso, se requiere que b varíe en un intervalo cuyos valores mínimo y máximo sean de distinto signo (p.e., -10 y 10), y que a y c tomen valores fijos y positivos visibles en la ventana gráfica. Luego de esto se procede a activar la opción "Animación automática" al deslizador de b para observar el tipo de traslación que sufren las curvas de la familia. Un primer análisis a lo observado da cuenta de un desplazamiento horizontal de las curvas a la izquierda o a la derecha del *eje y*, según b>0 o b<0. Esto nos indica que un valor crítico para el análisis es el 0 y, por ende, vale la pena dividir este apartado en dos momentos para comprender mejor el tipo de desplazamiento vertical que se produce a la par del otro desplazamiento:

a) *Cuando b varía entre* $(0, \infty)$. En este intervalo, la familia de parábolas se mantiene a la izquierda del *eje y*. Unido a esto, se puede ver que algunas curvas de esta familia se ubican por encima o por debajo del *eje x*, incluyendo el caso de aquella que posa su vértice sobre este eje. Un ajuste del deslizador para este intervalo (p.e., desde 0 hasta 10) permite apreciar la existencia de un valor crítico de b, a partir del cual es posible identificar los cortes de la parábola con el *eje x* en dos puntos, en uno o ninguno. En el caso de ser *a=3* y *c= 4*, el valor es 6.93 (ver Figura 6a). Ahora bien, ¿qué relación existe entre este valor y los valores que toman a y c? Este valor viene dado por $b = \sqrt{4ac} = 6.93$, el cual se obtiene de la expresión $b^2 - 4ac = 0$.

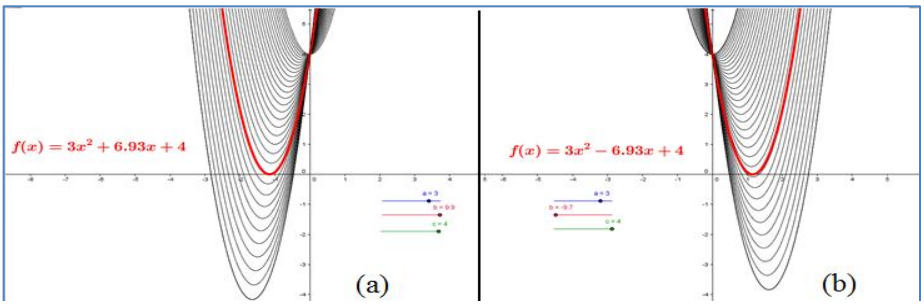

Figura 6.Traslación de las familias de parábolas

b) *Cuando b varía entre* $(-\infty, 0)$. De forma análoga al caso anterior, se puede apreciar la existencia de otro valor crítico de b a partir del cual es posible reconocer los puntos de corte con el *eje* x. La figura 6b muestra el desplazamiento de la familia para los valores mínimo y máximo de -10 y 0, respectivamente.

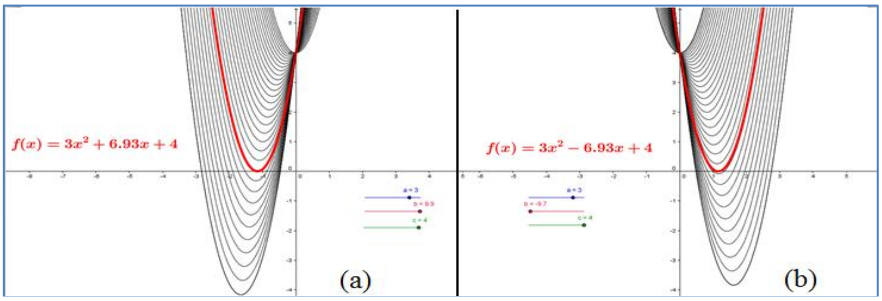

Figura 6.Traslación de las familias de parábolas

Caso 2: Cuando a *y* c *son negativos*

Ajustando el deslizador de b en un intervalo que contenga a $(-\sqrt{4ac}, \sqrt{4ac})$, por ejemplo -10 y 10, tras activar la “Animación automática” se observa la traslación de la familia de parábolas determinadas por $f(x) = -2x^2 + bx - 1$. El comportamiento observado en este caso es análogo a la del apartado anterior; por tal motivo, sugerimos su desarrollo por parte del lector.

Caso 3: Cuando a *y* c *son de signos distintos*

Dependiendo del signo que tenga a y c, el análisis de la traslación en este último caso se divide en dos momentos:

a) *Cuando* $a > 0$ *y* $c < 0$. Un ejemplo de esto se da para los valores mínimo y máximo del deslizador de b en -4 y 4. Los parámetros a y c toman los valores 1 y -2.5, siendo c visible en la vista gráfica. La “Animación automática” permite observar que la familia de curvas trasladas se mantienen a la izquierda o a la derecha del *eje* y en tanto que b>0 o b<0, respectivamente. Puede apreciarse que ambas familias tienen en común el hecho de siempre mantenerse por debajo del *eje* x y, en consecuencia, las curvas siempre cortan a este eje en dos puntos, uno negativo y otro positivo (ver Figura 7a).

b) *Cuando* $a < 0$ *y* $c > 0$. Un ejemplo para analizar la traslación es cuando los valores mínimo y máximo del deslizador de b son -2 y 2, respectivamente. Consideremos el caso en que $a = -0{,}2$ y $c = 2$, ubicándose este último sobre la vista gráfica. Tras activar “Animación automática” sobre el deslizador, se observa que las familia de parábolas que sufren la traslación se mantienen a la derecha o a la izquierda del *eje* y

en tanto que $b>0$ o $b<0$, respectivamente. Análogamente al caso anterior, ambas familias tienen en común el hecho de mantenerse en este caso por arriba del *eje x*, y por ende, todas estas curvas cortan en dos puntos a tal eje, igualmente uno negativo y otro positivo (ver Figura 7b).

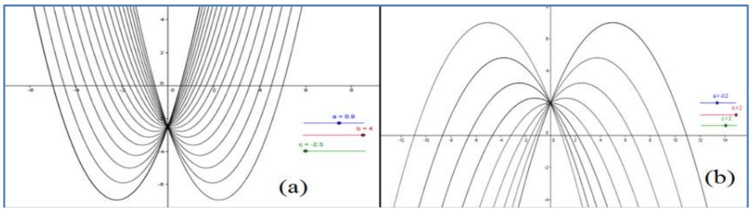

Figura 7. Relaciones entre dos familias de curvas con los ejes

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La integración de esta secuencia en los procesos formativos de los profesores de Matemática no pretende lograr que éstos se conviertan en "enseñantes" de primera línea de este tópico, ni que logren un dominio del GeoGebra como expertos. Consideramos que estas cuestiones pueden ser logradas progresivamente en el tiempo, apoyando las acciones incluso en la reflexión de las propias experiencias. Sin embargo, como formadores deseamos que los profesores amplíen su comprensión de las formas de enseñar funciones con tecnologías, se interesen por encontrar las razones matemáticas de lo observado a través del programa, y aprendan a construir sus propios argumentos y su discurso. El GeoGebra constituye una manera de conectar los objetos geométricos referidos a las funciones con sus representaciones gráficas (Bayazit y Aksoy, 2010; Losada, 2007). En este sentido, la secuencia descrita constituye una manera de poder realizar tales conexiones, colocando al profesor en mejores condiciones para impartir la enseñanza de estos tópicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bayazit, I. y Aksoy, Y. (2010). Connecting representations and mathematical ideas with geogebra. *Geogebra International Journal of Romania*, 1 (1), 93-106.
- Darmawan, D. y Iwan, P. (2011). On the teaching of analyzing the effects of parameter changes on the graph of function. Trabajo presentado en la *Fourth National Conference on Mathematics Education*, Julio, Yogyakarta.
- Diković, L. (2009). Applications geogebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6 (2), 191-203.
- Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using geogebra. Trabajo presentado en el *Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*, Julio, Dresden.
- Losada, R. (2007). Geogebra: La eficiencia de la intuición. *La Gaceta de la RSME*, 10 (1), 223-239.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.