

CONSTRUINDO O TRIÂNGULO HIPERBÓLICO NO SOFTWARE GEOGEBRA: UMA EXPERIÊNCIA COM FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Guilherme Fernando Ribeiro - Luciano Ferreira - Talita Secorun dos Santos
guilherme.ribeiro91@hotmail.com - lulindao66@hotmail.com - tsecorun@hotmail.com
Universidade Estadual do Paraná Campus de Campo Mourão - Universidade Estadual
de Maringá - Universidade Estadual do Paraná Campus de Campo Mourão - Brasil

Modalidade: Comunicação

Nível: Formação e atualização docente

Palavras chave: Geometria Euclidiana, Geometria não-euclidiana, Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.

Resumo

Neste trabalho relatamos uma experiência desenvolvida com alunos do 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (FECILCAM), da cidade de Campo Mourão, Paraná, Brasil. O objetivo principal desse trabalho foi analisar como acadêmicos de matemática aceitariam a ideia da soma dos ângulos internos de um H Triângulo da Geometria Hiperbólica ser menor que 180° , ao construírem tal triângulo com o software GeoGebra e compará-lo com o triângulo Euclidiano. Este texto integra um trabalho maior que visa elaborar e aplicar atividades acerca do conteúdo de Geometria Hiperbólica na formação inicial de professores de matemática, utilizando o GeoGebra. Neste artigo, iremos descrever brevemente as 14 atividades aplicadas aos acadêmicos e apresentaremos as análises da construção da 14ª atividade que trata da construção do H Triângulo. Para este trabalho, analisamos como os alunos passaram a pensar sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, com base na construção do H Triângulo no GeoGebra. A ideia de estudar a Geometria Hiperbólica surge após o conteúdo de geometria não-euclidiana ser incluso no Currículo da Educação Básica por meio das DCE, Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica, no final de 2006.

Introdução

No final do ano de 2006 foi divulgada no Estado do Paraná as Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica (DCE), que trouxe no item Conteúdo Estruturante Geometria o tema Tópico Geometrias não-euclidianas.

No entanto, a inclusão deste tema torna-se questionável ao considerarmos as reais condições para o desenvolvimento desse conteúdo em sala de aula. Primeiramente, conforme aponta Santos (2009), grande parte dos professores da Educação Básica apresentam dificuldades com a própria Geometria Euclidiana e desconhecem as Geometrias não-euclidianas.

A falta de preparo dos professores para trabalhar com as Geometrias não-euclidianas também foi denunciada por Caldatto (2011), que aponta para a falta de materiais de apoio para que os professores possam trabalhar com o tema e a falta de tempo para abordar todos os conteúdos trazidos pelas DCE.

Segundo Lovis (2009), Bonete (2000), Cabariti (2004), Santalo (2006) e Santos (2009),

parte significativa dos professores de matemática que atuam na Rede Estadual de Ensino do Paraná não possuem o conhecimento necessário para trabalhar com a Geometria não-euclidiana. Esses pesquisadores afirmam que as dificuldades do professor em ensinar/trabalhar com a Geometria não-euclidiana acontece devido a falta de conhecimento do assunto e de formação necessária.

Considerando toda essa problemática, surgiu a ideia desta pesquisa. Baseados na pesquisa de Ferreira (2011), elaboramos atividades sobre Geometria Hiperbólica, utilizando o *software* GeoGebra, e aplicamos em uma turma de formação inicial em matemática.

A importância de se trabalhar a Geometria Hiperbólica no Ensino Médio é ressaltada pelas DCE. Tal documento aponta que o estudo das noções de Geometrias não-euclidianas aprofunda-se ao abordar a Geometria dos Fractais, Geometria Hiperbólica e Elíptica (PARANÁ, 2008).

Neste trabalho, iremos descrever 14 atividades aplicadas aos acadêmicos de matemática e apresentar as análises da 14ª Atividade: Construindo o H_Triângulo. Baseados nas DCE, elaboramos a 14ª Atividade que tinha como objetivo principal fazer um comparativo com a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica. Nesse trabalho, pretendíamos investigar como os acadêmicos aceitariam que ao construir o H_Triângulo a soma dos ângulos internos não era 180° .

Metodologia

A aplicação das atividades foi realizada na cidade de Campo Mourão, no Estado do Paraná, na Universidade Estadual do Paraná - Campus de Campo Mourão (UNESPAR/FECILCAM), no ano de 2011. Os sujeitos participantes da pesquisa foram 16 alunos do 3º ano do curso de Licenciatura de Matemática da UNESPAR/FECILCAM. Na apresentação da História da Geometria, utilizamos 4 aulas de 50 minutos cada. Já na aplicação das atividades, foram utilizadas 12 aulas de 50 minutos cada.

Foi solicitado que cada aluno trouxesse seu próprio notebook com o *software* GeoGebra instalado. Os pesquisadores realizaram uma explicação acerca da História da Geometria, fazendo uma breve “viagem” histórica desde a construção da Geometria Euclidiana até o surgimento das Geometrias não-euclidianas. Foram apresentadas brevemente a

Geometria Elíptica, a Geometria dos Fractais, a Geometria Topológica, a Geometria Projetiva e, por fim, a Geometria Hiperbólica.

Como forma de familiarização do sujeito com o *software* GeoGebra, foram aplicadas cinco atividades iniciais. A 1ª Atividade tratava da representação do primeiro postulado de Euclides que diz que: Para todo ponto A e todo ponto B diferente de A , existe uma única reta a que passa por A e B . A 2ª Atividade tratava do segundo postulado de Euclides, que diz que: Um segmento retilíneo pode sempre ser prolongado. Já a 3ª Atividade era a representação do terceiro postulado de Euclides, que diz que: Existe uma única circunferência com centro e raio dado. Para a 4ª Atividade, ficou a representação do quarto postulado de Euclides: Todos os ângulos retos são iguais. Na 5ª Atividade, sugerimos a representação do quinto postulado de Euclides: Se uma reta c corta duas outras retas a e b (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores (α e β) de um mesmo lado de c é menor que dois retos, então a e b , quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de c . A Figura 1, trata da ilustração do quinto postulado de Euclides.

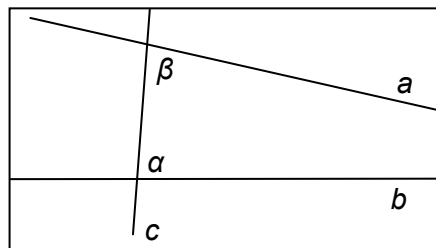


Figura 1 – Quinto postulado de Euclides

Baseado em Ferreira (2011), os sujeitos participantes da pesquisa construíram as ferramentas necessárias para a elaboração do Plano de Poincaré. A 6ª Atividade tratou da construção da ferramenta H_Reta. A 7ª Atividade ficou com o título Testando a ferramenta H_Reta. A 8ª Atividade trazia a construção da ferramenta H_Segmento. A 9ª Atividade era denominada Testando a ferramenta H_Segmento. A 10ª Atividade foi a construção da ferramenta H_Distância. E, por fim, a 11ª Atividade ficou intitulada como Testando a ferramenta H_Distância. As construções de macro ferramentas e seus respectivos testes de funcionamento foram necessários para a construção do modelo do Plano de Poincaré. Essa etapa exigiu dos sujeitos muita atenção, sendo utilizadas duas aulas para as construções dessas ferramentas e seus respectivos testes.

A 12ª Atividade tratou da construção do axioma hiperbólico. O Axioma Hiperbólico, segundo Greenberg (1973, p.148), diz que: “Na Geometria Hiperbólica existe uma reta l e um ponto P , não pertencente a l , tal que existe pelo menos duas retas que passam por

P e são paralelas a reta l ". A 13ª Atividade tratou da comprovação desse Axioma Hiperbólico. Essas duas atividades foram as que os sujeitos mais sentiram dificuldades. A 14ª Atividade, que tinha como nome Construindo o H_Triângulo, teve como objetivo propor um comparativo com a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica. Existe um teorema da Geometria Euclidiana que trata acerca da soma dos ângulos internos de triângulos: "A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC é igual a 180 graus". Essa atividade visava mostrar aos acadêmicos que tal teorema não é válido na Geometria Hiperbólica.

Nesse trabalho, iremos analisar/investigar como e se os alunos aceitaram a 14ª Atividade: Construindo o H_Triângulo, ou seja, se eles aceitaram que ao construir o H_Triângulo a soma dos ângulos internos não é 180°.

Para a análise dos dados coletados, codificamos os participantes da pesquisa. Como o número de participante foi um total de 16, temos então os participantes codificados de 1 a 16, ou seja, A.1 (aluno um) para as respostas do primeiro participante, A.2 (aluno dois) para o segundo participantes, ..., A.16 (aluno dezesseis). Essa codificação foi realizada de maneira aleatória. Vale lembrar que cada participante teve a mesma codificação no decorrer da análise.

Analisando a atividade H_Triângulo

Nessa atividade, pretendíamos que os alunos fizessem uma comparação com a soma dos ângulos interno de um triângulo na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica. E a partir daí, passassem a aceitar a existência de uma Geometria não-euclidiana que possibilita que a soma dos ângulos internos de um triângulo seja menor que 180°.

Esperávamos encontrar uma resistência natural em aceitar o H_Triângulo, já que a Geometria Euclidiana é posta na escola como uma verdade única e incontestável. No entanto, esperávamos também que a utilização do *software* facilitasse a aceitação de tal fato pelos sujeitos participantes da pesquisa.

Durante a apresentação da parte histórica e dos modelos da Geometria Hiperbólica, houve uma resistência dos alunos no sentido de aceitar um triângulo cuja a soma fosse menor que 180°. Para nós o uso do *software* poderia contribuir para o entendimento e melhor aceitação do H_Triângulo.

Ao entregar a décima quarta atividade aos alunos e expor o que seria realizado, solicitamos que ao término desta atividade os alunos salvassem o arquivo com o nome "14ª Atividade – Construindo o H_Triângulo". Nessa atividade, os alunos tiveram a

oportunidade de calcular qual a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana e um H_Triângulo na Geometria Hiperbólica. O *software* GeoGebra possibilitou que eles pudessem movimentar as figuras e comparar os resultados.

Não estipulamos um tempo máximo para realização, visto que cada acadêmico participante já tinha constituído certa habilidade em relação ao *software* GeoGebra, no sentido de manusear as ferramentas.

Ao término da 14ª Atividade – Construindo o H_Triângulo, os alunos se depararam com a seguinte questão dada em um questionário: *No H_Triângulo a soma dos ângulos internos é igual a 180°? E no triângulo euclidiano? Como você explica esse acontecimento?* A Tabela 1 indica a análise da questão indagada na Construção do H_Triângulo.

Buscamos relacionar o número de alunos que chegaram a basicamente uma mesma resposta. Em seguida, foi realizada a classificação das respostas, de acordo com suas especificidades. Na Tabela 1 apresentam-se também alguns excertos de respostas dadas pelos sujeitos. Por fim, na última coluna têm-se os comentários.

Tabela 1 - Análise da questão da Construção do H_Triângulo

1 – No H_Triângulo a soma dos ângulos internos é igual a 180°? E no triângulo euclidiano? Como você explica esse acontecimento?			
Respostas dos alunos de acordo com a codificação	Justificativa dada pelos acadêmicos	Excertos de respostas dadas pelos sujeitos	Comentários
Quatro alunos afirmaram que o resultado da soma dos ângulos internos de um H_Triângulo é menor que 180°. Disseram que no triângulo euclidiano a soma dos ângulos internos é igual a 180°. A.3 – A.6 – A.13 -	Dois não souberam explicar a resposta. A.3 – A.16 Um explicou que seria por os lados não serem retos. A.6 Um Explicou que no plano euclidiano as retas tem um formato diferente que no	A.3 - “ <i>No H_Triângulo a soma dos ângulos interno é menor que 180°. E no triângulo euclidiano é 180°.</i> ” A.13 – “ <i>No H_Triângulo a soma foi de 132,76°, menor que 180° e no triângulo euclidiano foi 180°,</i>	Estes alunos conseguiram de alguma forma aceitar a existência de retas com um formato diferente da reta Euclidiana. Eles aceitaram o triângulo cuja soma dos ângulos internos era menos que 180°.

A.16	hiperbólico. A.13	<i>pois as retas tem formato diferente”</i>	
<p>Dez alunos colocaram que a soma dos ângulos internos no H_Triângulo não é igual a 180°. Que no triângulo euclidiano é 180°.</p> <p>A.1 - A.2 – A.5 – A.7 – A.8 – A.9 – A.10 – A.12 – A.14 – A.15</p>	<p>Dois não souberam explicar a resposta.</p> <p>A.14 – A.15</p> <p>Cinco explicaram que como a reta é uma curva, a soma dos ângulos formados varia.</p> <p>A.1 - A.2 – A.9 – A.10 – A.12</p> <p>Dois explicaram que no triângulo euclidiano a soma dos ângulos internos é 180° e no triângulo não-euclidiano isso não acontece.</p> <p>A.5 – A.8</p> <p>Um explicou que a soma é diferente pelo fato dos ângulos serem calculados através das aberturas de retas tangentes. A.7</p>	<p>A.8 – “<i>No Triângulo Euclidiano a soma dos ângulos interno é 180° obrigatoriamente. Já no triângulo, digo H_Triângulo, essa soma não necessita ser 180° para ser considerado um triângulo.</i>”</p>	<p>As respostas destes alunos mostram ainda uma certa insegurança em relação ao que eles estão vendo na tela do computador e o que eles conhecem por retas.</p>
<p>Dois alunos declararam não saber o que responder.</p> <p>A.4 – A.11</p>		A.4 – “ <i>Não sei.</i> ”	<p>Isso mostra que ainda existiam alunos que não compreendiam a construção da reta hiperbólica.</p>

Mesmo os alunos estando familiarizados com o *software* GeoGebra, eles apresentaram dificuldade para realizar a 14ª atividade. Alguns alunos se mostravam atentos e motivados, já outros demonstravam certo desinteresse.

Todos os participantes precisaram de ajuda, solicitando aos pesquisadores esclarecimentos acerca de suas dúvidas, algumas referentes à construção, outras

referentes às teorias que envolviam a construção. O objetivo dessa atividade era construir um H_Triângulo e verificar a sua soma dos ângulos internos, bem como fazer o comparativo com o triângulo euclidiano. Para a construção do H_Triângulo, os acadêmicos utilizaram ferramentas do *software* e conceitos como eixo, ponto, círculo, reta tangente, segmento definido por dois pontos, ângulos e vértices. Isso mostra que, ao se trabalhar com as Geometrias não-euclidianas, é necessário um sólido conhecimento da Geometria Euclidiana.

Essas ferramentas e esses conceitos devem ser concebidos de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir, podendo ele então adquirir novos conhecimentos.

Na Figura 2, temos a construção do H_Triângulo. Essa construção foi realizada pelo participante A.13.

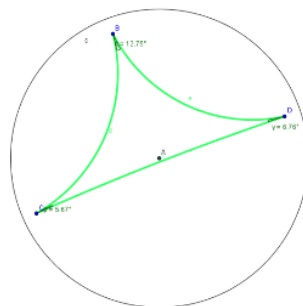


Figura 2 – Construção do H_Triângulo

Após a construção da 14ª atividade, percebemos que todos os alunos participantes da pesquisa conseguiram visualizar que a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Hiperbólica é menor que 180° , porém nem todos aceitaram essa Geometria, ficando ainda fortemente presente a ideia de uma geometria única, aquela fortemente propagada na escola.

Considerações Finais

Considerando as dificuldades enfrentadas para a inclusão efetiva das Geometrias não-euclidianas na Educação Básica, pretendíamos nesse trabalho elaborar atividades de Geometria Hiperbólica baseadas em Ferreira (2011), e aplicar tais atividades utilizando o *software* GeoGebra na formação inicial de professores de matemática.

Nessa pesquisa, pretendíamos analisar se os acadêmicos, ao construírem o triângulo da Geometria Euclidiana e o H_Triângulo da Geometria Hiperbólica no GeoGebra, conseguiriam aceitar que na Geometria Hiperbólica a soma dos ângulos internos de um triângulo não é 180° . Escolheu-se o GeoGebra, por ser um *software* livre de geometria dinâmica, bem como por ele estar implantando na rede Paraná Digital, que é um projeto

de inclusão digital das escolas públicas do Estado do Paraná. Este projeto visa disponibilizar meios educacionais por meio de computadores e da Internet, com o objetivo de melhorar a qualidade do ensino.

Após as análises das respostas da 14^a atividade, podemos dizer que o GeoGebra foi um facilitador, já que ele possibilitou que os acadêmicos visualizassem e movessem os triângulos e observassem a soma dos ângulos internos dos triângulos. Com isso, apenas 2 (dois) alunos não conseguiram aceitar e compreender o H_Triângulo e a soma de seus ângulos internos.

Temos que relacionar as aulas de matemática com *softwares*, como o Geogebra, em busca de um ensino e aprendizado mais em concordância com as inovações tecnológicas atuais, desde que estas inovações tragam contribuição para a qualidade de nosso ensino de matemática.

Referências bibliográficas

BONETE, Izabel P. *As Geometrias Não-Euclidianas em Cursos de Licenciatura: Algumas Experiências*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas, 2000. 240 f.

CABARITI, Eliane. *Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado*. 131 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

CALDATTO, Marlova Estela. *O processo coletivo de elaboração das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Paraná e a inserção das Geometrias Não Euclidianas*. 261 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2011.

FERREIRA, Luciano. *Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica: “construção do Plano de Poincaré” com o uso do software Geogebra*. 293 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2011.

GREENBERG, Marvin Jay. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 2. ed. California: Santa Cruz, 1973. 400p.

LOVIS, Karla Aparecida. *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que fazem os professores*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Paraná 2009. 147f.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do. *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica*. Curitiba, p. 84, 2008.

SANTALO, Luis A. Matemática para não-matemáticos. In: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Org.). *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Tradução: Juan Acuna Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006.

SANTOS, Talita Secorun dos. *A inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica*. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2008.