CONSTRUINDO O LOGOTIPO DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA NO GEOGEBRA

Mariana Moran Barroso - Valdeni Soliani Franco
marianamoranbar@gmail.com - vsfranco@uem.br
Universidade Estadual do Paraná/FECILCAM – Universidade Estadual de Maringá

Modalidade: Minicurso
Nivel educativo: Terciário
Palavras chave: Educação Matemática, Novas Ferramentas, Inversão de Pontos, Homotetia.

Resumo
O logotipo da Olimpíada Brasileira da Matemática pode ser visto no sítio da OBM, que está referenciado. *Sua construção no GeoGebra utiliza conceitos importantes da Matemática, tais como o Segmento Áureo (que para sua utilização, será construído uma ferramenta específica para obtê-lo); a construção de cinco circunferências tangentes à duas circunferências concêntricas (essa construção depende da razão entre o raio da circunferência maior e o raio da circunferência menor, envolvendo para isso, funções trigonométricas); a inversão de pontos em relação a uma circunferência utilizando um teorema que garante que "O inverso de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão é uma outra circunferência" e finalmente o conceito de homotetia, para a construção final.*

O Logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática

O objetivo do minicurso é construir o logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), por meio do software GeoGebra. O logotipo após a construção final é dado na figura a seguir, e possui animação.

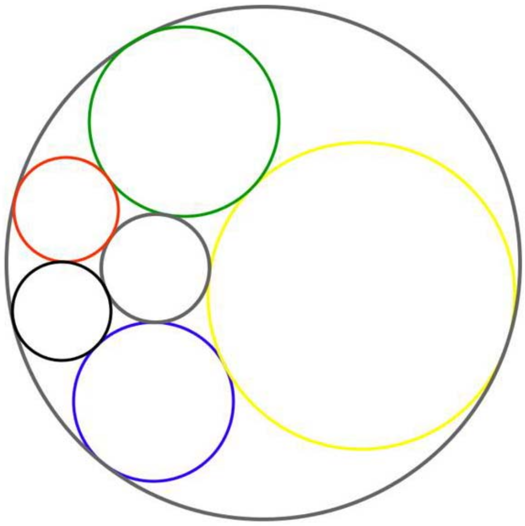

Figura 1 – logotipo da OBM
Fonte: Autores

A primeira construção necessária é o segmento áureo de um segmento dado.

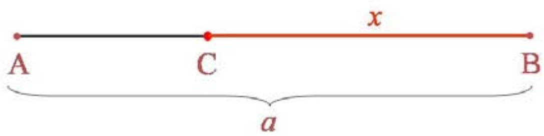

Figura 2 – CB é o segmento áureo de AC
Fonte: Autores

Dado um segmento AB arbitrário de medida *a*, como na figura 2, seu segmento áureo CB de medida *x*, é o segmento tal que:

$$\frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{CB}}}=\frac{\overline{\text{CB}}}{\overline{\text{AC}}}\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}\Leftrightarrow x^2=a^2-ax\Leftrightarrow x^2+ax-a^2=0.$$

Calculando-se as raízes desta equação em x, obtém-se:

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4.a^2}}{2}=\frac{a(-1\pm\sqrt{5})}{2}.$$

Como x é a medida de um segmento, utilizamos apenas a raiz positiva $x=\dfrac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ para a obtenção do ponto C no segmento AB. Durante o minicurso, será construída a ferramenta para construção de CB.

Na sequência, serão dados os passos para a construção de cinco circunferências de mesmo raio, tangentes entre si e todas, tangentes a duas circunferências concêntricas, como na figura 3 a seguir.

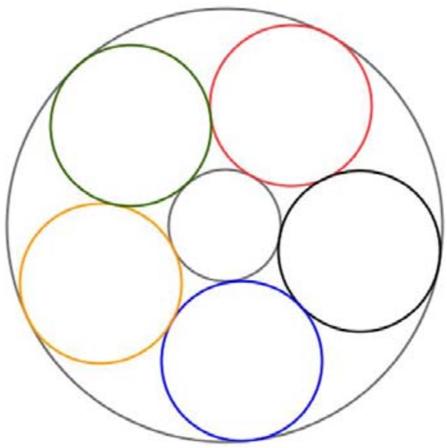

Figura 3 – cinco circunferências, de mesmo raio, tangentes entre si e todas, tangentes a duas circunferências concêntricas.
Fonte: Autores

A construção dependerá da razão entre os raios das circunferências concêntricas. Consideraremos a medida do raio da circunferência maior *R*, e a medida do raio da circunferência menor *r*.

Note que dessa forma, o diâmetro de cada uma das circunferências iguais é a diferença $R - r$ (figura 4).

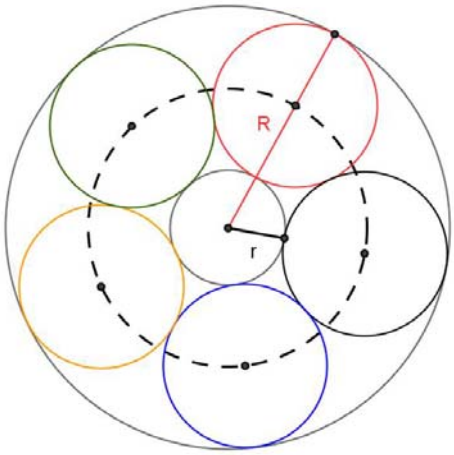

Figura 4 – o diâmetro das cinco circunferências iguais é R – r.
Fonte: Autores

Por outro lado, os centros dessas cinco circunferências de diâmetro $R - r$ formam um pentágono inscrito em um círculo de raio s = $r + \frac{R-r}{2} = \frac{R+r}{2}$.

Como a construção de um pentágono regular depende do segmento áureo do raio, para encontrar os vértices do pentágono, que como se pode observar serão os centros das cinco circunferências de raios iguais, será necessário neste momento, utilizar a ferramenta para construção de segmento áureo.

Observe na figura 5 a seguir, que o triângulo OBM é retângulo em M, pois M é o ponto médio da corda AB da circunferência pontilhada.

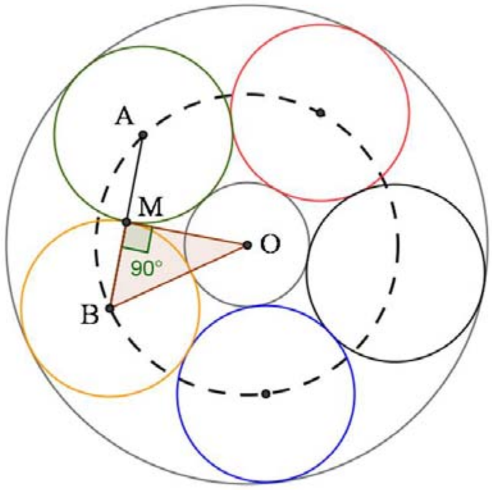

Figura 5 – OBM é um triângulo retângulo.
Fonte: Autores

Como BM é um raio de uma das cinco circunferências de raios iguais, temos que $\overline{\mathrm{BM}} = \frac{R-r}{2}$. Lembrando que os centros de duas circunferências e o ponto de tangência são sempre colineares, obtemos $\overline{\mathrm{OB}} = \frac{R+r}{2}$.

Assim,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{5}\right) = \frac{\frac{R-r}{2}}{\frac{R+r}{2}} = \frac{R-r}{R+r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R+r)\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}} = R-r \Leftrightarrow R\left(1-\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}\right) = r\left(1+\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\left(1+\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}\right)}{\left(1-\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}\right)} \Leftrightarrow r = R \quad \frac{1-\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}}{1+\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}}.$$

Por meio do GeoGebra constrói-se as duas circunferências concêntricas, cujos raios têm essa proporção.

Para continuar a construção, necessita-se de dois conceitos, o primeiro é o de homotetia. Seja O um ponto e k um número positivo. A homotetia de centro O e razão k é uma transformação no plano Euclidiano que fixa O e aplica um ponto P distinto de O em um único ponto P^* em na reta OP, tal que:

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}^*} = k(\overrightarrow{\mathrm{OP}})$$

Um outro conceito necessário para a construção do logotipo é o de inversão de um ponto em relação a uma circunferência.

Um ponto A' é o inverso de um ponto A em relação a uma circunferência de centro O e raio *r* dada, se $\overline{OA}.\overline{OA'} = r^2$. O ponto O é chamado centro de inversão.

Um resultado bastante conhecido e que não será demonstrado neste artigo é o Lema a seguir.

Lema: Seja δ uma circunferência de centro *C* distinto de O e raio *s*. Então, a homotetia de centro O e raio *k*, aplica δ em uma circunferência δ^* de centro C^* e raio *ks*.

O resultado a seguir, finaliza os conceitos e resultados necessários para a construção do logotipo.

Teorema: Seja γ um círculo de raio de medida *r* e centro O, e δ uma circunferência de centro C e raio de medida *s*. Suponhamos que O localiza-se no exterior de δ. Seja *p*, a potencia do ponto O em relação a δ. Seja $k = (r^2/p)$. Então, a imagem δ´ da inversão de δ em relação a γ, é uma circunferência cujo raio mede *ks* e o seu centro C* é a imagem de C sob a homotetia de centro O e razão *k*.

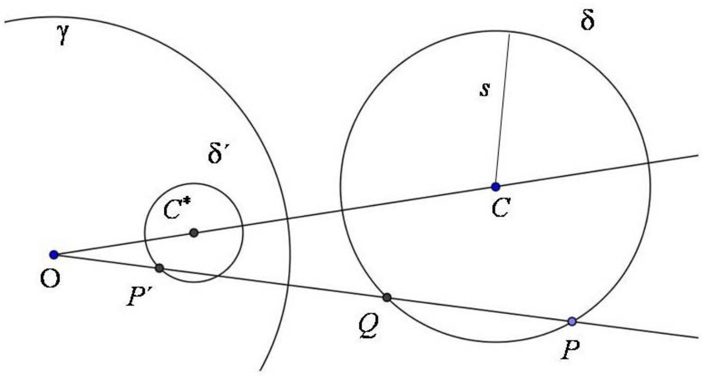

Figura 6 – ilustração para o teorema
Fonte: Autores

Demonstração: Como O é exterior a δ, a semirreta S_{OP} de origen O passando por um ponto *P* da circunferencia δ, encontra δ em um outro ponto *Q*, ou é tangente a δ em *P* (e neste caso *Q* = *P*). Então:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}.\frac{\overline{OP}}{\overline{OP}} = \frac{r^2}{p},$$

Em que P' é o inverso de *P* em relação a circunferência γ. Isto demonstra que mostra *P´* é a imagem de *Q* sob a homotetia de razão $k = (r^2/p)$. Segue, juntamente com o lema, que $\delta^* = \delta´$. Logo, a imagem δ´ da inversão de δ em relação a γ, é uma circunferência cujo raio mede *ks* e o seu centro C^* é a imagem de *C* sob a homotetia de centro O e razão *k*.

Para terminar de construir o logotipo, considera-se o conjunto formado pelos dois círculos concêntricos e pelos cinco círculos de raios iguais tangentes a eles já construídos, e aplica-se uma transformação de inversão em cada um dos elementos, em relação à uma circunferência que cumpre a hipótese do teorema anterior.

A menos que o centro de inversão seja o seu centro comum, os inversos dos círculos concêntricos não são concêntricos, como o que ocorre no logotipo. Além disso, após a inversão, as cinco circunferências iguais não têm mais raios iguais, dando o aspecto irregular do logotipo.

Os raios das circunferências tornam-se mais desiguais quanto mais o centro de inversão se afasta do centro dos círculos concêntricos, conforme será mostrado durante a realização do minicurso.

Mas observe que as propriedades de tangência são preservadas, em virtude da injetividade da inversão, que faz com que o número de pontos de interseção de figuras seja preservado mediante a transformação.

Para produzir a animação do logotipo, será utilizado o controle deslizante, pois basta girar o conjunto das cinco circunferências de raios iguais na figura original que os seus transformados por inversão mudarão de tamanho e posição à medida que isto ocorre.

Referencias bibliográficas

Carvalho, P. C. P. (1999). O logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática. *Eureka!*, 4, 42-46.

Greenberg, M. J. (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company.

OBM. (2012). *O projeto gráfico da OBM*. http://www.obm.org.br/opencms/quem_somos/logotipo/info_logotipo.html. Consultado 25/08/2012.