

## UN BINOMIO DINÁMICO: GEOMETRÍA Y FUNCIONES

Fernando Jorge Bifano– Leonardo José Lupinacci

fbifano@unsam.edu.ar – leolupinacci@yahoo.com.ar

Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE) – Universidad Nacional de San  
Martín (UNSAM), Argentina

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: GeoGebra, Geometría, Funciones, Problema dinámico

### Resumen

*Apelar a un cambio de registro de representación para resolver un problema, se transforma en una estrategia disponible en la medida en que el tipo de problemas que se proponen para trabajar favorece la integración de los mismos. A partir del análisis de un “problema dinámico” (Bifano & Vilella, 2012), centrado en el estudio de las variaciones del área de un rectángulo inscripto en un cuarto de circunferencia, ofrecemos un taller con el propósito de estudiar las diferentes cuestiones que emergen de las potencialidades didácticas de la modelización del problema a través del GeoGebra, en tanto las características intrínsecas del software genera una conexión dinámica para múltiples representaciones (Hohenwarter y Jones, 2007). El uso de comandos tales como activa trazo, lugar geométrico, registra en hoja de cálculo; entre otros, pueden ser concebidos como casos específicos de “variables didácticas” (Artigue, 1995) y su utilización y manipulación son parte de las reflexiones que se esperan promover en los participantes. Los aportes teóricos de la “génesis instrumental” y de la “orquestración documental” (Trouche, 2004) serán el marco de referencia para el análisis*

### La integración de registros geométricos y funcionales en la formación docente

Hoy se reconoce que hacer matemática implica mucho más que el dominio de técnicas, fórmulas o procedimientos de resolución de problemas rutinarios. Desde el punto de vista del aprendizaje de la matemática, se plantea que “*los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar donde constantemente busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planten conjeturas, utilicen distintos sistemas de representación, establezcan conexiones, empleen varios argumentos y comuniquen sus resultados.*” (Santos Trigo, 2003, p 196)

Esto lleva a replantearnos, desde el punto de vista de la enseñanza, la necesidad de generar ámbitos de quehacer matemático donde se posibilite la articulación de las características antes mencionadas, las cuales pueden potenciarse a partir de la integración de diversos marcos, tales como el algebraico, el aritmético o el geométrico.

Estos marcos, a su vez, posibilitan la representación de los objetos matemáticos puestos en juego a partir de diversos registros (tablas, gráficos, fórmulas...)

Cuando analizamos la enseñanza de la matemática y específicamente la formación docente, es posible observar que no suele favorecerse el cambio de registro de una representación como estrategia para resolver problemas. Esta ausencia de los diversos marcos matemáticos en un sentido integrador implica una pérdida sustancial de conocimiento y de desarrollo de habilidades matemáticas, limitando muchas veces el trabajo al análisis de un único registro de representación.

Creemos que esta multiplicidad de sentidos que adquieren los conceptos a partir de la integración de diversos marcos y registros en la formación del profesor, se puede potenciar mediante la utilización de un software de geometría dinámica como el GeoGebra; adquirir conocimientos profesionales en el ámbito de estas tecnologías requiere tanto profundizar en el conocimiento propio de la Matemática, como en el análisis de los resultados de su implementación en la enseñanza.

Las características intrínsecas del GeoGebra en su condición de conector dinámico de múltiples representaciones (Hohenwarter y Jones, 2007), a partir de las potencialidades del trabajo simultáneo con la *Vista Gráfica*, la *Hoja de Cálculo* y la *Ventana Algebraica*, posibilitan su implementación como integrador de registros, permitiendo crear lazos entre los distintos marcos y, a partir de ellos, la creación y justificación de nuevas técnicas de resolución y la posibilidad de nuevos análisis que permitan un estudio global de los problemas modelizados.

Creemos que la mera implementación de las herramientas informáticas no genera la integración conceptual deseada de forma externa a las tareas que se propongan realizar en dichos entornos. De ahí que la elección de los problemas resulta muy importante, puesto que éstos dan lugar a conjeturar con la ayuda del software, para que la actividad matemática no quede en una simple observación o en la realización de cálculos, sino que busque explicitar las propiedades y conceptos puestos en juego permitiendo justificar las observaciones realizadas.

Surge entonces la necesidad de elaborar y/o seleccionar problemas que, mediante su estudio a partir de las herramientas informáticas, favorezcan la integración buscada. Pasar de pedir, por ejemplo, una simple construcción a convocar a la exploración de una cuestión que se abre a partir de las condiciones que hacen a la construcción, conlleva un cambio de tarea para el alumno, motivado (provocado) por un medio (Brousseau, 1987)

con formato de problema, que lo interpela. Este tipo de formatos, es el que llamaremos problema dinámico (Bifano & Vilella, 2012).

De esta forma, se establece un nuevo contrato didáctico (Brousseau, 1987) en cuanto a la división de tareas que profesor y alumno deben asumir. El profesor propone una cuestión inicial a estudiar y el mismo alumno es requerido a formularse sus propios interrogantes.

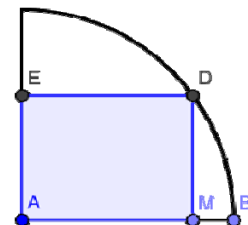
En este taller, proponemos analizar una serie de cuestiones que se pueden desentrañar a través del estudio de un problema dinámico sobre las variaciones del área de un rectángulo inscrito en un cuarto de circunferencia. Una construcción con elementos que pueden variar su ubicación nos permitirá entender los diferentes factores que influyen en tales variaciones, más allá de una mera conceptualización de tipo causa-efecto. Cabe destacar que lo dinámico del problema radica en la evolución de la situación a explorar más allá de que haya ciertos elementos que puedan moverse en la construcción.

A partir de esto, podemos configurar una definición del concepto de función que recupere los aspectos intuitivos relacionados con la variación y la dependencia que se encuentran en el corazón mismo de los orígenes del concepto.

### La integración geométrica funcional a partir de un problema dinámico

Consideremos el siguiente problema<sup>1</sup>:

Un cuarto de círculo cuyo radio  $AB$  es 6 cm. Un punto  $M$  que se desplaza sobre  $AB$ . Construimos un rectángulo, como se indica en la figura,  $AMDE$ . Estudiaremos las variaciones del área de este rectángulo dependiendo de la posición de  $M$  y, luego, analizaremos si en alguna posición tendremos área máxima.



<sup>1</sup> El problema originalmente no está pensado para ser «simulado» con un software de geometría dinámica. El mismo ha sido tomado de una investigación francesa llevada adelante por el Grupo “Lycée” del IREM de Clermont-Ferrand. (Barbin, E. & Douady, R. (1996), pp. 164). Un estudio pormenorizado del mismo puede verse en “GeoGebra entra al aula de Matemática” (Ferragina, R, 2012).

El problema puede separarse en el estudio de dos cuestiones que están estrechamente vinculadas entre si:

- ¿Cómo resulta la variación del área del rectángulo al variar la posición del punto M?
- ¿Existe alguna posición para dicho punto, tal que el área sea máxima?

Durante el desarrollo del taller pretenderemos que los destinatarios puedan explorar este problema inicial, comenzando por una “simulación” del mismo en GeoGebra. Esto los enfrentará a la toma de diversas decisiones, algunas de las cuales podrían ser:

- Dado que quiero estudiar una variación, ¿será más conveniente “alojar” la construcción de forma tal que el centro del cuarto de círculo sea coincidente con el origen de coordenadas?
- ¿Qué ventajas y desventajas podría traerme esta decisión?
- ¿Qué efectos traerá para la resolución del problema? ¿Lo podré “cambiar” de ubicación si resultara más conveniente?<sup>2</sup>

Una vez armada la “simulación”, comenzará el trabajo exploratorio sobre las cuestiones planteadas y algunos nuevos interrogantes que puedan ir surgiendo con la evolución del problema: ¿qué comandos o herramientas del software me permiten contar con elementos para establecer alguna conjetura sobre el comportamiento del área del rectángulo a medida que se desplaza el punto M sobre el segmento AB? ¿Bastará con la simple medición del área para poder establecer una hipótesis sobre el comportamiento de la misma?

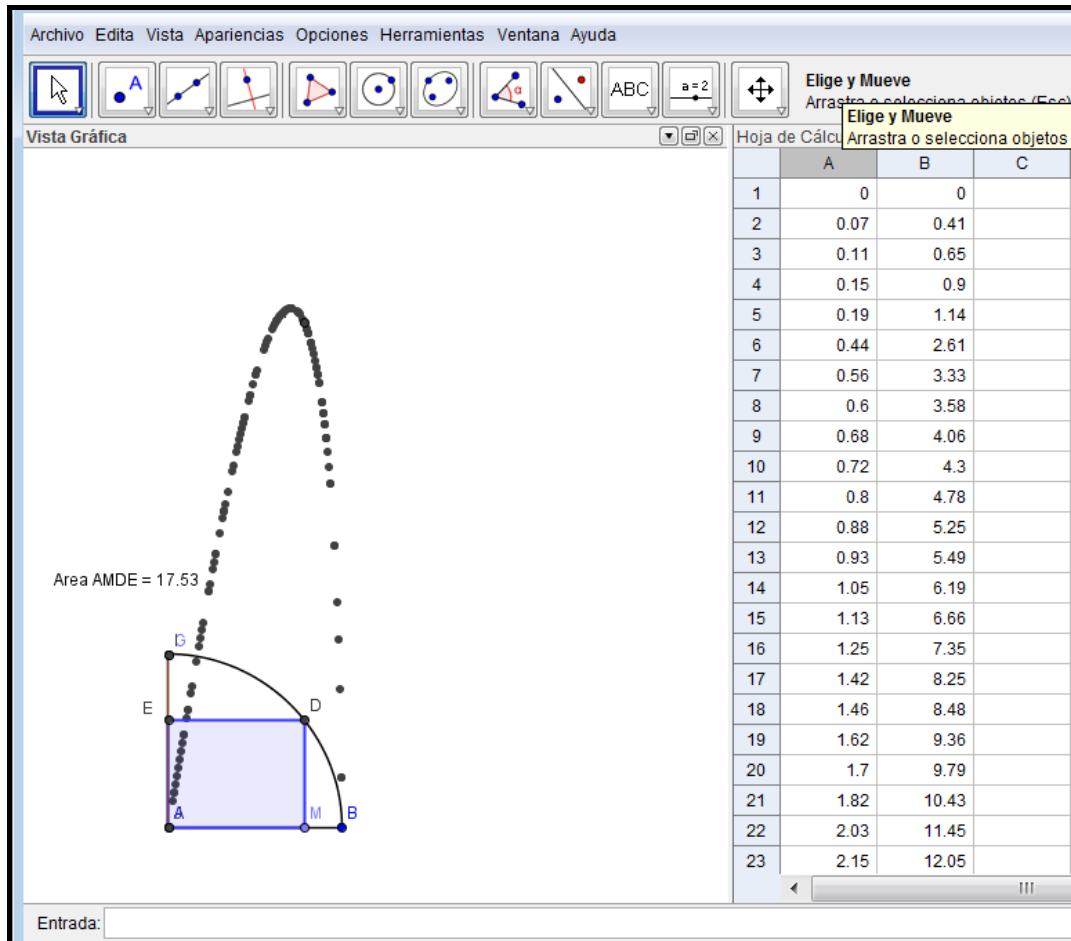
Aquí tiene sentido analizar la potencialidad del software con relación a la integración de registros. Para ello habrá que reflexionar sobre la posibilidad de definir de alguna manera la relación funcional entre el área y la medida del lado, para luego poder “leer” de diferentes maneras tal comportamiento.

Para ahondar en las posibilidades de “lectura” que brinda el GeoGebra, habilitaremos la discusión sobre el sentido y utilidad de las diferentes herramientas como “activa trazo” o “registra en hoja de cálculo”, entre otras, con la finalidad de establecer una suerte de “lazo” entre las representaciones de la relación funcional a estudiar. La figura que se

---

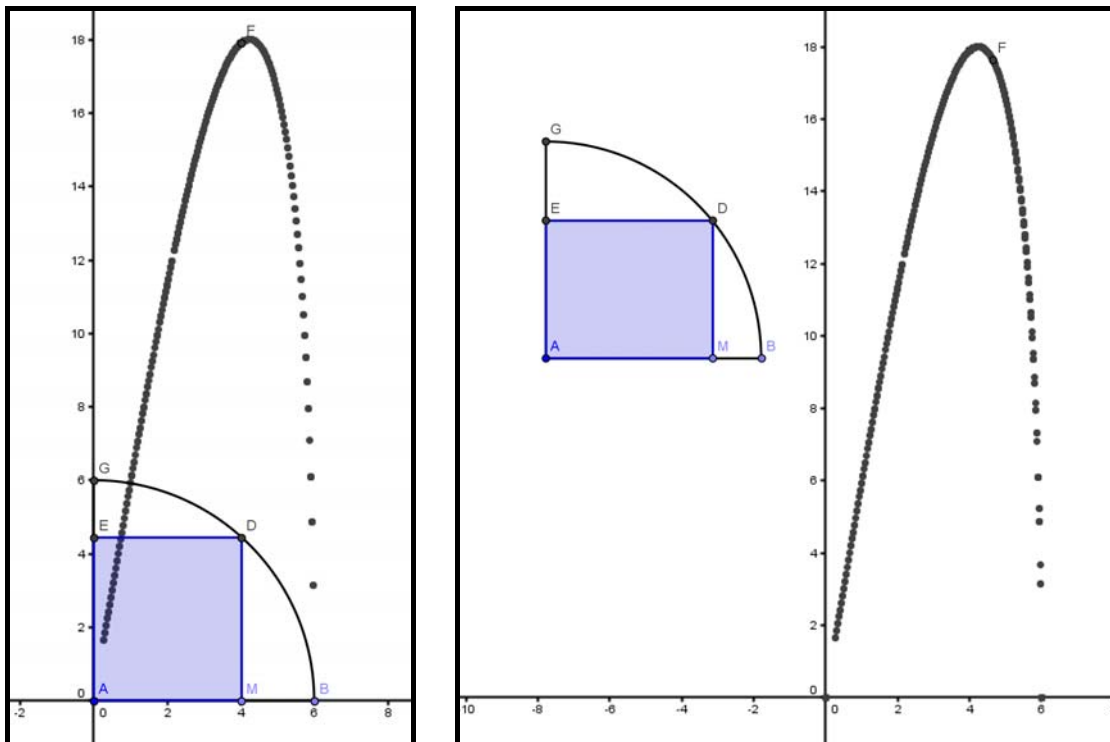
<sup>2</sup> Cabe destacar que este tipo de interrogantes tendrán cabida en la medida en que los asistentes del taller tengan algún conocimiento sobre las posibilidades del software. En el caso en que algunos nunca hayan experimentado con el mismo, estas cuestiones pueden no ser percibidas en una primera instancia, pero podrán ser traídas en el momento conveniente al trabajar con los diferentes registros de datos que proporciona el GeoGebra.

propone a continuación ilustra cómo se pueden integrar los diferentes registros de representación de la situación para poder contar con elementos que ayuden a establecer alguna conjetura sobre el comportamiento del área del rectángulo con relación a la posición<sup>3</sup> del punto M.



La integración de registros permitiría contar con mayores elementos para analizar la conjetura sobre porqué, por ejemplo, la curva descrita por la variación del área en relación con la variación de la medida del lado no ha resultado simétrica. En este sentido, la decisión de la ubicación de la construcción se torna significativa junto con la “habilitación” de la vista de los ejes cartesianos.

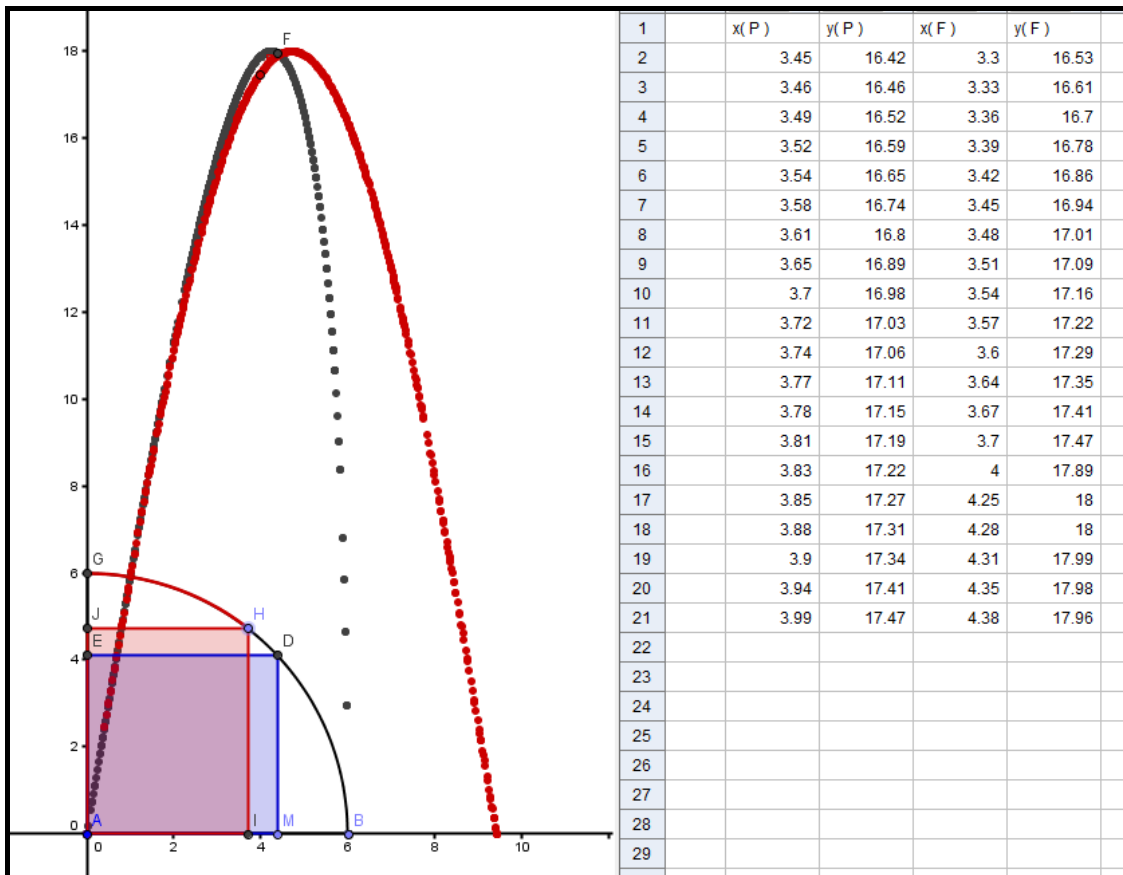
<sup>3</sup> Hay que destacar que la idea de posición del punto, se “traduce” de alguna forma en variación, porque la “simulación” que se hace del problema lleva a establecer una conjetura sobre el valor que toma el área del rectángulo a medida que varía la magnitud del lado del mismo.



Todas estas herramientas y comandos del software, se constituyen en “variables didácticas” (Artigue 1995), pues se transforman en comandos que el docente puede decidir o no habilitar y que tienen consecuencias para el aprendizaje. En línea con lo que define Trouche (2004), forman parte del proceso de “orquestración documental” que el profesor organiza para la gestión de la clase.

Las características dinámicas del software facilitarían la construcción de una noción de función emparentada con los aspectos de variación y dependencia, y cómo se manifiestan los efectos por una suerte de inter-juego entre las variables elegidas.

Todo este despliegue habilita ir más allá aún del problema inicial y explorar nuevas preguntas: ¿qué pasaría si el punto M se hallara alojado sobre el arco de circunferencia y se desplazara sobre el cuarto de círculo?, ¿se trata de la misma variación?, ¿se describiría la misma curva u otra?, ¿tendría aspectos en común?, .... Estos interrogantes podrían estudiarse en “simultáneo” con el estudio realizado para sacar conclusiones a contrastar los resultados obtenidos.



### Conclusiones:

Luego del desarrollo del taller y sobre la base de los interrogantes analizados y discutidos con el grupo asistente, esperamos arribar a diferentes conclusiones en relación con:

- El tipo de problemas que adquieren mayor potencial didáctico para el trabajo matemático en entornos de geometría dinámicos como GeoGebra.
- Los elementos potencializadores del software para la exploración de problemas y el establecimiento de conjeturas.
- La estrecha relación entre el tipo de problemas que se pueden estudiar con GeoGebra con el tipo de conocimiento matemático que pueden construir los alumnos, a partir de las diferentes intervenciones didácticas de quien enseña.
- El sentido de facilitar la integración de registros para la construcción de conocimientos.
- Los diferentes comandos y herramientas del GeoGebra y sus diversos usos con fines didácticos para la enseñanza.

## Referencias bibliográficas

- Artigue, M y otros. (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.
- Barbin, E., Douady, R. (1996). *Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre Saberes, Programas y Prácticas*. Topiques éditions.
- Bifano, F. & Villella, J. (2012). *Saberes construidos con (en) problemas dinámicos: ¿Otros objetos de saber?* Comunicación Coloquio Internacional, La didáctica de la matemática: enfoques y problemas. Homenaje a Michéle Artigue. Universidad Paris VII.
- Brousseau, G. (1987). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ferragina, R. (ed.) (2012) *GeoGebra entra al aula de Matemática*. Montevideo: Ediciones Espartaco.
- Hohenwarter, M., Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. En: *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*. 27 (3): 16-131, University of Northhampton, UK: BSRLM
- Santos Trigo, L. (2003) Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos En: *Boletín de Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, N° 2.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestations In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 281-307. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.