

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA PARA A REGRA DE L'HOPITAL COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Francisco Regis Vieira Alves – Hermínio Borges Neto
fregis@ifce.edu.br – herminio@multimeios.ufc.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE
Universidade Federal do Ceará - UFC

Modalidad: Comunicación Breve

Nivel educativo: Universitario

Palabras clave: Interpretación geométrica, Regra de L'Hopital, Geogebra, Indeterminação matemática.

Resumo

A regra de L'Hopital permite que se evite o comportamento, em certos casos, imprevisível, de uma grande classe de funções no Cálculo em Uma Variável Real. Segundo alguns estudos, registram-se, nas demonstrações e caracterizações possíveis da referida regra, argumentos formais que sustentam sua fundamentação em Análise Real, os quais, nem sempre são acessíveis a todos os estudantes no primeiro ano de estudos acadêmicos no Brasil. Por outro lado, no exame de indeterminações do tipo 0^0 , $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 , ∞^∞ , 1^∞ ; quando não se faz uso da tecnologia, promove-se à atividade algorítmico-procedimental, antes de um conhecimento conceitual, sobretudo, vinculado à visualização. Assim, nesta comunicação, abordamos alguns exemplos de limites, nos quais, por meio da inspeção do gráfico, conclui-se a necessidade e o entendimento da aplicação da regra, mediante a manifestação das indeterminações supracitadas, sobretudo, no quadro geométrico. A interpretação geométrica dos gráficos relacionados com as funções, cujas imagens produzem o comportamento indeterminado e/ou imprevisível, pode proporcionar, ao aprendiz, a compreensão conceitual do motivo de aplicação da regra.

1. Introdução

A regra de L'Hopital demanda considerável tempo de estudo no primeiro contato com o Cálculo nas universidades brasileiras. Na abordagem indicada por autores de livros didáticos, registramos o forte apelo ao expediente algébrico e, por outro lado, ações isoladas do uso da tecnologia, com vistas à significação geométrica da regra que pode proporcionar o tratamento das *indeterminações matemáticas* de modo diferenciado.

Assim, neste trabalho, com o auxílio do *software Geogebra*, trazemos a discussão de alguns exemplos de limites vinculados ao surgimento das principais categorias dessas indeterminações. As situações problema envolvendo o cálculo destes limites não apresentam caráter de ineditismo, entretanto, a discussão, com o apoio do *software*, visa à promoção e o estímulo, por parte dos professores, de uma abordagem e/ou mediação didática diferenciada, que suaviza o caráter hegemônico de tarefas algorítmicas.

2. Sobre a Regra de L'Hospital nos livros didáticos no Brasil

No Brasil, os livros didáticos usuais (GUIDORIZZI, 2010; LEITHOLD, 1994; STEWART, 2004; SIMMONS, 1987) adotados no ensino deste conteúdo, privilegiam, de modo tradicional (ARTIGUE, 2002), o caráter algorítmico das tarefas e a aplicação automática do teorema que possibilita, na prática, evitarmos o tratamento direto de indeterminações ou *formas indeterminadas* do tipo 0^0 , $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 , ∞^∞ , 1^∞ , $0 \cdot (\infty)$, etc.

Nos cursos de Cálculo, a técnica conhecida que permite eliminar *indeterminações* como estas, é conhecida como *regra de L'Hopital*. Reparemos, entretanto, que a mesma “é utilizada como ferramenta para calcular limites indeterminados, sem a preocupação de uma justificativa, o que para o aprendizado matemático, é de certa forma um problema.”. (BARBOSA, 2008, p. 12).

Destacamos então seu enunciado: supondo que $f(x)$ e $g(x)$ são diferenciáveis e $g'(x) \neq 0$ próximo do ponto $x=a$ (exceto possivelmente em a). Considerando ainda

que $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty \end{cases}$ (temos uma forma indeterminada do

tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se o limite do lado direito existir (ou é $+\infty$ ou $-\infty$)

Vale observar que nas duas demonstrações mais divulgadas pelos livros didáticos (BARBOSA, 2008, p. 67), os conhecimentos de *Análise Real* são exigidos. Cabe mencionar, entretanto, um caso especial da regra (STEWART, 2001, p. 307) quando sabemos que no cálculo do limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ocorre que $f(a) = g(a) = 0$. Além disso,

f' e g' são contínuas, com $g'(a) \neq 0$. Diante destas hipóteses, escrevemos:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - 0}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

condição inicial em que $\exists \lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$. E usando ainda a continuidade das derivadas,

estabelecemos ainda que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ que possui um significado

geométrico relativo ao quociente das declividades de retas no ponto $x = a$.

Por outro lado, Lima (2006, p. 91) enfraquece as hipóteses acima, tomando apenas funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis, com $f(a) = g(a) = 0$. Segue então sua demonstração:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \neq a} \frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)-0}{x-a}}{\frac{g(x)-0}{x-a}} \stackrel{\text{definição}}{=} \frac{f'(a)}{g'(a)} \stackrel{\text{derivada}}{=} \frac{f'(a)}{g'(a)} \therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

No próximo segmento, introduziremos, em nossa discussão, a exploração do *software Geogebra*. Seu papel se destaca no sentido de proporcionar a evolução de habilidades cognitivas pertinentes à visualização, do *methaphorical insight* (OTTE, 2008), a da percepção de propriedades geométricas e topológicas no IR^2 (ALVES, 2012).

3. Explorando o significado geométrico com o *software Geogebra*

Como mencionamos na seção, anterior, as indeterminações do tipo 0^0 , $0/0$, ∞/∞ , ∞^0 , ∞^∞ , $0 \cdot (\infty)$ são costumeiramente exploradas por autores de livros. Vamos, inicialmente, discutir os seguintes limites: (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2)/(1 - \cos(x))$, (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)/\sqrt[3]{x}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x)]$, (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \text{sen}4x]^{\cot g(x)}$.

Vejamos o primeiro caso $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2)/(1 - \cos(x))$. Na figura 1, do lado esquerdo, descrevemos o gráfico da função $f(x) = (e^x + e^{-x} - 2)/(1 - \cos(x))$, descontínua no ponto $x = 0$ (divisamos uma bola aberta). A *indeterminação* $0/0$ resulta dos valores assumidos pelas funções contínuas $e^x + e^{-x} - 2$ e $1 - \cos(x)$, no ponto $x = 0$, como observamos na figura 1, do lado direito. Não existe, pois, $f(0)$ e não pode ser avaliado.

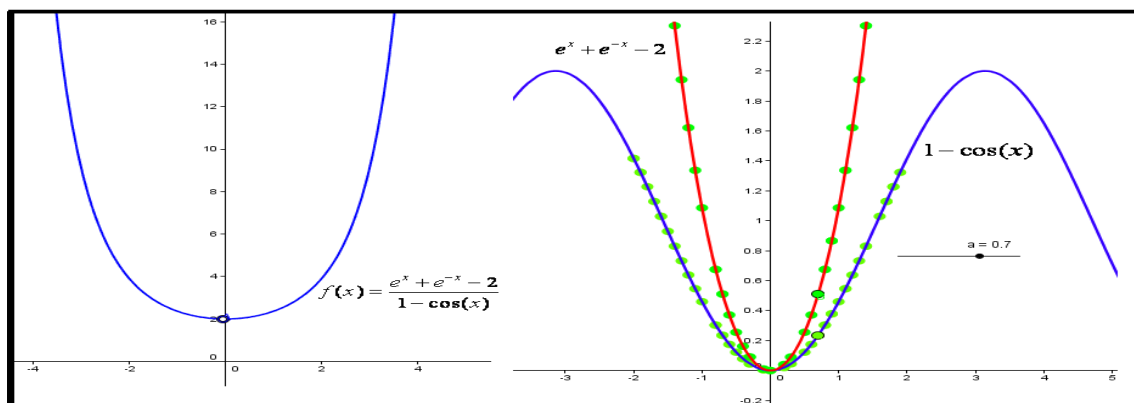


Figura 1: Descrição da manifestação da indeterminação por um via geométrica

A partir das figuras 1, do lado direito, percebemos que tanto a função $e^x + e^{-x} - 2$ como $1 - \cos(x)$ se aproximam de $y = 0$, na medida em que $x \rightarrow 0$. Pelo gráfico do lado direito, todavia, inferimos que $1 - \cos(x)$ se aproxima mais rápido de zero do que $e^x + e^{-x} - 2$. Com origem nesta constatação de natureza geométrica, evidenciamos a necessidade de aplicação da regra, ante ao comportamento do quociente $(e^x + e^{-x} - 2)/(1 - \cos(x))$.

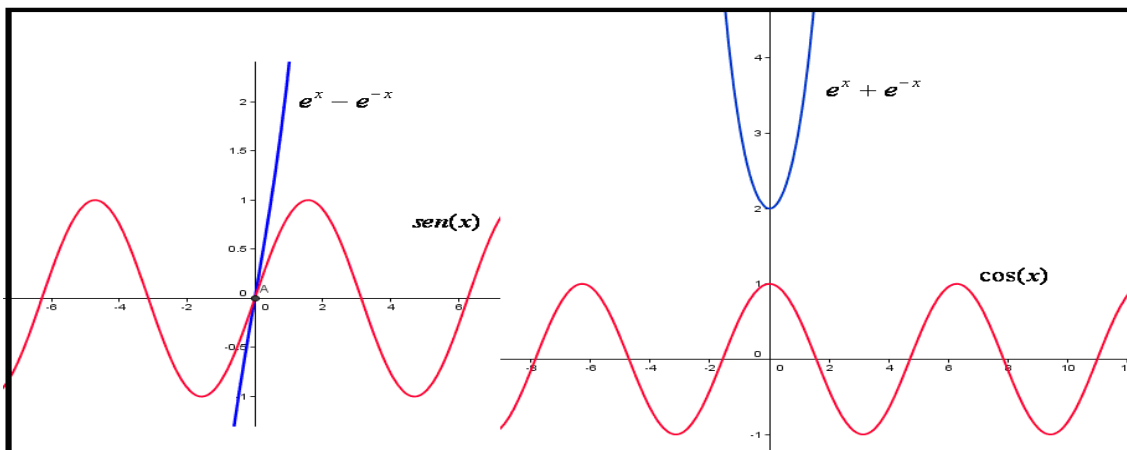


Figura 2: Identificação geométrica para a aplicação da regra de L'Hopital

Reparemos, agora, que no cálculo do limite (a), realizamos, costumeiramente, o

seguinte procedimento:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{e^0 + e^{-0}}{\cos(0)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Nesta operação, aplicamos duas vezes a *regra de L'Hospital*, todavia, a partir dos dados das figuras 1 e 2, com arrimo na análise do comportamento dos gráficos, devemos adquirir o entendimento, de modo similar ao procedimento algorítmico, sobre a necessidade de aplicação da regra duas vezes. Por fim, na figura 2 (lado direito), observamos que $e^x + e^{-x} \rightarrow 2$ e $\cos(x) \rightarrow 1$, para $x \rightarrow 0$, e não há mais *indeterminação*.

Vamos considerar agora (b). No caso do limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$, vemos, por intermédio da

figura 3 (lado esquerdo), que a imagem da função $\ln(x)/\sqrt[3]{x}$ decresce, tendendo a 0. E por intermédio do gráfico do lado direito (figura 3), depreendemos que estamos lidando com a ocorrência e/ou manifestação da seguinte forma de indeterminação ∞/∞ .

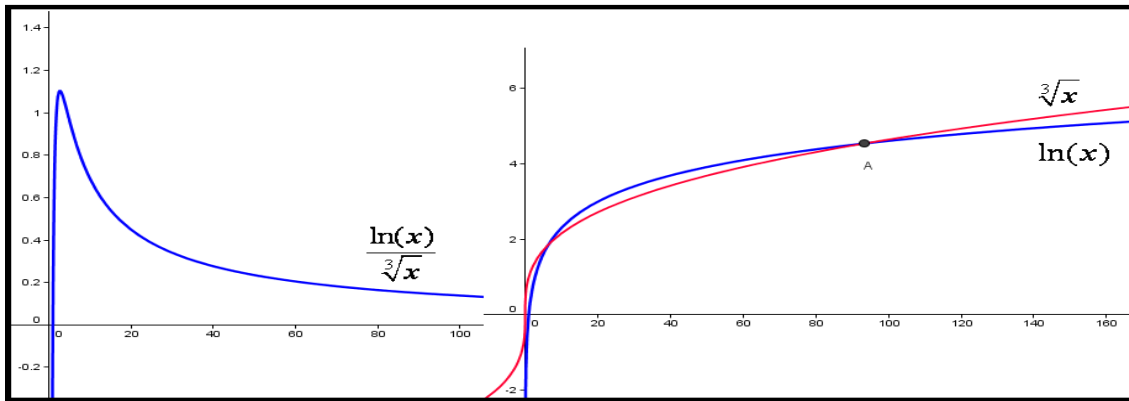


Figura 3: Com o auxílio do *Geogebra* identificamos a diferença de velocidade do crescimento da imagem da função

Por outro lado, na figura 3 (lado direito), divisamos que ambas as imagens das funções presentes na fração de (b) tenderem para $+\infty$, e, partir do ponto A, que constitui a interseção dos gráficos acima exibidos, os valores assumidos pela função do denominador $\sqrt[3]{x}$ crescem mais rapidamente do que a função $\ln(x)$ do numerador. Assim, para valores grandes de x , o símbolo ∞/∞ precisa ser interpretado de modo dinâmico e intuitivamente, como o infinito do denominador maior do que o infinito do

numerador. Aplicando o procedimento, escrevemos:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

Confrontando os dados analíticos com os de natureza gráfica, compreendemos a razão pela qual aplicamos, nesse caso, a *regra de L'Hospital* somente uma vez (figura 4).

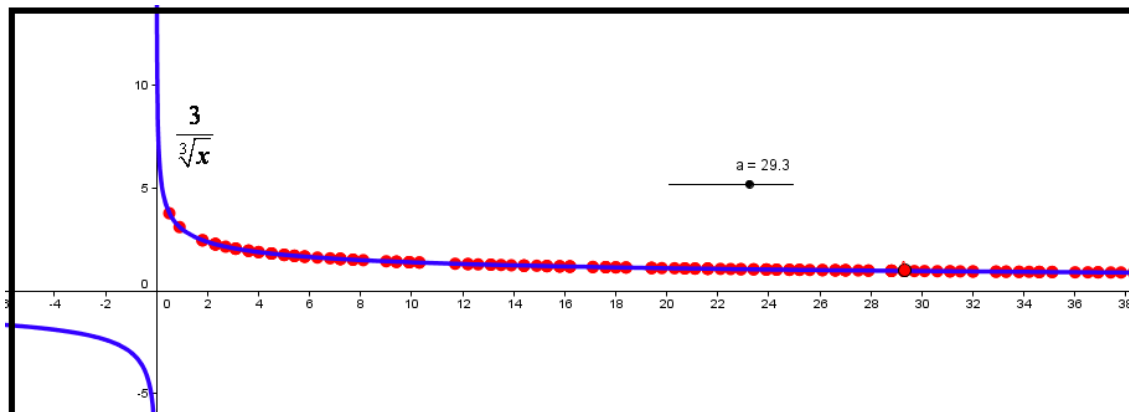


Figura 4: Comportamento de convergência para $x \rightarrow +\infty$

Na figura 4, depreendemos que, apesar de ser esperado que a imagem da função $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ se aproxime de zero, na medida em que $x \rightarrow +\infty$ (resp. $x \rightarrow -\infty$), a partir do gráfico, adquirimos o entendimento de que os valores de $x \in \mathbb{R}^+$ (eixo das abcissas) devem ser muito grandes, para que tenhamos a existência do limite e sua aproximação de zero.

No caso do limite (c), escrevemos $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot \ln(x)]$. Compreendemos o sentido geométrico do surgimento desta *indeterminação*, quando divisamos o gráfico da figura 5, lado direito. Nele, vemos que, para valores $x \rightarrow 0^+$, a função $y = x$ tende para zero, enquanto que $\ln(x) \rightarrow -\infty$. Assim, deparamos uma *indeterminação* do tipo $0 \cdot (-\infty)$.

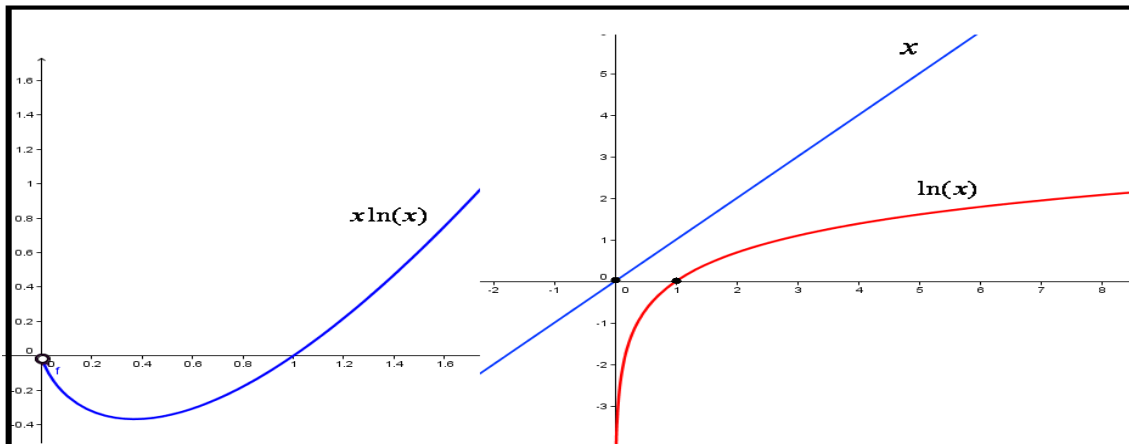


Figura 5: Descrição geométrica do comportamento da função na origem para $x \rightarrow 0^+$

Analicamente, temos: $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$. Reparemos

que este valor é, pelo gráfico da figura 5, o valor do limite, todavia, diante da indeterminação, nada se pode concluir sem o uso da *regra de L'Hospital*.

Passaremos, agora, a considerar o limite (e). Com arrimo no gráfico, adquirimos o entendimento do comportamento geométrico da função $[1 + \text{sen}4x]^{\cot g(x)}$. Neste caso, $[1 + \text{sen}4x] \rightarrow 1$, na medida em que $x \rightarrow 0^+$ e $\cot g(x) \rightarrow +\infty$. Deste modo, com apoio na visualização gráfico (figura 6), adquirimos o entendimento geométrico do surgimento da indeterminação do tipo 1^∞ . Por outro lado, analiticamente, consideremos $y = [1 + \text{sen}4x]^{\cot g(x)} \therefore \ln y = \ln [1 + \text{sen}4x]^{\cot g(x)} = \cot g(x) \cdot \ln [1 + \text{sen}4x]$. Pela *regra de L'Hopital*, consideremos ainda $\ln y = \cot g(x) \cdot \ln [1 + \text{sen}4x] = \frac{\ln [1 + \text{sen}4x]}{\text{tg}(x)}$. Segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln [1 + \text{sen}4x]}{\text{tg}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \cos(4x) / (1 + \text{sen}4x)}{\sec^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \cos(4x)}{[1 + \text{sen}4x] \sec^2(x)} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(4x)}{[1 + \text{sen}4x]} \frac{\cos^2(x)}{1} = 4 \frac{\cos(0)}{[1 + \text{sen}0]} \frac{\cos^2(0)}{1} = 4 \frac{1}{1} \frac{1}{1} = 4 \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 4. \end{aligned}$$

Usaremos, então, seguinte propriedade $y = e^{\ln_e y} = e^{\ln y}$, assim, escrevemos $\lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \text{sen}4x]^{\cot g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^4$, cujo valor indicamos na figura 7.

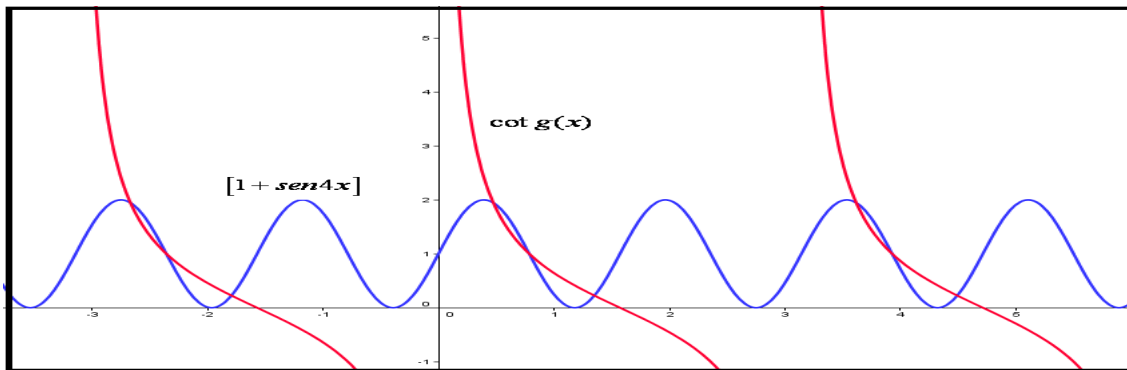


Figura 6: O significado geométrico da indeterminação do tipo 1^∞

No gráfico da figura 7, indicamos, geometricamente, a região do gráfico na qual se identifica a ocorrência de uma *indeterminação* e, conseqüentemente, a impossibilidade de avaliação do limite, sem o uso da *regra de L'Hospital*. Do lado, direito, apresentamos uma visão global do comportamento do gráfico da função $[1 + \text{sen} 4x]^{\cot g(x)}$. Pelos gráficos 6 e 7, podemos conjecturar que ocorrem infinitos pontos, nos quais, se observa a manifestação de *indeterminações* do tipo 1^∞ .

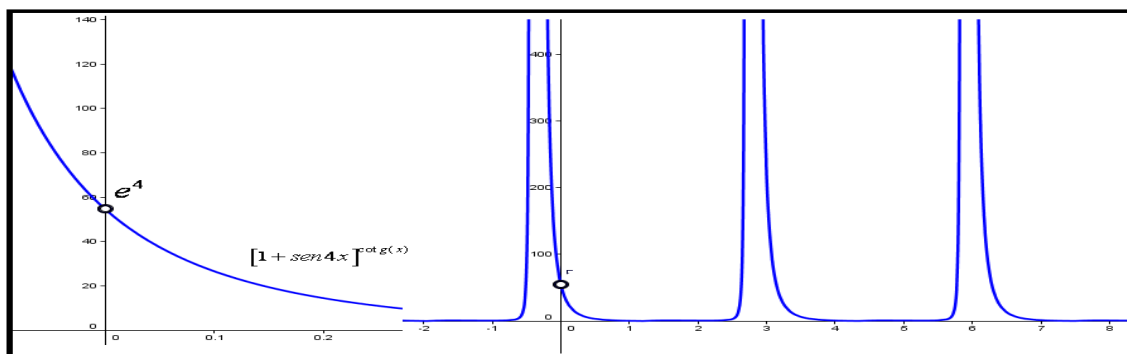


Figura 7: Análise local e global do gráfico da função com o uso do *software*

4. Considerações Finais

Alves (2012) discute as potencialidades de exploração do *Geogebra* no contexto de ensino de conceitos relacionados à *Análise Real*. Neste escrito, trazemos exemplos de interpretação geométrica de uma regra que envolve a possibilidade de, pelo menos, duas demonstrações (BARBOSA, 2008), todavia, no contexto da aprendizagem, nem sempre o entendimento da demonstração formal desta regra, implica no entendimento conceitual de propriedades geométricas relacionadas com esse enunciado.

Neste escrito, apesar de não possuímos a pretensão de registrar nenhum ineditismo relacionado aos limites (a), (b), (c) e (d), discutidos, com o auxílio do *Geogebra*, a descrição de um cenário de aprendizagem que possibilita ao estudante o entendimento acerca da manifestação da noção de *indeterminação*, sobretudo, no quadro geométrico. Este fato, evita um domínio restrito ao campo algébrico de sua aplicação, e que vem

sendo registrado como uma tônica predominante por parte de autores de livros didáticos (HEREDIA, 2007) e no *locus* acadêmico (ARTIGUE, 2002).

Referencias bibliográficas

Alves, F. R. V. (2012). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, 1. 65-79, Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index>. Acessado em: 04 de Abril de 2012.

Artigue, M. (2002). Analysis. In: (Eds.). Tall, David. *Advanced Mathematical Thinking*, Capítulo 11, pp.167-196. New York: Klumer Academic Publishers.

Barbosa. Everaldo. F. (2008). A regra de L'Hopital: análise histórica da regra de L'Hospital (dissertação) – Pós graduação em Matemática. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 90p.

Bridoux, S. (2011). Enseignement de premières notions de topologie à l'université : une étude de cas. (Thèse de doctorat) – École de doctorat Savoir Scientifiques. Grenoble : Université Joseph Fourier, 339p.

Guidorizzi, H. (2010). *Um curso de Cálculo*. v. 1, Rio de Janeiro: Ao Livro técnico.

Heredia, A. S. B. (2007). Obstáculos didáticos y el discurso explicativo de los libros de texto de Cálculo. (Tesis en Matemática Educativa) - Instituto Politécnico Nacional do Mexico. Mexico D.F.: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada, 140p.

Leithold, Louis. (1999). *Um curso de Cálculo com Geometria Analítica*. v. 1, São Paulo: Harbra Editora.

Lima. E. L. (2006). *Curso de Análise*. v. 1, Rio de Janeiro : SBM, 430p.

Maurice, L. (2000). Les idées d'élèves du collégial à propos des limites de fonctions rationnelles faisant intervenir le zéro et l'infini (thèse de doctorat), Québec: Université Laval, 234p.

Otte, M. (2008). Metaphor and contingency. In: Radford, L.; Schübring, G. & Seeger, F. *Semiotics in Mathematics Education*, Capítulo 3, pp. 63-82. Rotterdam: Sense Publishers.

Simmons, G. F. (1987). *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Editora McGraw-Hill, 829p.

Stewart, J. (2004). *Cálculo*. v. 2, 4ª edição, São Paulo: Thompson, 2004.