APORTES TEÓRICOS DE PESQUISAS QUE UTILIZARAM O GEOGEBRA

Celina A. A. P. Abar
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil
abarcaap@pucsp.br

Modalidade: Conferência plenária
Nivel educativo: Não específico
Palavras chave: Educação Matemática, Teoria das Situações Didáticas, GeoGebra, Tecnologias da Informação e Comunicação

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar as pesquisas realizadas entre 2009 e 2011 com o uso do GeoGebra no Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, as teorias utilizadas, o papel do GeoGebra em cada uma delas, que considerações foram feitas sobre seu uso, os propósitos de cada autor e os resultados alcançados. Considerando aspectos da análise temática, verificou-se que dos dezenove trabalhos, sete deles utilizaram como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Essas sete pesquisas são objetos de análise deste estudo e mostram que a utilização desta teoria pode ser considerada como uma alternativa na busca de caminhos para a construção de situações com o uso do GeoGebra que auxiliem na superação das dificuldades do ensino e da aprendizagem da Matemática. As conclusões evidenciam que outras tecnologias utilizadas nos distintos momentos de algumas pesquisas tiveram caráter complementar e os autores dos trabalhos puderam buscar, ao longo de toda a estratégia, a melhor solução para as atividades propostas em um contexto que admite a incorporação de mídias tradicionais e digitais.

1. Introdução

A proposta desse trabalho é apresentar, considerando aspectos da análise temática, as pesquisas realizadas entre 2009 e 2011 no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática com o uso do GeoGebra. e deste modo verificar-se os aportes teóricos utilizados, qual o papel do GeoGebra em cada uma das pesquisas, que considerações foram feitas sobre seu uso, os propósitos de cada autor e os resultados alcançados.

Assim, as seguintes questões orientaram a análise realizada:

- Qual objeto matemático trata a pesquisa?
- Qual a proposta apresentada?
- Quais os aportes teóricos utilizados?
- Quais as conclusões obtidas?

Neste estudo, não a análise temática como um todo, mas alguns de seus aspectos serviram de suporte para o trabalho desenvolvido, pois segundo Minayo (2004), operacionalmente, a análise temática desdobra-se em três etapas: pré-análise; exploração do material; tratamento dos resultados obtidos e interpretação.

Zanella (2009) salienta que:

> Na análise temática você deve compreender a mensagem do autor, mas sem interferir nas ideias preconizadas por ele. Isto quer dizer que você deve ouvir o que o autor do texto quer dizer, sem emitir julgamento ou crítica. Então, inicialmente procure identificar o tema, releia o texto e procure captar os motivos, as dificuldades, isto é, a determinação do problema que levou o autor a escrever sobre tal assunto. Nesse sentido, é importante que você faça algumas perguntas que possibilitem identificar o problema, do tipo: "Qual a dificuldade que será resolvida? Qual o problema a ser solucionado?" A identificação do problema revela a ideia principal defendida pelo autor. A ideia central do texto sempre é uma oração, uma proposição, e expressa a linha de raciocínio utilizada para transmitir a mensagem, isto é, o processo lógico do pensamento do autor. Tendo evidenciado a estrutura lógica do texto, você pode esquematizar e construir um roteiro sobre as ideias (principal e secundárias) expostas no texto.(p.31)

Assim, seguindo alguns passos sugeridos na análise temática, verifica-se que de 2009 até 2011 foram defendidos no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, dezenove trabalhos trazendo em comum o desafio do uso do GeoGebra. Procurou-se identificar que aspectos e dimensões foram privilegiados e de que forma e em que condições foram produzidas tais pesquisas. Para a análise pretendida, cada trabalho foi lido como um todo, com a finalidade de adquirir uma visão global e entender os objetivos, procedimentos e resultados de cada um.

2. Justificativa do estudo

Embora outros trabalhos no campo da Educação Matemática tenham sido realizados, no mesmo programa de estudos Pós Graduados[1], com o uso de outros *softwares* que permitem a interação, a justificativa para proceder este estudo é divulgar o conhecimento acerca das pesquisas, em específico com o uso do GeoGebra, refletir em nível de pós-graduação sobre a produção obtida e justificar a relevância do uso do GeoGebra na Educação Matemática.

Soares (1989) afirma em sua pesquisa que:

> Essa compreensão do estado de conhecimento sobre um tema, em determinado momento, é necessária no processo de evolução da ciência, a fim de que se ordene periodicamente o conjunto de

[1] http://www.pucsp.br/pos/edmat

> informações e resultados já obtidos, ordenação que permita indicação das possibilidades de integração de diferentes perspectivas, aparentemente autônomas, a identificação de duplicações ou contradições, e a determinação de lacunas e vieses. (1989, p. 3)

Por outro lado, segundo Ferreira (2002), conhecer o já construído e produzido permite a indicação de outras possibilidades de pesquisas para o que ainda não foi feito, procurando dar conta de determinado saber que se avoluma rapidamente. Como exemplo, pode-se citar o volume de trabalhos sobre o tema aqui analisado, apresentados na 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra e publicados na Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo[2].

Ferreira (2002) ainda salienta que:

> Nos últimos vinte anos, com o fortalecimento da produção acadêmica-científica, com pesquisas que emergem em diferentes programas e pós-graduação pelo país, um movimento se transforma em empenho de diferentes entidades (faculdades e associações de financiamento de pesquisas) para o estabelecimento de uma política de divulgação de seus trabalhos científicos. (p.260)

Todas as pesquisas aqui analisadas trazem em comum a opção didática do uso do GeoGebra na Educação Matemática, foram realizadas por professores em pleno exercício de sua prática e, deste modo, dão respostas a uma classe de profissionais, professores da escola básica, que vê a universidade como uma prestadora de serviços que pode subsidiar a sua prática docente e cujos trabalhos não ficam restritos às prateleiras das bibliotecas das universidades.

3. Procedimentos metodológicos

Inicialmente, os trabalhos foram agrupados de acordo com o conteúdo matemático explorado, identificado logo no título de cada um. Contudo, como orienta Severino (2001):

> Nem sempre o título da unidade dá uma ideia fiel do tema. Às vezes apenas insinua por associação ou analogia; outras vezes não tem nada a ver com o tema. (...) é preciso captar a perspectiva de abordagem do autor: tal perspectiva define o âmbito dentro do qual o tema é tratado, restringindo-o a limites determinados. (p.54)

Desse modo, em um segundo momento, foi feita a leitura dos respectivos resumos com o objetivo de identificar a questão de pesquisa, os objetivos, os tipos de pesquisas realizadas: se quantitativa ou qualitativa, os respectivos públicos envolvidos e os aportes teóricos e metodológicos utilizados.

[2] http://revistas.pucsp.br/IGISP

Garrido (1993, apud FERREIRA, 2002, p. 262), na apresentação do Catálogo do Instituto de Psicologia da USP prescreve o que deve constar em cada resumo:

> O objetivo principal de investigação; a metodologia e procedimento utilizado na abordagem do problema proposto; o instrumento teórico, técnicas, sujeitos e métodos de tratamento dos dados; os resultados; as conclusões e, por vezes, as recomendações finais.

Na leitura e análise dos resumos foi possível identificar o objeto matemático subjacente à pesquisa, os aportes teóricos e metodológicos e o público alvo. No entanto, foi necessária uma leitura minuciosa para atender ao objetivo de verificar qual o papel do GeoGebra em cada pesquisa, assim como as considerações feitas sobre seu uso, os propósitos de cada autor e os resultados alcançados.

Dos dezenove trabalhos, sete deles utilizaram como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau e essas pesquisas serão objetos de análise neste trabalho.

4. Sobre o *sofware* GeoGebra

O *software* GeoGebra[3] foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, diretor do projeto GeoGebra com sede na Universidade Johannes Kepler, localizada em Linz, Áustria. De acordo com Hohenwarter e Preiner (2007), o *software* GeoGebra foi vencedor de vários prêmios internacionais com tradução para mais de 50 diferentes linguagens, incluindo a língua portuguesa.

Os *softwares* que trabalham apenas com construções geométricas como pontos, linhas e todas as secções cônicas, são classificados por Hohenwarter e Preiner (2007) como *Softwares* de Geometria Dinâmica (Dynamic Geometry *Software* – DGS). Os autores pontuam que o GeoGebra, além do trabalho com geometria, possui características típicas de um Sistema de Álgebra Computacional (Computer Algebra System – CAS).

Pelo fato do GeoGebra servir para o trabalho de geometria, álgebra e cálculo, os autores o classificam como um *Software* de Matemática Dinâmica (Dynamic Mathematics *Software* – DMS), para o ensino e a aprendizagem de Matemática e para qualquer nível escolar.

Hohenwarter e Preiner (2007) afirmam que a ideia básica do GeoGebra é provir ao menos de duas representações cada objeto matemático nas suas janelas de álgebra e de visualização.

[3] http://www.geogebra.org

5. Pesquisas com aporte teórico em Guy Brousseau

Considerando uma situação didática como o conjunto das diferentes formas de apresentação do conteúdo matemático, verifica-se que a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau está presente em sete das pesquisas apresentadas.

Essa presença significativa no aporte teórico da TSD pode ser justificada pelo fato dessa teoria apoiar e orientar a construção de modelos de situações utilizadas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Almouloud (2007, p. 32) afirma que "o objetivo da teoria das situações é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos".

Deste modo a *situação didática* deve ser o objeto central de estudo, pois permite a identificação das interações que ocorrem entre professor e aluno mediadas pelo saber nas situações de ensino propostas.

Segundo Brousseau (1986, apud FREITAS, 1999, p. 67):

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) O trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes

Almouloud (2007) ressalta que:

> A *situação adidática*, como parte essencial da *situação didática*, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este, condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar. (p. 33)

Percebe-se, desta forma, que existem determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais há um trabalho independente do aprendiz sobre uma influência oculta de uma intenção de ensino e nenhum controle direto por parte do professor. Nessas condições, encontra-se a *situação adidática,* que pode ser considerada como um ambiente exemplar em uma situação de ensino na qual "o aluno não distingue de imediato, na situação, o que é de origem adidática ou de origem didática". (ALMOULOUD, 2007, p.35)

Na definição de Brousseau (1986, apud FREITAS, 1999):

> Quando o aluno se torna capaz de por em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação a-didática.(p.69)

Segundo Almouloud (2007):

> Para analisar o processo da aprendizagem, a teoria das situações observa e decompõe esse processo em quatro fases diferentes, nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber. Nessas fases interligadas, podem-se observar tempos dominantes de ação, de formulação, de validação e de institucionalização. (p.36)

Freitas (1999) caracteriza as quatro fases no excerto a seguir:

> Situações de ação: quando o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional. (p.78)
> Situações de formulação: o aluno já utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, podendo ainda utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar esse uso da teoria.(p.79)
> Situações de validação: são aquelas em que o aluno já utiliza mecanismos de prova e onde o saber é usado com esta finalidade.(p.80)
> Situações de institucionalização: visam estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento. (p.82)

As quatro situações acima mencionadas podem ser identificadas nos trabalhos analisados e, em geral, nas situações de ação os sujeitos das pesquisas interagem com o *software* GeoGebra por meio dos movimentos dos objetos construídos. Nas situações de formulações, os participantes observam os resultados na janela algébrica, elaboram conjecturas ou conversam entre si sobre hipóteses de resolução. Nas ações de validação, eles compreendem o conceito explorado e validam as hipóteses levantadas. As ações de institucionalização foram realizadas pelo professor pesquisador em interação com os pesquisados.

As conclusões evidenciam que as diversas tecnologias utilizadas nos distintos momentos de algumas pesquisas (lápis, papel, calculadora, *software* GeoGebra) tiveram caráter complementar e os pesquisados puderam buscar, ao longo de toda a estratégia, a melhor solução para as atividades propostas.

A conclusão dos trabalhos sobre a exploração de aspectos gráficos relacionados, em especial ao estudo das funções evidenciam que as atividades desenvolvidas utilizando o *software* GeoGebra foi uma estratégia eficiente para atingir os objetivos propostos.

Importante observar que uma das questões primordiais da TSD, na qual o papel do professor é fundamental, é a forma de apresentação do conhecimento num contexto que proporcione ao aluno um verdadeiro sentido, estabelecendo correlações com outros saberes para que possam ser reconhecidos em outras situações.

No **Quadro 1** estão identificadas as pesquisas realizadas com aporte teórico na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e as respectivas situações de ação, formulação, validação e institucionalização que foram delineadas pelos próprios autores. Uma análise crítica das situações propostas pelos autores pode ser realizada com maior rigor. No entanto esta análise não se configura como objetivo deste trabalho que apresenta um "estado de conhecimento sobre um tema em um determinado momento" como salienta Soares (1989).

As pesquisas com o uso do GeoGebra tem se avolumado nos últimos tempos e a apresentação periódica de tais pesquisas podem indicar possibilidades para a prática do professor. No entanto é importante a reflexão do professor sobre as propostas apresentadas que pode permitir "a identificação de duplicações ou contradições, e a determinação de lacunas e vieses" (Soares, 1989).

Apresentadas e analisadas as pesquisas com aporte teórico em Guy Brousseau, as demais utilizaram estratégias com suporte em alternativas teóricas que também permitiram o alcance dos respectivos objetivos.

Assim, este estudo procura trazer para o leitor, apenas as ideias básicas das teorias que deram suporte às investigações realizadas. Pode-se constatar que os aportes teóricos tiveram um papel fundamental na criação das propostas apresentadas com a mediação do *software* GeoGebra.

			propostas.	função dos erros cometidos pelos alunos no momento um. Eles puderam compreender e formular diversos elementos que permitiram transformar o conhecimento implícito em conhecimento explícito.	refinando a formulação, discutindo e refutando conjecturas, de modo a consolidar as ideias adquiridas	palavras com o uso do GeoGebra: arrastar e movimentar, manter e conservar, intersecção, etc. Foi possível identificar o momento correto para formalizar o saber adquirido, reforçando e reposicionando seu *status* de saber matemático.	atividades propostas compreendendo um contexto que admite a incorporação de mídias tradicionais e digitais.
Estratégias pedagógicas com uso de Tecnologias de Informação e Comunicação: uma abordagem para a construção do conhecimento em operações aritméticas básicas e nas chamadas "regras de sinais	Operações aritméticas	EF Alunos com extrema defasagem de aprendizagem	Investigar em que medida uma estratégia pedagógica com o uso dos três instrumentos de pesquisa (lápis e papel, calculadora e GeoGebra) pode fomentar a aprendizagem dos conceitos envolvidos nas chamadas "regras de sinais" quando utilizadas em conjunto com as operações aritméticas.	Em cada atividade com o uso do GeoGebra: leitura do instrumento de pesquisa. Utilização da ferramenta tecnológica a qualquer momento: uso do mouse e movimento de pontos. Interpretar a operação solicitada.	Em cada atividade com o uso do GeoGebra os alunos, ao visualizarem a resolução, passam a generalizar os conceitos explorados sem justificativas. Elaboram tentativas de conjecturas.	Desenvolvem mecanismos de prova do tipo empirismo ingênuo, ou seja, verificação, para validar as formulações. Resolvem os problemas com o auxílio do GeoGebra e no movimento do seletor compreendem o conceito explorado e validam as hipóteses levantadas.	O professor discute com os alunos sobre as respostas encontradas e demonstra geometricamente os cálculos solicitados, facilitando a compreensão do significado de oposto ou simétrico.	A estratégia pedagógica adotada permitiu que os estudantes compreendessem para além das chamadas regras de sinais, o conceito de simétrico de um número inteiro, empregando-o para melhorar o próprio rendimento em relação às operações no âmbito deste conjunto. Os alunos tomaram para si a responsabilidade pela construção do conhecimento.

			significativo.	localizar ferramenta de adição de vetores.		especificando melhor os objetos de entrada e saída.		depois da situação de institucionalização.
Função afim: uma sequência didática envolvendo atividades com o Geogebra	Função afim	EF	Desenvolver uma sequência de ensino que contribua para o desenvolvimento da capacidade de expressar algébrica e graficamente a dependência de duas variáveis de uma função afim e reconhecer que seu gráfico é uma reta, relacionando os coeficientes da equação da reta com o gráfico.	Leitura das atividades.	Discussões entre pares de alunos e simulações no GeoGebra.	Respostas registradas pela equipe em fichas.	Por meio de debates para que os alunos socializassem os resultados obtidos. Uma sequência de ensino extra com o objetivo de observar se os alunos utilizavam as noções institucionalizadas.	Objetivos propostos alcançados.
O uso reconstrutivo do erro na aprendizagem de simetria axial: uma abordagem a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias	Transformações Geométricas: simetria axial	EF	Atividades relativas às transformações isométricas, mais especificamente ligadas à simetria axial.	Realizadas com papel e lápis, e posteriormente no GeoGebra. Os alunos puderam buscar, ao longo de toda a estratégia, a melhor solução para as atividades	Momento um, com papel e lápis: identificar o que os alunos conhecem sobre simetria axial e sobre o método de construção com régua e compasso. Momento dois, no GeoGebra: preparado em	Categorias de análise: erros cometidos pelos alunos na consecução das atividades e sua reconstrução. Os alunos puderam superar a validação empírica obtida anteriormente,	Os alunos destacaram as possibilidades de movimentação e verificação das construções, principalmente quando tinham que realizar comparações entre segmentos e figuras. Também foi evidenciado por eles o conhecimento de novas	As diversas tecnologias utilizadas nos distintos momentos da pesquisa tiveram caráter complementar. TSD: os sujeitos puderam buscar, ao longo de toda a estratégia, a melhor solução para as

			propostas.	função dos erros cometidos pelos alunos no momento um. Eles puderam compreender e formular diversos elementos que permitiram transformar o conhecimento implícito em conhecimento explícito.	refinando a formulação, discutindo e refutando conjecturas, de modo a consolidar as ideias adquiridas	palavras com o uso do GeoGebra: arrastar e movimentar, manter e conservar, intersecção, etc. Foi possível identificar o momento correto para formalizar o saber adquirido, reforçando e reposicionando seu *status* de saber matemático.	atividades propostas compreendendo um contexto que admite a incorporação de mídias tradicionais e digitais.
Estratégias pedagógicas com uso de Tecnologias de Informação e Comunicação: uma abordagem para a construção do conhecimento em operações aritméticas básicas e nas chamadas "regras de sinais	Operações aritméticas	EF Alunos com extrema defasagem em de aprendizagem	Investigar em que medida uma estratégia pedagógica com o uso dos três instrumentos de pesquisa (lápis e papel, calculadora e GeoGebra) pode fomentar a aprendizagem dos conceitos envolvidos nas chamadas "regras de sinais" quando utilizadas em conjunto com as operações aritméticas.	Em cada atividade com o uso do GeoGebra: leitura do instrumento de pesquisa. Utilização da ferramenta tecnológica a qualquer momento: uso do mouse e movimento de pontos. Interpretar a operação solicitada.	Em cada atividade com o uso do GeoGebra os alunos, ao visualizarem a resolução, passam a generalizar os conceitos explorados sem justificativas. Elaboram tentativas de conjecturas.	Desenvolvem mecanismos de prova do tipo empirismo ingênuo, ou seja, verificação, para validar as formulações. Resolvem os problemas com o auxílio do GeoGebra e no movimento do seletor compreendem o conceito explorado e validam as hipóteses levantadas.	O professor discute com os alunos sobre as respostas encontradas e demonstra geometricamente os cálculos solicitados, facilitando a compreensão do significado de oposto ou simétrico.	A estratégia pedagógica adotada permitiu que os estudantes compreendessem para além das chamadas regras de sinais, o conceito de simétrico de um número inteiro, empregando-o para melhorar o próprio rendimento em relação às operações no âmbito deste conjunto. Os alunos tomaram para si a responsabilidade pela construção do conhecimento.

Situações de aprendizagem: circunferência, mediatriz e uma abordagem com o Geogebra	Lugar geométrico	EF e EM	Sequência didática com o objetivo da construção dos conceitos de circunferência e mediatriz, sob o ponto de vista de lugares geométricos por meio de lápis e papel, e o uso do GeoGebra.	Leitura e interpretação do enunciado das questões, análise da ação proposta, manipulação das ferramentas do GeoGebra,	Desenvolvem estratégias para possíveis soluções por meio de esboços no papel e pelo uso do GeoGebra, inserindo pontos e editando.	Tentativa de convencimento aos demais de que as estratégias estão corretas e também na verificação no GeoGebra, por meio do recurso de arrastar e quando a construção "desmanchava".	O professor organiza as conclusões apresentando a solução com o uso do GeoGebra.	A intervenção mediada pelo GeoGebra auxiliou os estudantes na superação dos problemas encontrados, favorecida pela proposta colaborativa das situações didáticas planejadas.
Ambiente informatizado: para o aprofundamento da função quadrática por alunos da 2ª série do Ensino Médio	Função polinomial de segundo grau	EM	Desenvolver um ambiente informatizado para que, por meio de uma sequência de atividades, o aprofundamento dos conhecimentos relacionados à função polinomial de segundo grau seja favorecido.	Movimento dos seletores. Observam as modificações nos registros de representação algébrica e gráfica.	Registram suas anotações.	Discutem entre os pares as conjecturas	O professor expõe suas definições por meio de vídeos e pela própria fala, esclarecendo a diferença entre registros algébricos e gráficos.	Um ambiente informatizado. As atividades propostas favoreceram a compreensão dos registros de representação algébrica e gráfica, além do aprofundamento dos conhecimentos relacionados ao objeto matemático da pesquisa.

6. Conclusão

Todas as pesquisas realizadas entre 2009 e 2011, com o uso do GeoGebra, no Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática podem servir de referência para os professores que ensinam matemática e pretendem utilizar o GeoGebra na sua prática docente pois permitem uma reorganização dos conteúdos matemáticos trabalhados.

Pode-se concluir que a utilização dos aportes teóricos em Guy Brousseau e outros pesquisadores, pode ser considerada como uma importante alternativa na busca de caminhos para a construção de situações que auxiliem na superação das dificuldades do ensino e da aprendizagem matemática.

As pesquisas[4] evidenciam que para um professor utilizar uma ferramenta tecnológica como suporte para o ensino da matemática é aconselhável que ele determine quais objetivos quer alcançar, qual conhecimento matemático pretende proporcionar aos seus alunos e qual ferramenta tecnológica pode contribuir para isso. Outra constatação é que o uso de recursos como papel, lápis, régua, etc. foi importante e complementar. Por isso, essas ferramentas não podem ser descartadas por completo.

Do mesmo modo, os pesquisadores, por meio das institucionalizações, ao assumir um papel ativo nos respectivos processos e sem retirar a liberdade dos pesquisados, permitiram que os alunos conjecturassem, experimentassem, questionassem e mostrassem independência no uso do GeoGebra ao ponto de desenvolverem estratégias próprias.

A análise e a interpretação dos sete trabalhos aqui apresentados mostraram que houve a construção do saber matemático pelos sujeitos das pesquisas na interação com o GeoGebra, colaborando com o processo de aprendizagem do respectivo objeto matemático explorado e revelando que o uso das tecnologias como mediadoras no processo de aprendizagem pode subsidiar estratégias pedagógicas para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

[4] As pesquisas apresentadas podem ser acessadas em http://www.pucsp.br/geogebrasp/pesquisa_publicacoes.html

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: Ed. UFPR,

FERREIRA, Norma Sandra de Almeida. (2002). As Pesquisas denominadas Estado da Arte. *Educação & Sociedade*, p.257-272, ano XXIII n°79, Campinas. Disponível em www.scielo.br/pdf/es/v23n79/10857.pdf . Acesso em: 14 abril 2012.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. (1999). *Situações Didáticas, Educação Matemática* - Uma introdução. Série Trilhas, Editora da PUC-SP.

GARRIDO, Elsa. (1979). *A técnica cloze e a compreensão da leitura: Investigação em textos de estudos sociais para a 6ª série.* Dissertação de mestrado, USP. São Paulo.

HOHENWARTER, Markus, PREINER, Judith. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. The Journal of Online Mathematics and Its Applications. Disponível em: http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html. Acesso em: 17 abr. 2012.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. (2004). *O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde.* 8ª ed. São Paulo: Hucitec.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. (2004). *O Desafio do conhecimento* – Pesquisa Qualitativa em Saúde. Resenha disponível em http://www.qir.com.br/?p=2906 . Acesso em 23/04/2012.

SEVERINO, Antonio Joaquim. (2001). *Metodologia do trabalho científico*. São Paulo: Cortez & Moraes.

SOARES, Magda. (1989). *Alfabetização no Brasil* – O Estado do conhecimento. Brasília: INEP/MEC.

ZANELLA, Liane Carly Hermes. (2009). *Metodologia de estudo e de pesquisa em administração* / Liane Carly Hermes Zanella. Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração / UFSC; [Brasília]: CAPES: UAB. Disponível em: http://portal.virtual.ufpb.br/biblioteca-virtual/files/pub_1291089407.pdf Acesso em 23/04/2012.

AZAR, PROBABILIDAD Y GEOGEBRA

Autores: Grupo de Matemática en Escuelas de Innovación
eimat@googlegroups.com
Escuelas de Innovación-Programa Conectar Igualdad-ANSES-Argentina

Modalidad: T
Nivel educativo: Medio
Palabras Clave:Frecuencia, Probabilidad, Muestra, Geogebra

RESUMEN:

El objetivo de este taller es analizar el comportamiento de la frecuencia de aparición de las distintas caras de un dado al ser arrojado. Esto se realiza mediante una serie de actividades, tratadas a partir de la utilización de Geogebra como herramienta de modelización. Buscando mostrar su potencialidad y limitaciones a la hora de introducir la noción de probabilidad. Intentaremos preguntarnos sobre las posibilidades que este enfoque permite para introducir distintas estrategias de aprendizaje referidas a la noción de azar. Así como los cambios que la potencia de cálculo de las computadoras nos presentan a la hora introducir un trabajo sobre gráficos de frecuencias el cual abre un marco muy poco explorado dentro de la enseñanza de la probabilidad. Se propone que los docentes realicen una serie de problemas en los que se les plantea trabajar con la capacidad de acumular información que presentan las computadoras como medio para poder realizar previsiones y compararlas con gráficos sobre mayor cantidad de datos. Intentaremos mostrar que este enfoque permite potenciar una aproximación menos abrupta a la noción clásica de probabilidad.

OBJETIVOS:

Los objetivos para el desarrollo del taller son:

- Desarrollar una secuencia de actividades pensadas para abordar nociones de probabilidad.
- Reflexionar sobre la potencialidad de GeoGebra para modelar y simular experimentos de situaciones probabilísticas.
- Discutir en qué medida esto ayuda a entender situaciones contraintuitivas.
- Reflexionar sobre la pertinencia de GeoGebra como medio para introducir la probabilidad en la escuela media desde un enfoque frecuentista.

DESARROLLO:

Cada vez es más amplio el consenso que ve al "enfoque frecuencial" de la probabilidad, el cual facilita experimentar y/o jugar, como una entrada apta para desarrollar la intuición en probabilidades:

"El gran número de paradojas estocásticas puede confundir incluso a los expertos. Por ello, es más importante construir intuiciones correctas en este campo que en ningún otro. Por ello parece necesario ofrecer a los alumnos actividades estocásticas, en forma de juegos y experimentos." (Batanero, Contreras, Díaz y Arteaga, 2009)

Desde este punto de vista el trabajo con GeoGebra presenta ventajas que creemos aportan a mejorar la dinámica de estos juegos y experimentos dado que al docente hoy se le presenta como dificultad al enseñar probabilidad, la introducción del concepto de "medida de cuán factible es un evento". Esto se presenta al comienzo mismo del tema en cuestión pues la medida es dada pero no se suele problematizar "el por qué". Con frecuencia, luego de un trabajo sobre combinatoria, se pasa de forma casi automática a trabajar con cálculos de probabilidad en espacios equiprobables. Se suele plantear a continuación un trabajo con fracciones a partir de la idea "casos favorables sobre casos totales", sin embargo este concepto no tiene, en general, una exploración y un trabajo matemático previo, es una definición dada por el docente. Las actividades del presente taller apuntan a salvar la distancia existente entre las actividades básicas de conteo y las de cálculos de probabilidades.

Los problemas que trabajaremos en el taller se plantearon en el contexto de las capacitaciones del proyecto Escuelas de Innovación del Programa Conectar Igualdad. Pensamos que, más allá de que en este contexto se trabajó con docentes, estos problemas tienen una fuerte potencialidad para el trabajo con estudiantes de nivel medio, y bajo esa perspectiva se analizaron en las capacitaciones.

Se trabajará con una simulación de lanzamientos de un dado. Se pueden volver a realizar las tiradas las veces que se quiera. Se busca que a partir de la realización de una corrida y, observando el gráfico y los datos de la pantalla, los estudiantes respondan una serie de preguntas para familiarizarse con el problema y a partir de ahí se plantea una actividad tendiente a introducir la noción de probabilidad.

En otro grupo de preguntas se busca que el análisis de los gráficos se centralice en su aspecto

dinámico. Mediante la comparación de las distintas producciones de la simulación, se pretende que los participantes puedan construir una descripción que generalice el comportamiento del gráfico. Siguiendo con este razonamiento se puede concluir que las frecuencias relativas convergen a la probabilidad.

Creemos que las preguntas podrán responderse más o menos fácilmente en base a nociones, pruebas y ensayos, posibilitando la génesis del concepto de esperanza.
El poder realizar la simulación del experimento (la corrida) introduce una nueva manera de corroborar una respuesta. Se abre así una nueva faceta de la validación: ¿Hasta qué punto estas corroboraciones son una validación? ¿Hasta qué punto me ayudan a sostener mi respuesta?

A partir de este punto se realizará un trabajo de previsión a partir de un conjunto de gráficos.
Con el análisis de estos gráficos se busca que los participantes trabajen el vínculo construido entre la frecuencia relativa y la probabilidad. Así mismo se busca transferir algunas de las nociones construidas para experimentos equiprobables a experimentos no equiprobables.
En esta actividad se propone, dado un gráfico específico, determinar alguna situación que pueda ser representada por ese gráfico, al contrario del trabajo más usual de modelización matemática realizado en la escuela, en el cual, dada una situación, se pide encontrar las fórmulas, gráficos, cuentas, etc. que mejor la representan.
Luego propondremos un trabajo basado en la misma lógica que la de la actividad de los dados pero simulando las tiradas de una moneda con lo cual buscamos poner en cuestión la extendida creencia que el conocer resultados previos de eventos independientes da “alguna idea de cual puede ser el próximo evento”

“Por ejemplo, es común encontrar en los locales de apuestas de quiniela, una lista con los resultados de los últimos sorteos, ya que mucha gente analiza cuáles fueron los números que salieron en las últimas jugadas, o cuál es el número que menos ha salido en los últimos sorteos para decidir su apuesta. El argumento para justificar esta conducta suele ser que como en un número muy grande de sorteos, todos los números deben salir aproximadamente la misma cantidad de veces, el que menos ha salido hasta ahora tiene una mayor probabilidad. Pero la realidad es que no podemos decir nada sobre el sorteo

específico del día de hoy. La ley general no nos dice nada sobre el resultado particular (como en física). Es cierto que en las próximas experiencias, la frecuencia relativa de los números tenderá a estabilizarse, pero ello no nos permite afirmar nada sobre el resultado particular de la próxima experiencia." (Gysin, Liliana ,2000)

La actividad constará de dos partes: en un primer momento se plantea que se conteste una pregunta sin el uso de computadora. Luego se habilita la exploración de un archivo el cual, por acumulación de experiencias, permite observar que las frecuencias de caras y cecas, luego de dos caras seguidas, tienden a ser iguales. En un segundo momento, proponemos la confección (en lápiz y papel) y el análisis de gráficos para el caso de una moneda equilibrada. Trabajaremos tanto en la observación de las frecuencias como en el análisis usando el Geogebra como generador de experimentos para confrontar ideas previas sobre la independencia de eventos.

A modo de conclusión presentamos un conjunto de preguntas con las que trabajamos en el contexto de las capacitaciones a docentes del proyecto "Escuelas de innovación". El objetivo es reflexionar sobre el uso de la computadora y sus diferencias con el trabajo habitual sin ella. Algunos de los contenidos que estamos trabajando pueden tratarse en la escuela sin la computadora, pero creemos que, su tratamiento con la computadora proporciona nuevos abordajes y nuevas comprensiones. Las actividades presentadas en el taller muestran que existen otros contenidos que directamente no podrían haberse tratado sin el uso de la computadora. Así mismo creemos que estas actividades permiten concluir que las computadoras en general y GeoGebra en particular abre un campo muy rico para el trabajo con un enfoque frecuentista de la probabilidad.

BIBLIOGRAFÍA:

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C. & Arteaga, P. (2009). *Paradojas en la historia de la probabilidad como recurso didáctico*. *XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas.* Granada: Sociedad Thales.

Batanero, C., Estepa, A. & Godino, J. D. (1991), *Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria*. Suma, nº 9, pp. 25-31.

Contreras, J. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2011). *La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas.* Epsilon, 28(2).

Gysin, L. (2000). La enseñanza de la noción de probabilidad. En Chemello, G. (comp) *Estrategias para la Enseñanza de la Matemática*, Universidad Nacional de Quilmes.

CÓMO EVALUAR ACTIVIDADES CONSTRUIDAS EN GEOGEBRA UTILIZANDO MOODLE Y WIRIS

Jorge Gaona, Marcelo Palacios
jorge.gaona@quinan.cl, marcelo.palacio@quinan.cl
Consultora Educacional Quinan

Modalidad: Taller
Palabras clave: Evaluación,Geogebra, Wiris, Moodle.

Geogebra tiene un potencial enorme para construir actividades de exploración donde el estudiante puede manipular un objeto y comprender una situación que por su naturaleza es dinámica. ¿Pero cómo podemos evaluar estas actividades? Este taller propone construir evaluaciones a partir de un applet construido en Geogebra, el cual se insertará en una pregunta construida en una plataforma Moodle a la cual se le ha incorporado WIRIS. Dichas evaluaciones se construirán integrando WIRIS y Moodle, al realizar dicha integración se obtendrán preguntas con las siguientes características:

- Preguntas con parámetros, gráficos y símbolos aleatorios.
- Respuestas con simbología matemática.
- Motor matemático que interpreta símbolos y expresiones equivalentes.
- Preguntas con infinitas respuestas.
- Retroalimentación en cada respuesta.

Entonces, el desafío es construir preguntas que sean atractivas y desafiantes intelectualmente y que midan diferentes habilidades; la forma en que se apliquen permitirá recuperar el concepto de evaluación en forma integral.

En el taller, aprovecharemos de contar algunas experiencias en universidades chilenas, en particular un proyecto de investigación desarrollado en la Universidad Técnica Federico Santa María y uno de desarrollo en la Universidad Tecnológica de Chile Inacap.

Bibliografía

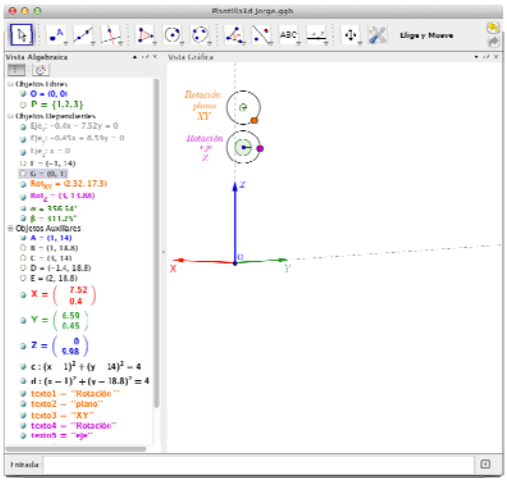
- *Pérez Echeverría, J. I. La Solución de Problemas. Ed. Gráfica Internacional. Madrid, España , (1994).*
- *Gascón, J. El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. En: Educación Matemática, Vol. 6, No. 3, México (1994).*
- *Rohrer&Pashler (2007) Increasing Retention Without Increasing Study Time. Current Directions in Psychological Science*
- *Aplicar test es positivo. Pyc M. & Rawson. K. (2010) Why Testing Improves Memory: Mediator Effectiveness Hypothesis. Science, 15 October 2010: 335 DOI: 10.1126/science.1191465*
- *Hattie, J. &Timperley, H. (2007) ThePower of Feedback, Review of Educational Research. Vol 77, No. 1, pp. 81-112.*

Taller

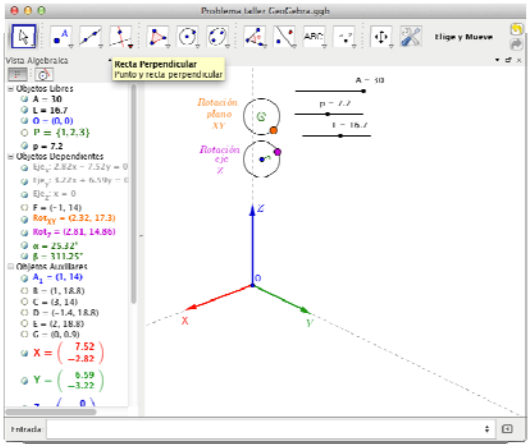
1. Applet de Geogebra en 3d:

Primero, construiremos el applet para que el alumno pueda visualizar el siguiente problema: "Se quiere construir una canaleta para captar agua de lluvia; esta será fabricada con hojas de aluminio de L cm de ancho, doblando 90º hacia arriba. ¿Qué profundidad proporciona la mayor área transversal y como consecuencia, el mayor flujo de agua?"

a. Plantilla 3d: La proyección 3D en Geogebra 2D se hará sobre una plantilla que hemos construido, esta plantilla se diseñó y adaptó en base a los apuntes de Raúl Falcón, de la Universidad de Sevilla para la I Jornadas sobre GeoGebra de Andalucía en marzo de 2010.

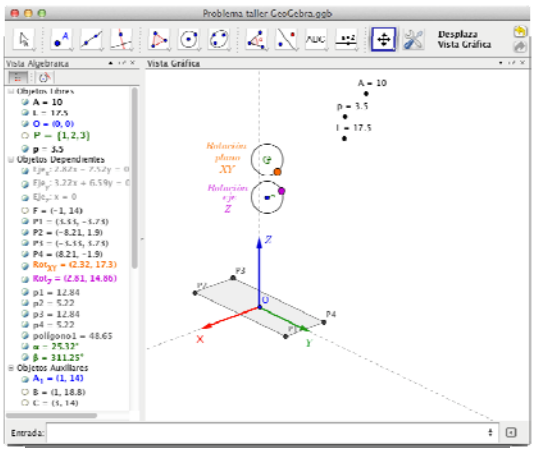


b. Deslizadores: Definiremos los deslizadores A, L y p donde las dos primeras nos darán el ancho y el largo de la lámina original de aluminio y el último, nos entregará la profundidad de la canaleta.

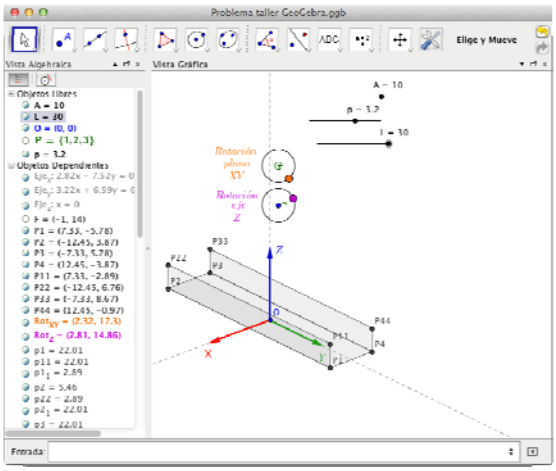


c. Base de la canaleta: En la plantilla 3D, hemos definido una herramienta nueva a la

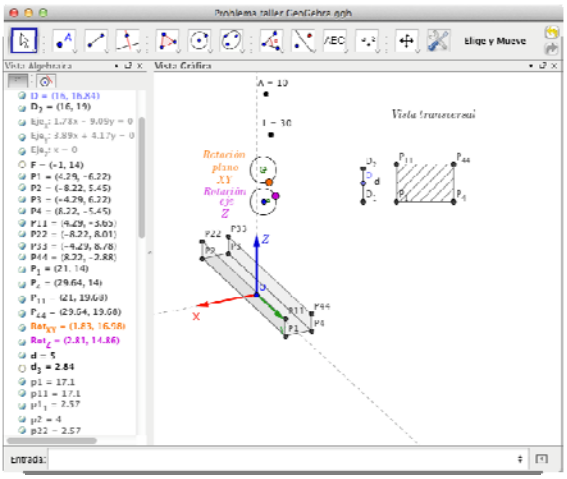
que llamamos punto3d.Al utilizar este nuevo comando, podemos ubicar en el espacio un punto de coordenadas (a,b,c). Ingresamos **punto3d[{a, b, c}, α, β]** donde α y β son los ángulos para rotar la figura y visualizarla desde diferentes perspectivas. En este caso, definiremos P1, P2, P3 y P4 que serán los vértices de la base de la canaleta y luego, un polígono que una los cuatro puntos para dejarla como base.



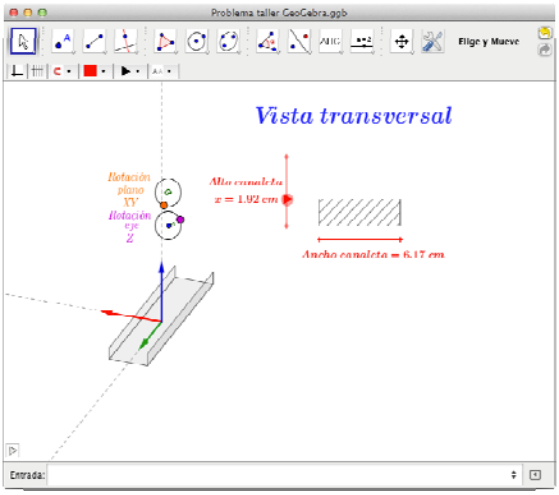
d. Caras laterales de la canaleta: Con el mismo comando anterior definiremos los vértices para construir las caras de la canaleta. A estos puntos los llamaremos P11, P22, P33 Y P44 y los ordenaremos de forma análoga a como lo hicimos con los puntos de la base.



e. Vista transversal: Construiremos una vista transversal y, para eso, mostraremos sólo una mirada frontal que será independiente de la perspectiva en 3D con que se mire.



f. Elegir elementos de la hoja de trabajo del estudiante: En esta parte, seleccionamos los elementos que queramos que le aparezcan al alumno. En nuestro caso, borramos todos los vértices y todos los elementos que sobrecarguen la vista intentando dejar sólo lo esencial.



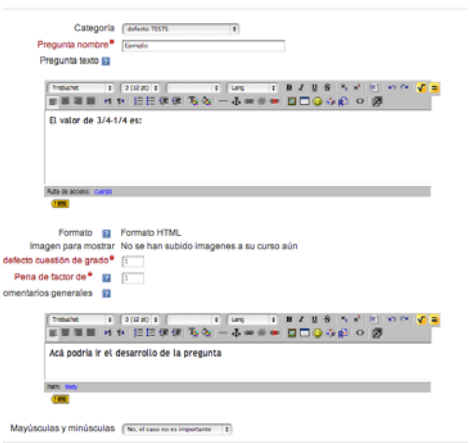
g. Instrucciones para el alumno: Las instrucciones para manipular el objeto y las correspondientes preguntas asociadas a esta, las haremos en una plataforma Moodle a la que se le integró WIRIS. En la segunda parte del taller detallaremos específicamente como hacer este trabajo.

2.Elaboración de una pregunta de respuesta corta en WIRIS.

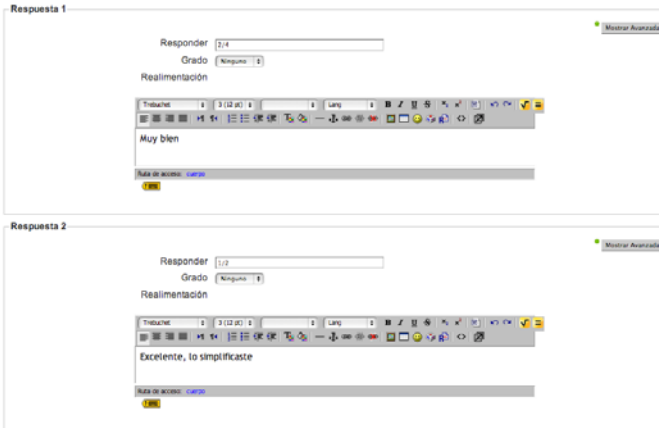
a. Construir una pregunta de respuesta corta en Moodle: Antes de construir la pregunta utilizando WIRIS, veremos cómo construirla en Moodle con la estructura que tiene esta plataforma por defecto:

Este tipo de preguntas requiere que el alumno genere una respuesta por si mismo. Al alumno se le presenta la pregunta junto con un cuadro de texto donde debe introducir su respuesta mecanografiándola él mismo. Por restricciones de lo que el ordenador es capaz de interpretar, las respuestas están limitadas a palabras individuales o una frase muy concisa. A continuación, describiremos cómo crearla:

i. Enunciado: Primero hay que ingresar el nombre, enunciado y la retroalimentación general.

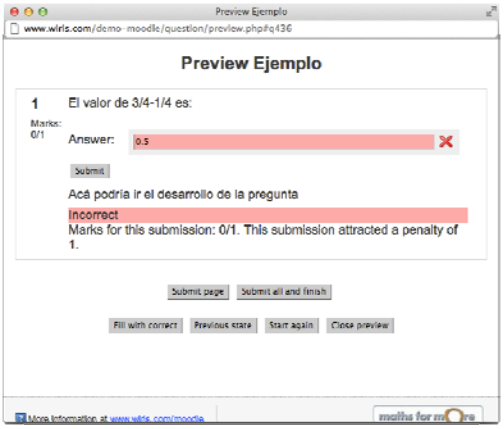


ii. Respuestas: Luego, ingresamos las posibles respuestas.



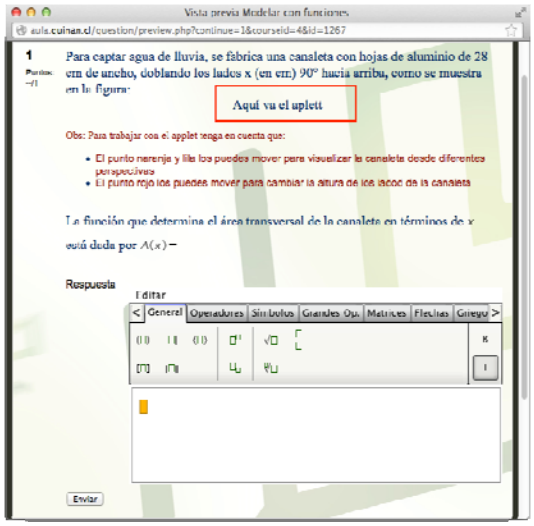
iii. Guardar y visualizar: Por último, guardamos. Al hacerlo, podemos visualizar la pregunta y ver lo siguiente:

Observe que la respuesta es correcta pero la considera mala.



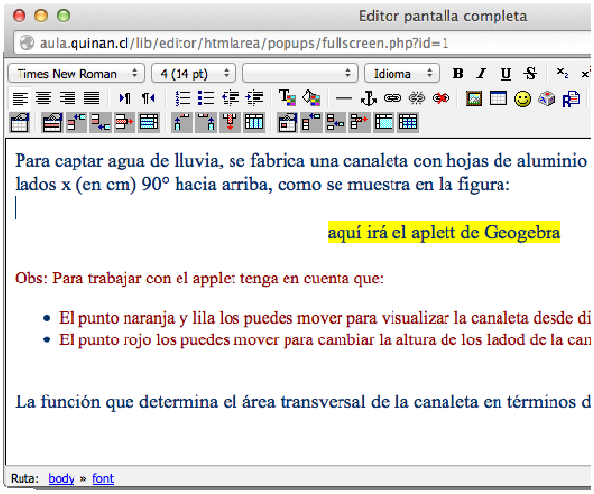
b. Construir una pregunta de respuesta corta en Moodle con WIRIS: El tipo de ítem, *respuesta corta*, permite que el alumno introduzca la respuesta que cree correcta en un campo de texto.

i. Problema: Le pediremos al alumno que se plantee la construcción de una canaleta de recolección de aguas lluvias, utilizando hojas de aluminio de ***a*** cm de ancho (donde ***a*** será un valor aleatorio). Doblando para ello, sus lados x (en cm) en 90°, como se muestra en la figura (la que será un applet de GeoGebra.)



Como el enunciado incluye contenido aleatorio (la variable ***a***), utilizaremos las funcionalidades de WIRIS para generar la medida ***a*** de la hoja de aluminio en forma aleatoria y la respuesta en función de esta variable.

ii Enunciado: Lo esencial del ejemplo es que el ancho de la lámina será variable; para que esto ocurra, en vez de colocar un número en el enunciado, colocamos #a, donde el # simboliza que es una variable que cambiará de acuerdo a cómo se defina en el algoritmo. La construcción del algoritmo, lo veremos más adelante cuando programemos la pregunta. Además, dejamos una línea donde irá el applet de Geogebra; aprenderemos a insertarlo y sincronizarlo en el punto c.

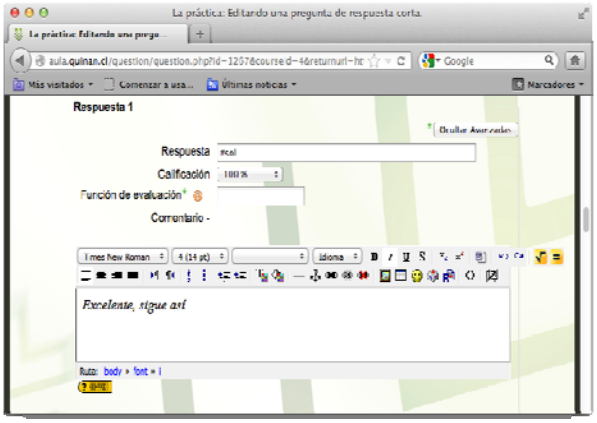


iii. Respuesta correcta: Esta respuesta correcta depende del valor del ancho de la

lámina, la cual también será variable; por lo tanto, la llamaremos #sol, donde nuevamente el símbolo # indica que será variable.

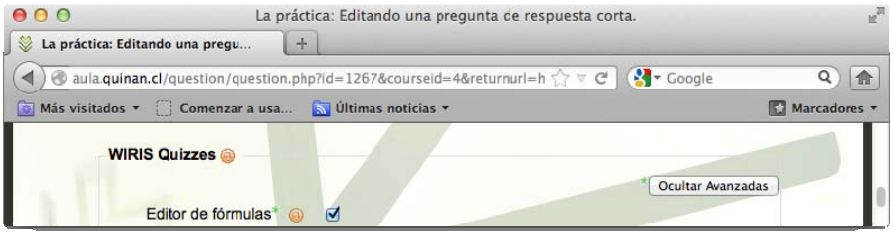
Si deseamos configurar retroalimentación para el alumno, esta puede ser específica para respuestas erróneas. También se puede ingresar retroalimentación personal, cuya función es mejorar la autoestima del estudiante al responder correctamente. Podemos hacerlo usando las secciones de respuesta adicionales.

En este ejemplo, si el alumno introduce la misma función que se le ha dado, no obtiene ninguna puntuación, pero obtiene un mensaje específico.



iv. Activación del editor: Uno de los puntos clave en este tipo de ejercicio es decidir con qué herramientas va a contar el alumno para responder.

Normalmente, queremos que disponga del **editor de fórmulas WIRIS**, así que verificaremos que la opción correspondiente esté seleccionada en la sección WIRIS Quizzes, justo antes del campo ALGORITMO. Si deseamos que el alumno no pueda introducir expresiones matemáticas y que disponga de un campo de texto sencillo, podemos deseleccionar esta casilla y el editor de fórmulas no estará a su disposición para dar la respuesta.

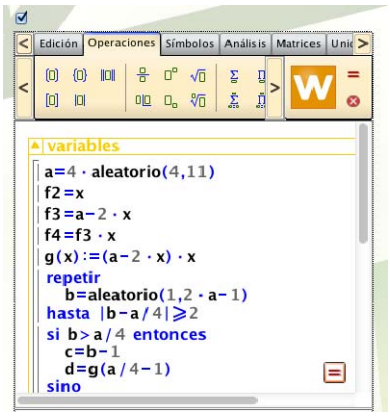


v. Programación: Prácticamente, ya se tiene configurado el ejercicio. Veamos qué elementos matemáticos son precisos para la programación de la pregunta:

- Definimos la medida "***a***" como un valor aleatorio con un rango que permita disponer de una gran cantidad de opciones de visualización para el estudiante.
- Se genera la función cuadrática que dará la forma óptima necesaria para modelar la

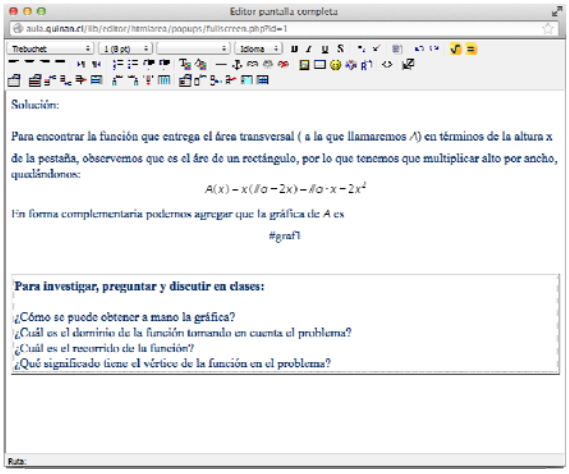
situación expuesta en el problema. Para ello, debemos poner atención a los detalles de su construcción, de tal manera que esto facilite la etapa de retroalimentación.

- Finalmente, asociaremos la función obtenida a su respectiva gráfica utilizando la función TABLERO de WIRIS; asignando para ello las variables de localización del centro, anchura y altura necesarias.
  Daremos la determinación de variable graf1 al tablero construido. lo que permitirá obtener el gráfico en el momento que se requiera, como por ejemplo, en la retroalimentación para el estudiante.



vi. Retroalimentación: Entregaremos la solución a la pregunta planteada, tomando en cuenta la aleatoriedad de la misma. Esto es, se entrega la retroalimentación en función de los valores específicos que al usuario le aparecen en pantalla.

Nuevamente, cada vez que queramos mostrar una expresión que varía, lo simbolizamos con #. En este caso, el área transversal está dada por el alto que es p multiplicado por el ancho que es A-2p. Además del desarrollo algebraico, al alumno le entregamos el gráfico de la función para que explícitamente aparezca la relación entre estos dos objetos matemáticos. También, agregamos preguntas abiertas para que el estudiante le surjan dudas y las pueda compartir con sus pares o profesor.

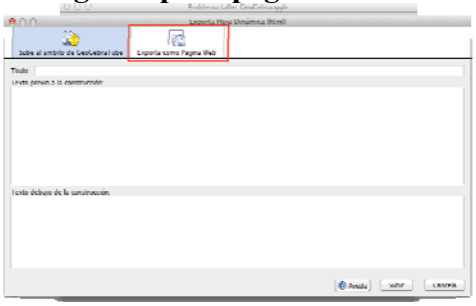


2. Integración de applet Geogebra en Moodle y sincronización con WIRIS.

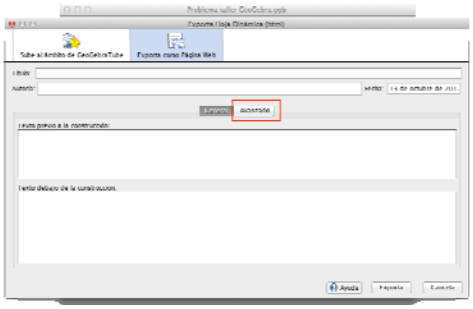
Es en esta etapa donde se integran la pregunta construida en Moodle con WIRIS y el appplet de Geogebra. En la pregunta construida en Moodle WIRIS se incorporan elementos aleatorios y, en este caso en particular, el elemento que varía es el ancho de la lámina original de aluminio. A esta variable la llamamos ***a*** en el applet y ***a*** en el algoritmo de WIRIS. Entonces, la idea es que cuando WIRIS le asigne un valor a la variable ***a,*** el applet que aparecerá en la pregunta, tome el mismo valor de ***a,*** de tal manera que ambos softwares se comuniquen. Para lograr esto haremos los siguiente:

a. Generar un código html del applet de Geogebra para pegarlo en Moodle:

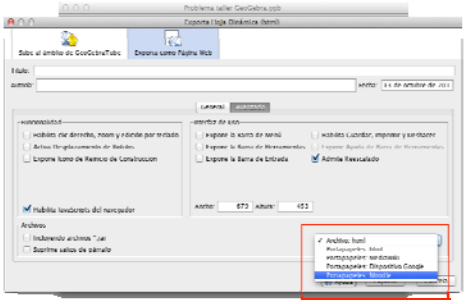
i. En el menú de GeoGebra nos vamos a Archivo/Exporta/Hoja Dinámica como Página Web (html) y se desplegará la siguiente ventana, en la cual elegimos la pestaña Exporta como Página Web :



ii. Se desplegará la siguiente ventana donde presionamos Avanzado.

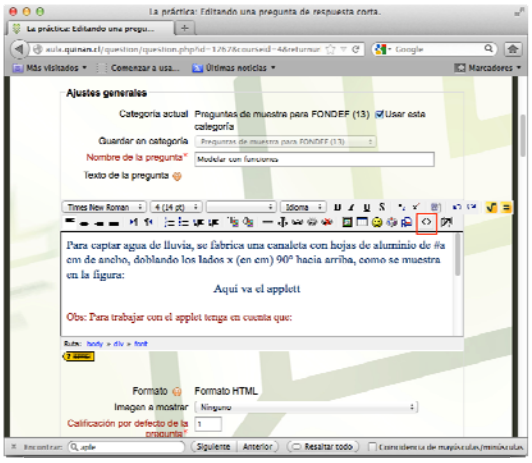


iii. Por último, aparecerá la siguiente ventana y elegimos Portapapeles: Moodle y luego Portapapeles.
Se cerrará esta ventana y nuevamente estaremos frente al ambiente de Geogebra; el código ya está en el portapapeles, así que vamos a la pregunta que construimos en Moodle.

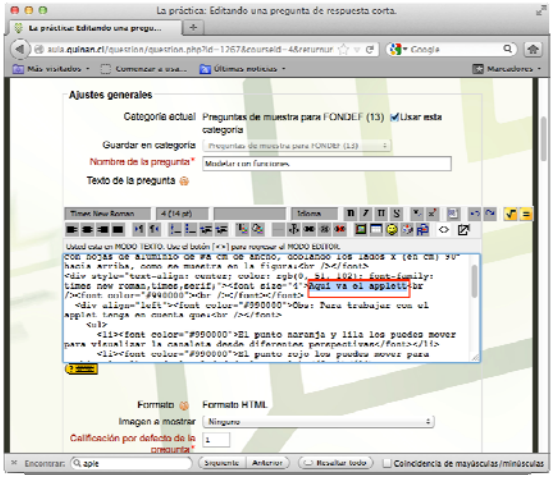


b. Insertar el código en la pregunta:

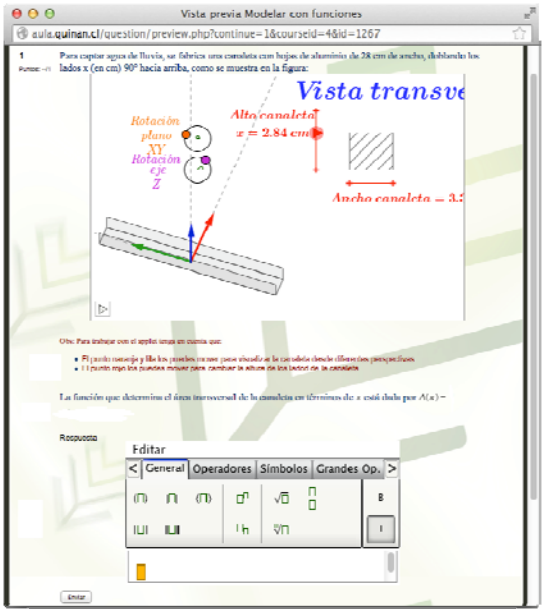
i. Ingresamos al ambiente de modificación de la pregunta y en el enunciado, presionamos el botón para que muestre el código html.



ii. Se desplegarán una serie de códigos, lo importante es identificar el lugar donde teníamos escrito: "Aquí va el applet"



iii. Seleccionamos la frase y presionamos ctrl+v para pegar el código que obtuvimos de Moodle. Volvemos a presionar el botón para html y guardamos la pregunta. Al ver la vista previa nos queda:



c. Sincronizar WIRIS y Geogebra: Para sincronizarlos, se pega el siguiente código en el código html de la pregunta, inmediatamente después del código del applet:

<script type="text/javascript">document.ggbApplet.evalCommand('a=#a');</script>

Observe que la clave está en la línea a=#a que es la variable que sincronizamos.
Una vez realizada la sincronización, tenemos lista la pregunta e integradas estas tres herramientas de aprendizaje.

REFERENCIAS

- *Pérez Echeverría, J. I. La Solución de Problemas. Ed. Gráfica Internacional. Madrid, España , (1994).*
- *Gascón, J. El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. En: Educación Matemática, Vol. 6, No. 3, México (1994).*

- *Rohrer&Pashler (2007) Increasing Retention Without Increasing Study Time. Current Directions in Psychological Science*
- *Aplicar test es positivo. Pyc M. & Rawson. K. (2010) Why Testing Improves Memory: Mediator Effectiveness Hypothesis. Science, 15 October 2010: 335 DOI: 10.1126/science.1191465*
- *Hattie, J. &Timperley, H. (2007) ThePower of Feedback, Review of Educational Research. Vol 77, No. 1, pp. 81-112.*

COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA NO ENSINO MÉDIO COM O SOFTWARE GRATUITO GEOGEBRA

Humberto José Bortolossi – Dirce Uesu Pesco – Wanderley Moura Rezende
hjbortol@vm.uff.br – dirceuesu@gmail.com – wmrezende@id.uff.br
Universidade Federal Fluminense/Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro – Brasil

Modalidade: Oficina (Taller).
Nível educativo: Médio (11 a 17 anos)
Palavras-chaves: GeoGebra, Computação Simbólica, Ensino Médio

Resumo
Sistemas de Computação Simbólica são softwares matemáticos que permitem lidar com símbolos e obter respostas exatas para muitos problemas matemáticos, como a fatoração de números inteiros e polinômios, operações com matrizes, resolução de sistemas lineares e não lineares de equações, operações com números complexos, simplificações de expressões, cálculo de limites, derivadas e integrais, resolução de equações diferenciais, etc. Cálculos aproximados podem ser feitos com um número arbitrário de dígitos (limitado apenas pela memória do computador). Todos estes atributos fazem de um sistema de computação simbólica um laboratório excepcional para o desenvolvimento, ensino e aprendizagem da matemática. Nesta oficina exploraremos os recursos de computação simbólica do software gratuito GeoGebra 4.2 através de uma sequência de exercícios orientados para a matemática do Ensino Médio. Esperamos que o participante da oficina aprecie as potencialidades e perceba as limitações desse tipo de ferramenta.

Introdução

Um *Sistema de Computação Simbólica* (*Computer Algebra System* ou CAS, em inglês) é um software que permite realizar várias tarefas matemáticas simbolicamente. Ao contrário do que ocorre com as calculadoras usuais, um CAS permite obter respostas exatas, isto é, em aproximações. Métodos numéricos de precisão arbitrária (ou seja, com o número de dígitos limitado apenas pela memória do computador) também estão disponíveis.

As tarefas matemáticas típicas de um CAS incluem: cálculos aritméticos, simplificações de expressões algébricas, substituições de símbolos em expressões, resoluções de equações e sistemas de equações lineares e não lineares, cálculos matriciais, cálculos de derivadas e integrais, resoluções de equações diferenciais ordinárias e parciais, etc.

Vários sistemas de computação simbólica comerciais e gratuitos para diferentes plataformas (Windows, Linux, Mac OS) estão disponíveis atualmente. Entre os comerciais, destacamos o software Maple (http://www.maple.com/) e o software Mathematica (http://www.wolfram.com/). Entre os sistemas de computação simbólica gratuitos, destacamos o excelente software Maxima (http://maxima.sourceforge.net/).

Um dos grandes recursos incluídos na versão 4.2 do GeoGebra (em estágio beta, mas com previsão de ser lançado oficialmente ainda no ano de 2012) está a Janela CAS, uma janela a partir da qual um usuário poderá conduzir cálculos simbólicos dentro do GeoGebra. Como de costume, a Janela CAS está integrada com as demais janelas do software (Janela de Álgebra, Janela de Visualização).

Existem vários estudos sobre o uso de sistemas de computação simbólica para o ensino e aprendizagem da matemática (veja, por exemplo, as referências (GUIN, RUTHVEN & TROUCHE, 2005) e (LI, WANG & ZHANG, 2007)), contudo, a ênfase se dá principalmente em questões relacionadas com o cálculo diferencial e integral (no Brasil, a maioria dos alunos do Ensino Médio não estuda esse tópico, ficando o tema reservado para os primeiros semestres do ensino universitário).

O objetivo principal dessa oficina é o de apresentar e explorar exemplos de como recursos de computação simbólica podem ser trabalhados com tópicos mais elementares do Ensino Médio. Esperamos assim que o participante da oficina aprecie as potencialidades e perceba as limitações desse tipo de ferramenta. O material apresentado parcialmente aqui tem sido usado na disciplina "Informática no Ensino da Matemática" para o curso de licenciatura em matemática do Sistema CEDERJ/UAB.

Alguns exemplos de exercícios em aritmética

Os exercícios que apresentamos nesta seção são trabalhados em nossa disciplina logo após a apresentação da sintaxe básica das operações aritméticas (soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, fatorial) e do comando Fatorar[] (que calcula a decomposição em fatores primos de um número natural) da Janela CAS do GeoGebra 4.2. Nessa apresentação, um dos exemplos dados é o seguinte: o cálculo de 1/3 na Janela CAS do GeoGebra. Em geral, as pessoas ficam surpresas com a resposta dada pelo GeoGebra: 1/3. Elas esperam ver (como em uma calculadora), o número 0.33333333. Nossa impressão é que, em geral, as pessoas não percebem o processo de aproximação inerente às calculadoras usuais, isto é, elas não percebem que a resposta 0.33333333 dada por uma calculadora usual não é igual a 1/3, mas, sim, uma aproximação de 1/3. Em outras palavras, o pensamento (errado) geral é que os resultados apresentados por uma calculadora usual são sempre exatos e eles não são. Em nossa opinião, poder evidenciar esse fato já demonstra uma qualidade didática dos sistemas de computação simbólica.

Exemplo 1. Considere os seguintes números racionais a = 8712870/48506557 e b = 505149/2812281. Eles são iguais? (a) Tente obter uma resposta usando uma calculadora

de bolso comum! (b) Tente obter uma resposta usando a Janela CAS do GeoGebra! (c) Tente obter uma resposta usando apenas lápis e papel, sem recurso computacional algum! Os três métodos produziram a mesma resposta? Elabore sobre o assunto!

Este exercício tem vários desdobramentos. Primeiro, ele evidencia a limitação de uma calculadora comum: os números *a* e *b* são, de fato, diferentes, mas, ao tentar calculá-los, os números exibidos no visor da calculadora são iguais. Muitas pessoas concluem (erroneamente) a partir desse fato que *a* e *b* são iguais! Segundo, que estratégias podemos usar para resolver o Item (b)? Aqui podemos usar o GeoGebra para calcular a diferença $a - b$: *a* será igual a *b* se, e somente se, $a - b$ for igual a 0. Outra estratégia: usar o GeoGebra para calcular a divisão a/b: *a* será igual a *b* se, e somente se, a/b for igual a 1. Por fim, que estratégias podemos usar para resolver o Item (c)? Aqui lembramos que se *r*, *s*, *t* e *u* são números inteiros positivos, então $r/s = t/u$ se, e somente se, $ru = st$. Em nosso caso, $r = 8712870$, $s = 48506557$, $t = 505149$ e $u = 2812281$. Observe que *ru* é diferente de *st*, pois *ru* tem a casa das unidades igual a 0, enquanto que *st* tem a casa das unidades igual a 3. Sendo assim, $r/s = 8712870/48506557$ é diferente de $t/u = 505149/2812281$.

Exemplo 2. Considere os números naturais $a = 2^{3000}$ e $b = 3^{2000}$. Qual número é maior? (a) Tente obter uma resposta usando uma calculadora de bolso! (b) Tente obter uma resposta usando a Janela CAS do GeoGebra! (c) Tente obter uma resposta usando apenas lápis e papel, sem recurso computacional algum! Os três métodos produziram a mesma resposta? Elabore sobre o assunto!

Este exercício também tem vários desdobramentos. Primeiro, ele evidencia outra limitação de uma calculadora comum: se comparado com os sistemas de computação simbólica, menos números podem ser representados (mesmo de forma aproximada). Assim, ao tentar calcular 2^{3000}, uma mensagem de erro deverá aparecer no visor da calculadora. O cálculo de 2^{3000} pode ser facilmente conduzido na Janela CAS do GeoGebra (experimente!). As mesmas estratégias propostas para o Item (b) do Exemplo 1 podem ser usadas para resolver o Item (b) do Exemplo 2. Por fim, que estratégias podemos usar para resolver o Item (c) do Exemplo 2? Em geral, as pessoas pensam inicialmente que não é possível resolver o Item (c) com lápis e papel por conta dos números envolvidos. Contudo, uma vez que $a = 2^{3000} = (2^3)^{1000} = 8^{1000}$ e $b = 3^{2000} = (3^2)^{1000} = 9^{1000}$, segue-se que *a* é menor do que *b*.

Exemplo 3. Quantos divisores positivos possui 10!? Lembre-se que 0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 × 1, 3! = 3 × 2 × 1, 4! = 4 × 3 × 2 × 1, etc. Descreva como você obteve sua resposta (com ou sem o GeoGebra)!

O objetivo aqui é explorar aplicações do Teorema Fundamental da Aritmética usando o comando Fatorar[] da Janela CAS do GeoGebra. O comando Fatorar[10!] nos diz que $10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^1$. Por outro lado, observe que se d é um divisor positivo de 10!, então d deve ser da forma $2^r \times 3^s \times 5^t \times 7^u$, com r, s, t e u números inteiros satisfazendo $0 \leq r \leq 8$, $0 \leq s \leq 4$, $0 \leq t \leq 2$ e $0 \leq u \leq 1$. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, 10! possui $9 \times 6 \times 4 \times 2 = 270$ divisores positivos.

Exemplo 4. Quantos zeros aparecem no final da representação decimal de 1000!? Descreva como você obteve sua resposta (com ou sem o GeoGebra)!

Muitos resolvem esse exercício calculando primeiro 1000! na Janela CAS do GeoGebra para, depois, contar manualmente o número de zeros que aparecem no final. Será que não existe uma outra maneira "mais matemática" de se resolver esse exercício? Sim! Basta novamente usar o Teorema Fundamental da Aritmética e o comando Fatorar[] da Janela CAS do GeoGebra. De fato, o comando Fatorar[1000!] nos diz que $1000! = 2^{994} \times 3^{498} \times 5^{249} \times 7^{164} \times \ldots \times 997^1$. Agora, se existe um zero no final da representação decimal um número inteiro positivo, é porque o número é divisível por 10, isto é, ele deve ser divisível por 2 e por 5 ao mesmo tempo. Sendo assim, cada zero implica em uma divisão por 2 e por 5. Moral: o número de zeros é igual a quantidade mínima de 2 e 5 que aparecem na decomposição em fatores primos do número! Como na decomposição em fatores primos de 1000! aparecem 994 números 2 e 249 números 5, concluímos, portanto, que existem 249 zeros no final da representação decimal de 1000!.

Alguns exemplos de exercícios em álgebra

Além de números, os sistemas de computação simbólica também reconhecem e manipulam expressões algébricas. Por exemplo, se um usuário digitar $x + 2\ x$ em uma linha de entrada da Janela CAS do GeoGebra, ao pressionar a tecla ENTER (para executar o comando da linha de entrada), aparecerá como resultado a expressão $3\ x$. Expressões algébricas podem ser expandidas (por exemplo, a expressão algébrica $(a - 2)(a - 3)$ é automaticamente substituída por $a^2 - 5a + 6$) ou fatoradas (por exemplo, o comando Fatorar[$6\ a^2 - 5\ a + 1$] dá como resultado $(3\ a - 2)(2\ a - 1)$). Todos esses recursos permitem elaborar vários exercícios interessantes.

Os três exercícios que destacamos a seguir tem a seguinte característica: eles desafiam a habilidade e a paciência humana na manipulação de expressões algébricas. O corolário que queremos estabelecer com esses exercícios é o de que sistemas de computação simbólica podem nos livrar de cálculos tediosos de modo que possamos nos concentrar em outros quesitos.

Exemplo 5. Use o GeoGebra para mostrar que

$$(a\,d\ -\ b\,c)(p\,s\ -\ r\,q) = (a\,p + b\,r)(c\,q + d\,s)\ -\ (a\,q + b\,s)(c\,p + d\,r),$$

para todo a, b, c, d, p, q, r e s reais. Tente demonstrar essa identidade usando apenas lápis e papel!

Exemplo 6. Sejam $u = (a - b)/(a + b)$, $v = (b - c)/(b + c)$ e $w = (c - a)/(c + a)$. Use o GeoGebra para mostrar que $(1 + u)\,(1 + v)\,(1 + w) = (1 - u)\,(1 - v)\,(1 - w)$. Tente demonstrar essa identidade usando apenas lápis e papel!

Exemplo 7. Use o GeoGebra para mostrar que se a, b e c são números diferentes de zero, dois a dois distintos e tais que $a + b + c = 0$, então

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)=9.$$

Tente demonstrar essa identidade usando apenas lápis e papel!

Alguns exemplos de limitações em sistemas de computação algébrica

Indicamos aqui duas limitações importantes presentes na maioria dos sistemas de computação algébrica. Essencialmente, as duas limitações tem uma mesma origem: a hipótese implícita assumida por esses sistemas de que certas expressões são não nulas.

Como primeiro exemplo, considere a seguinte situação: um usuário digitou $(x^2 - 4)/(x - 2)$ em uma linha de entrada da Janela CAS do GeoGebra e, ao pressionar a tecla ENTER, obteve como resposta a expressão $x + 2$. Este resultado está correto? Por exemplo, se $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ e $g(x) = x + 2$ são funções reais, podemos afirmar que $f = g$? A reposta é não! As funções f e g são funções diferentes, pois possuem domínios (efetivos) diferentes: o número real 2 não pertence ao domínio (efetivo) de f, mas pertence ao domínio (efetivo) de g. Somente para valores de x diferentes de 2, isto é, para valores de x tais que $x - 2$ é diferente de zero, $f(x) = g(x)$, ou seja, $(x^2 - 4)/(x - 2) = x + 2$. O GeoGebra implicitamente (e automaticamente) assumiu a hipótese de que $x - 2$ é diferente de zero ao simplificar a expressão $(x^2 - 4)/(x - 2)$ em $x + 2$.

Como segundo exemplo, considere a situação em que queiramos resolver a equação $a\,x - 2 = 4$ em x. A Janela CAS do GeoGebra disponibiliza um comando para resolver equações: Resolver[]. A resposta dada pelo comando Resolver[$a\ x\ -\ 2\ =\ 4$, x] é

$\{x = 6/a\}$. Este resultado está correto? A resposta é não! Se a for igual a zero, a equação $a\ x - 2 = 4$ não possui soluções. Note, portanto, que novamente o GeoGebra implicitamente (e automaticamente) assumiu a hipótese de que a é diferente de zero ao resolver a equação $a\ x - 2 = 4$ em x.

Referencias bibliográficas

- Guin, D., Ruthven, K. & Trouche, L. (Eds.). (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning A Computational Device into A Mathematical Intrument*. Boston: Springer-Verlag.
- Li, S., Wang, D. & Zhang, J.-Z. (Eds.). (2007). *Symbolic Computation and Education*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

CONSTRUINDO AS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS POR MEIO DO GEOGEBRA

Evelyn Rosana Cardoso – Valdeni Soliani Franco
prof_evelyn@hotmail.com – vsfranco@uem.br
Universidade Estadual de Maringá - Brasil

Modalidade: Minicurso
Nivel educativo: Médio
Palavras chave: Educação Matemática, Construção de Funções, Logarítmicas, Exponenciais.

Resumo
No Brasil a função Logarítmica, no Ensino Médio, em geral, é definida como segue: "Se chamarmos de base um número a *tal que L(*a*) = 1, a função L: $IR^+ \rightarrow IR$, tal que L(x) = y se, e somente se, $a^y = x$, é chamada de Função Logarítmica". Essa maneira de conceituar a função Logarítmica tem uma série de inconvenientes, como por exemplo, ela necessita de um estudo preliminar da função exponencial e suas propriedades, em particular que se saiba o significado de a^y quando y é irracional, e neste caso, ou se passa por cima dessas dificuldades, fazendo de conta que elas não existem – o que não é bom do ponto de vista científico – ou se gasta um tempo precioso, com longos detalhes técnicos. Outro inconveniente é que tratando todas as bases da mesma maneira, esta definição não permite apresentar o número e como uma base que se constrói naturalmente o que a diferencia das demais, pois ela "aparece" artificialmente na definição tradicional. Finalmente, a dificuldade de se estabelecer certas desigualdades fundamentais, como por exemplo, L(1 + x) < x, que não existirá, na maneira em que se fará a construção dessas funções no minicurso, utilizando o GeoGebra.*

Introdução

Durante três séculos, os logaritmos serviram como instrumento para simplificar cálculos aritméticos, efetuando com maior rapidez e precisão operações complicadas, tais como a multiplicação de dois números com muitos algarismos, ou uma potenciação com expoentes fracionários.

Hoje com a utilização de calculadoras compradas até na rua, por algumas moedas, tais operações são resolvidas facilmente. Mas, como se pode observar, por muitos outros motivos, os logaritmos fazem parte da grande maioria das estruturas curriculares do Ensino Médio e Superior da disciplina Matemática. Isso porque a função logarítmica e a sua inversa, a função exponencial, constituem ainda hoje, a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decrescimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente em um dado momento.

Desde a construção do conceito de logaritmo, feito pelo Lord Napier, no início do século XVII, um sistema de logaritmos é simplesmente uma tabela com duas colunas. A cada número real positivo x na coluna à esquerda corresponde, no mesmo nível à direita, um número real $L(x)$ chamado o logaritmo de x (naquele sistema). Essa tabela deve satisfazer duas condições:

1. Se os números x da coluna à esquerda estiverem dispostos em ordem crescente, o mesmo deve ocorrer com seus logaritmos $L(x)$ à direita;
2. Se multiplicarmos dois números positivos x e y, o logaritmo $L(x.y)$ do produto deve ser a soma dos logaritmos $L(x)$ e $L(y)$.

No Brasil, em geral, os livros didáticos, define logaritmos da seguinte forma "Se chamarmos de base de um sistema de logaritmos L, ao número a tal que $L(a) = 1$, então denomina-se logaritmo a função L: $IR^+ \rightarrow IR$, tal que $L(x) = y$ se, e somente se, $a^y = x$."

De acordo com LIMA (1991), são vários os inconvenientes de tal definição:

1. Ela requer que se estudem preliminarmente a função exponencial e suas propriedades, em particular que se saiba o significado de a^y quando y é irracional, e que se provem regras como $a^y.a^z = a^{y+z}$ para $y,z \in IR^+$ quaisquer. Opa!!! Problema: ou se passa por cima dessas dificuldades, fazendo de conta que elas não existem – o que deixa a desejar do ponto de vista de honestidade científica – ou se esgota a paciência do aluno, com longos detalhes técnicos.
2. Tratando todas as bases da mesma maneira, ela não permite apresentar espontaneamente o número e como uma base especial que se distinga naturalmente das demais, e "aparece" artificialmente na definição tradicional. Veremos que os logaritmos de base e surgem naturalmente de problemas com origens das mais diversas.
3. A dificuldade de se estabelecer certas desigualdades fundamentais, como por exemplo, $L(1 + x) < x$ (válida para logaritmos de base e), que é óbvia na definição que faremos neste curso.

Fundamentação Teórica

O minicurso está fundamentado na obra de Lima (1991). A parte teórica do texto é utilizada para introduzir por meio do software GeoGebra o logaritmo natural de um número real positivo, o número de Nepper "e" e a função exponencial.

Resultados

No minicurso será utilizada a seguinte definição para um Sistema de Logarítmos: Um **Sistema de Logaritmos** é uma função L: $IR^+ \rightarrow IR$, que possui as seguintes propriedades:

1. L é crescente, ou seja, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;
2. $L(x.y) = L(x) + L(y)$, para quaisquer x e y reais positivos.

Por intermédio desta definição, é possível demonstrar que várias propriedades e resultado são satisfeitos. Enunciamos alguns deles.

Propriedade 1: Uma função logarítmica L: $IR^+ \rightarrow IR$ é sempre injetiva, pois números diferentes têm logaritmos diferentes.

Propriedade 2: O logaritmo de 1 é zero.

Propriedade 3: Os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos e os números maiores que 1 têm logaritmos positivos.

Propriedade 4: Para todo $x > 0$, tem-se $L(x) = -L(x)$.

Propriedade 5: Para quaisquer $x, y \in IR^+$, temos que: $L(x/y) = L(x) - L(y)$

Propriedade 6: Para todo $x \in IR^+$ e todo número racional $r = p/q$, tem-se:

$$L(x^r) = r \, . \, L(x)$$

Propriedade 7: Uma função logarítmica $L:IR^+ \rightarrow IR$ é ilimitada, superiormente e inferiormente.

Teorema 1: *Dadas as funções logarítmicas* L, M: $IR^+ \rightarrow IR$, *existe uma constante* $c > 0$ *tal que* $M(x) = c.L(x)$, *para todo* $x > 0$.

Teorema 2: Toda função logarítmica L é sobrejetiva.

Observação 1: Segue das propriedade 1 e do teorema 2, que toda função logarítmica é bijetora.

Observação 2: Segue da observação 1, que dada a função logarítmica L: $IR^+ \rightarrow IR$, existe um único número $a > 0$, tal que $L(a) = 1$. Este número é chamado de *base* do sistema de logaritmos L.

Observação 3: Se L_a e L_b são funções logarítmicas, $L_a(a) = L_b(b) = 1$, então o Teorema 1 garante a existência de uma constante $c > 0$, tal que $L_b(x) = c.L_a(x)$, para todo $x > 0$. Fazendo x = a, resulta que $L_b(a) = c$. Portanto, $L_b(x) = L_b(a) \, .L_a(x)$, que é a fórmula de *mudança de base*.

De posse desses resultados, inicia-se a construção de uma função logarítmica, por intermédio do GeoGebra.

Para iniciar com o GeoGebra, constrói-se alguns gráficos de funções e a partir deles obtém-se a área determinada pelo gráfico e o eixo *x*, utilizando-se das funções Soma Inferior, Soma Superior e Soma Trapezoidal, juntamente com o controle deslizante para aumentar ou diminuir o número de divisões do intervalo.

Existe uma relação estreita entre a área definida por uma hipérbole no plano cartesiano e os logaritmos.

Essa relação foi observada pelo jesuíta Gregory Saint Vincent, em 1647 e depois por Newton em 1660. Embora nenhum dos dois perceberam a identificação entre essa área e os logaritmos naturais, nem o número "*e*", porém seus trabalhos indicam que a ideia é bem antiga.

Trataremos a seguir dessa área, para depois definirmos o logaritmo natural.

Seja *H* o ramo **positivo** do gráfico da função $y = 1/x$, isto é, da função que associa a cada número real positivo *x*, o número $y = 1/x$. Assim,

$$H = \{(x, y); x > 0, y = \frac{1}{x}\}.$$

Define-se o número H_a^b, como sendo a área determinada por *H*, no intervalo [a,b], limitada pelo eixo *x*.

Propriedade fundamental: Para qualquer número real $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} possuem a mesma área.

Uma consequência dessa propriedade é pode-se restringir as considerações às áreas das faixas da forma H_1^c, pois $\text{Área}\left(H_a^b\right) = \text{Área}\left(H_1^{b/a}\right) = \text{Área}\left(H_1^c\right)$, em que $c = b/a$.

É fácil verificar no GeoGebra que quando $a < b < c$:

$$\text{Área}\left(H_a^b\right) + \text{Área}\left(H_b^c\right) = \text{Área}\left(H_a^c\right).$$

Para evitar o problema de restringirmos ao caso, $a < b < c$, definimos o número:

$$L(H_a^b) = \begin{cases} \text{Área}(H_a^b), & \text{se } a < b \\ 0, & \text{se } a = b \\ -\text{Área}(H_a^b), & \text{se } a > b \end{cases}.$$

Note que agora para quaisquer *a*, *b* e *c*, temos:

$$L\left(H_a^b\right) + L\left(H_b^c\right) = L\left(H_a^c\right)$$

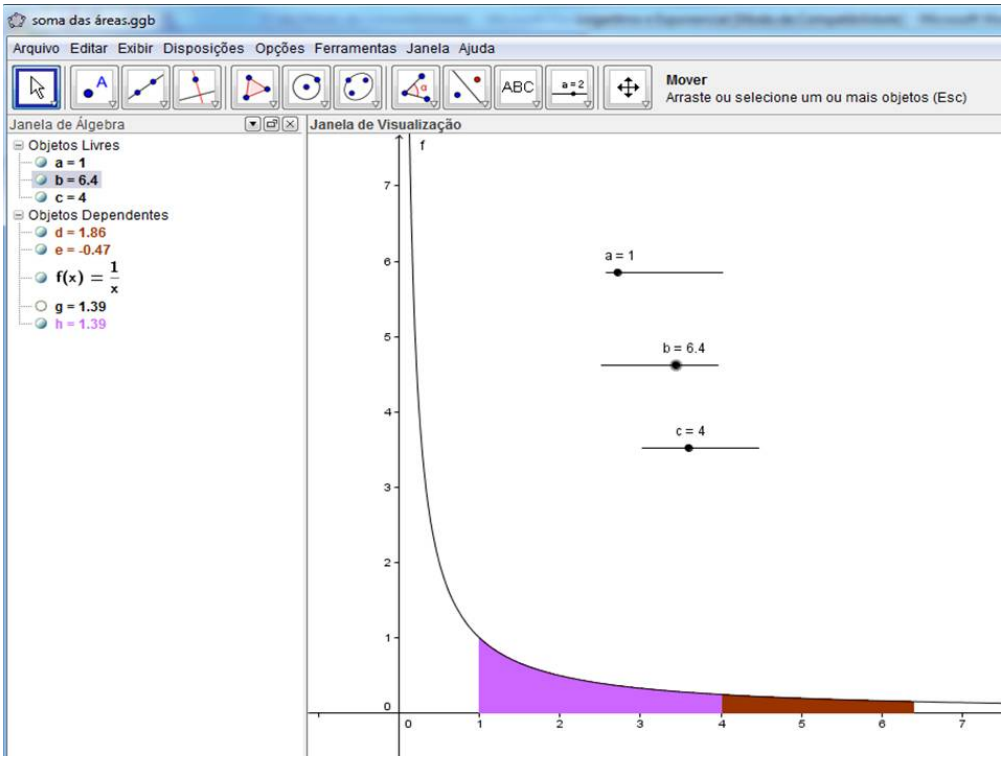


Figura 1: Soma dos números $L\left(H_a^b\right)+L\left(H_b^c\right)=L\left(H_a^c\right)$

Fonte: autores

Seja x um número real positivo. Definiremos o logaritmo natural de x como o número $L(H_1^x)$. Assim, por definição, quando $x > 0$, escrevendo ln x para indicar o logaritmo natural de x, temos:

$$\ln x = L\left(H_1^x\right).$$

Utilizando o GeoGebra e esta definição, é possível calcular os logaritmos naturais de qualquer número real, com uma visualização do que está sendo calculado.

Teorema: ln: $IR^+ \rightarrow IR$ é uma função logarítmica.

Demonstração:

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. De fato, $L\left(H_1^{xy}\right)=L\left(H_1^x\right)+L\left(H_x^{xy}\right)$. Pela propriedade fundamental, temos $\text{Área}\left(H_x^{xy}\right)=\text{Área}\left(H_1^y\right)$, donde segue o resultado.
2. ln é uma função crescente. De fato, Suponha que $x,y \in IR^+$ e que $x < y$. Isso significa que existe um número $a > 1$, tal que $y = ax$. Assim, $\ln y = \ln a + \ln x$. Como $a > 1$, temos que $\ln a > 0$, e assim, $\ln y > \ln x$.

□

Como as funções logarítmicas são bijetoras, existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Tal número é representado pela letra *e*. Ele é a base do sistema de logaritmos naturais.

Assim, $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. Por intermédio do GeoGebra, é possível estimar o valor de "*e*".

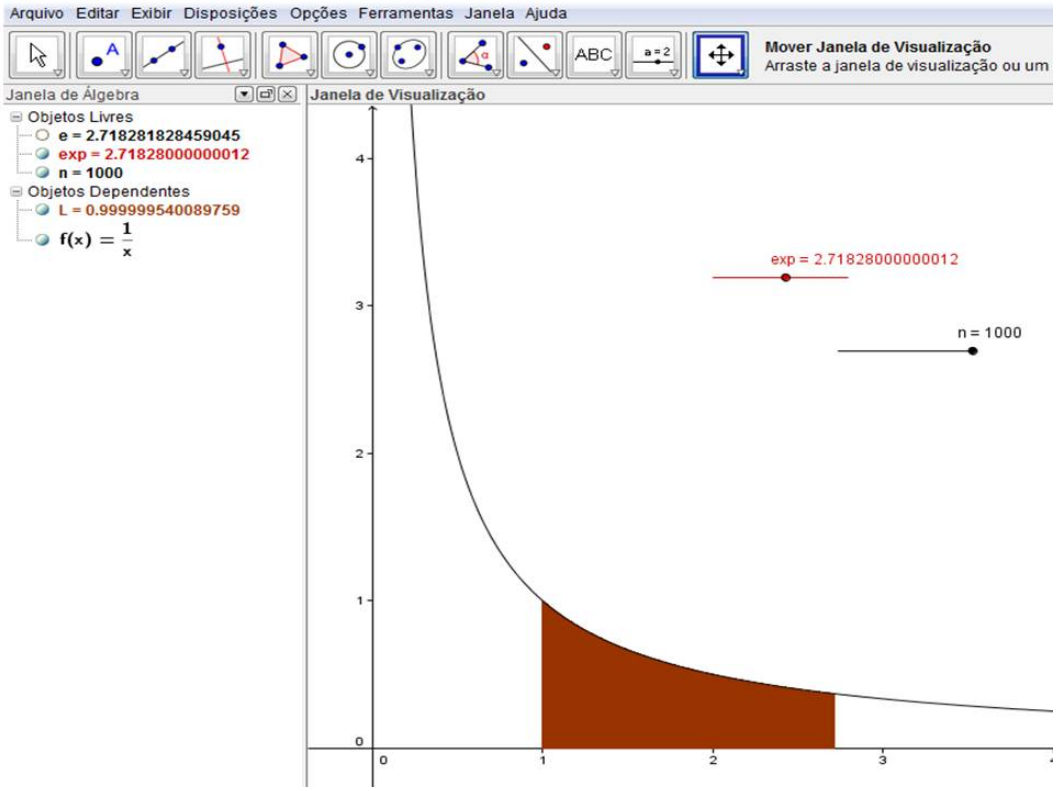


Figura 2: exp é uma estimativa para o número *e*.
Fonte: autores

Teorema: Seja $r = p/q$ um número racional. Tem-se que $y = e^r$ se, e somente se, $\ln y = r$.

Demonstração: Se $y = e^r$, então $\ln y = r \cdot \ln e = r$.

Reciprocamente, seja $y > 0$, um número real tal que $\ln y = r$. Como $\ln e^r = r$ e a função logarítmica é bijetora, temos o resultado.

□

Assim, pelo menos para potência de expoente racional de e, o logaritmo natural de um número é o expoente ao qual se deve elevar a base a fim de obter esse número.

O último teorema nos motiva definir a potência e^x, em que x é um número real qualquer.

Definição: Dado um número real x, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x.

Observando a tela do GeoGebra, $y = e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa de hipérbole H_1^y tenha área x. Note que agora faz sentido tomar e^x, mesmo com x irracional.

Utilizando o GeoGebra, é possível, além de obter, compreender o significado desta exponencial.

Enquanto ln x tem sentido apenas para $x > 0$, e^x é definido para todo valor real de x. A correspondência $x \to e^x$ define uma função cujo domínio contém todos os números reais. Esta é a **função exponencial**.

A função exponencial $y = e^x$ é a função inversa da função logarítmica natural. Isto quer dizer que as igualdades a seguir são válidas para todo x real, e todo $y > 0$, $\ln(e^x) = x$ e $e^{\ln y} = y$.

Seja k uma constante positiva. Em vez de $y = 1/x$, podemos considerar a hipérbole $y = k/x$ para definirmos logaritmos. Para cada valor de k escolhido, temos um novo sistema de logaritmos. Evidentemente, a escolha de $k = 1$ é a mais natural, por isso chamamos os logaritmos estudados até agora de natural.

Para concluir o minicurso, será explorado estas outras funções logarítmicas, por meio do GeoGebra.

Referencias bibliográficas

Lima, E.L. (1991). *Logaritmos*. Rio de Janeiro: IMPA.

Soares, E. C (2011). Uma investigação histórica sobre os Logaritmos com sugestões didática para a sala de aula. *Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)* – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

CONSTRUINDO O LOGOTIPO DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA NO GEOGEBRA

Mariana Moran Barroso - Valdeni Soliani Franco
marianamoranbar@gmail.com - vsfranco@uem.br
Universidade Estadual do Paraná/FECILCAM – Universidade Estadual de Maringá

Modalidade: Minicurso
Nivel educativo: Terciário
Palavras chave: Educação Matemática, Novas Ferramentas, Inversão de Pontos, Homotetia.

Resumo
O logotipo da Olimpíada Brasileira da Matemática pode ser visto no sítio da OBM, que está referenciado. *Sua construção no GeoGebra utiliza conceitos importantes da Matemática, tais como o Segmento Áureo (que para sua utilização, será construído uma ferramenta específica para obtê-lo); a construção de cinco circunferências tangentes à duas circunferências concêntricas (essa construção depende da razão entre o raio da circunferência maior e o raio da circunferência menor, envolvendo para isso, funções trigonométricas); a inversão de pontos em relação a uma circunferência utilizando um teorema que garante que "O inverso de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão é uma outra circunferência" e finalmente o conceito de homotetia, para a construção final.*

O Logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática

O objetivo do minicurso é construir o logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), por meio do software GeoGebra. O logotipo após a construção final é dado na figura a seguir, e possui animação.

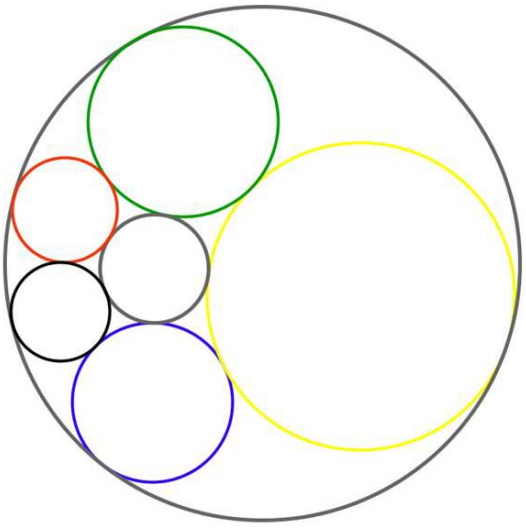


Figura 1 – logotipo da OBM
Fonte: Autores

A primeira construção necessária é o segmento áureo de um segmento dado.

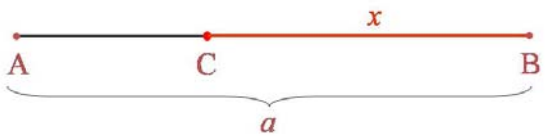


Figura 2 – CB é o segmento áureo de AC
Fonte: Autores

Dado um segmento AB arbitrário de medida *a*, como na figura 2, seu segmento áureo CB de medida *x*, é o segmento tal que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 = a^2 - ax \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Calculando-se as raízes desta equação em x, obtém-se:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4.a^2}}{2} = \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Como *x* é a medida de um segmento, utilizamos apenas a raiz positiva $x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ para a obtenção do ponto C no segmento AB. Durante o minicurso, será construída a ferramenta para construção de CB.

Na sequência, serão dados os passos para a construção de cinco circunferências de mesmo raio, tangentes entre si e todas, tangentes a duas circunferências concêntricas, como na figura 3 a seguir.

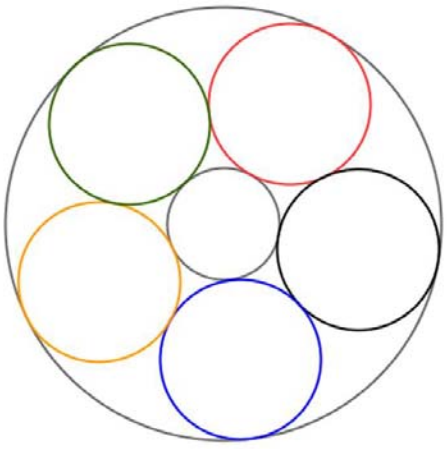


Figura 3 – cinco circunferências, de mesmo raio, tangentes entre si e todas, tangentes a duas circunferências concêntricas.
Fonte: Autores

A construção dependerá da razão entre os raios das circunferências concêntricas. Consideraremos a medida do raio da circunferência maior *R*, e a medida do raio da circunferência menor *r*.

Note que dessa forma, o diâmetro de cada uma das circunferências iguais é a diferença *R* – *r* (figura 4).

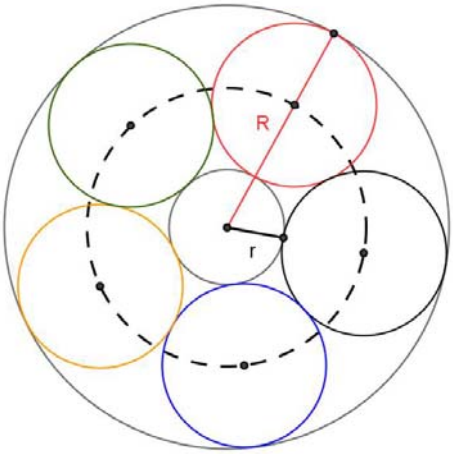


Figura 4 – o diâmetro das cinco circunferências iguais é R – r.
Fonte: Autores

Por outro lado, os centros dessas cinco circunferências de diâmetro *R* – *r* formam um pentágono inscrito em um círculo de raio s = $r + \frac{R-r}{2} = \frac{R+r}{2}$.

Como a construção de um pentágono regular depende do segmento áureo do raio, para encontrar os vértices do pentágono, que como se pode observar serão os centros das cinco circunferências de raios iguais, será necessário neste momento, utilizar a ferramenta para construção de segmento áureo.

Observe na figura 5 a seguir, que o triângulo OBM é retângulo em M, pois M é o ponto médio da corda AB da circunferência pontilhada.

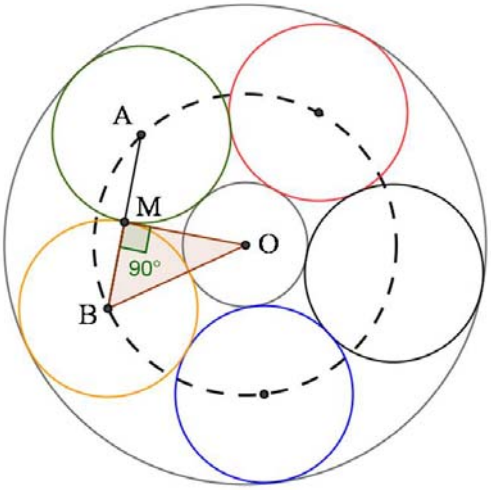


Figura 5 – OBM é um triângulo retângulo.
Fonte: Autores

Como BM é um raio de uma das cinco circunferências de raios iguais, temos que $\overline{\mathrm{BM}} = \frac{R-r}{2}$. Lembrando que os centros de duas circunferências e o ponto de tangência são sempre colineares, obtemos $\overline{\mathrm{OB}} = \frac{R+r}{2}$.

Assim,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{5}\right) = \frac{\frac{R-r}{2}}{\frac{R+r}{2}} = \frac{R-r}{R+r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R+r)\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}} = R-r \Leftrightarrow R\left(1-\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}\right) = r\left(1+\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\left(1+\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}\right)}{\left(1-\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}\right)} \Leftrightarrow r = R\ \ \frac{1-\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}}{1+\operatorname{sen} 36^{\mathrm{o}}}.$$

Por meio do GeoGebra constrói-se as duas circunferências concêntricas, cujos raios têm essa proporção.

Para continuar a construção, necessita-se de dois conceitos, o primeiro é o de homotetia. Seja O um ponto e *k* um número positivo. A homotetia de centro O e razão *k* é uma transformação no plano Euclidiano que fixa O e aplica um ponto *P* distinto de O em um único ponto P^* em na reta OP, tal que:

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}^*} = k(\overrightarrow{\mathrm{OP}})$$

Um outro conceito necessário para a construção do logotipo é o de inversão de um ponto em relação a uma circunferência.

Um ponto A' é o inverso de um ponto A em relação a uma circunferência de centro O e raio *r* dada, se $\overline{OA}.\overline{OA'} = r^2$. O ponto O é chamado centro de inversão.

Um resultado bastante conhecido e que não será demonstrado neste artigo é o Lema a seguir.

Lema: Seja δ uma circunferência de centro *C* distinto de O e raio *s*. Então, a homotetia de centro O e raio *k*, aplica δ em uma circunferência δ^* de centro C^* e raio *ks*.

O resultado a seguir, finaliza os conceitos e resultados necessários para a construção do logotipo.

Teorema: Seja γ um círculo de raio de medida *r* e centro O, e δ uma circunferência de centro C e raio de medida *s*. Suponhamos que O localiza-se no exterior de δ. Seja *p*, a potencia do ponto O em relação a δ. Seja $k = (r^2/p)$. Então, a imagem δ´ da inversão de δ em relação a γ, é uma circunferência cujo raio mede *ks* e o seu centro C* é a imagem de C sob a homotetia de centro O e razão *k*.

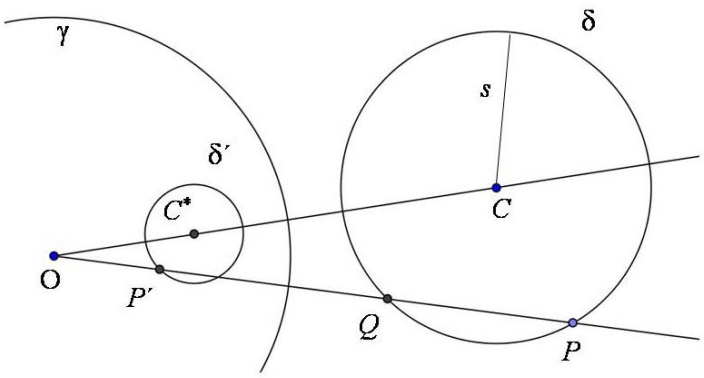


Figura 6 – ilustração para o teorema
Fonte: Autores

Demonstração: Como O é exterior a δ, a semirreta S_{OP} de origen O passando por um ponto *P* da circunferencia δ, encontra δ em um outro ponto *Q*, ou é tangente a δ em *P* (e neste caso *Q* = *P*). Então:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}.\frac{\overline{OP}}{\overline{OP}} = \frac{r^2}{p},$$

Em que *P'* é o inverso de *P* em relação a circunferência γ. Isto demonstra que mostra *P´* é a imagem de *Q* sob a homotetia de razão $k = (r^2/p)$. Segue, juntamente com o lema, que $\delta^* = \delta'$. Logo, a imagem δ´ da inversão de δ em relação a γ, é uma circunferência

cujo raio mede *ks* e o seu centro C^* é a imagem de *C* sob a homotetia de centro O e razão *k*.

Para terminar de construir o logotipo, considera-se o conjunto formado pelos dois círculos concêntricos e pelos cinco círculos de raios iguais tangentes a eles já construídos, e aplica-se uma transformação de inversão em cada um dos elementos, em relação à uma circunferência que cumpre a hipótese do teorema anterior.

A menos que o centro de inversão seja o seu centro comum, os inversos dos círculos concêntricos não são concêntricos, como o que ocorre no logotipo. Além disso, após a inversão, as cinco circunferências iguais não têm mais raios iguais, dando o aspecto irregular do logotipo.

Os raios das circunferências tornam-se mais desiguais quanto mais o centro de inversão se afasta do centro dos círculos concêntricos, conforme será mostrado durante a realização do minicurso.

Mas observe que as propriedades de tangência são preservadas, em virtude da injetividade da inversão, que faz com que o número de pontos de interseção de figuras seja preservado mediante a transformação.

Para produzir a animação do logotipo, será utilizado o controle deslizante, pois basta girar o conjunto das cinco circunferências de raios iguais na figura original que os seus transformados por inversão mudarão de tamanho e posição à medida que isto ocorre.

Referencias bibliográficas

Carvalho, P. C. P. (1999). O logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática. *Eureka!*, 4, 42-46.

Greenberg, M. J. (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company.

OBM. (2012). *O projeto gráfico da OBM*. http://www.obm.org.br/opencms/quem_somos/logotipo/info_logotipo.html. Consultado 25/08/2012.

DISCUSSÃO SOBRE A NOÇÃO DE INTEGRAL IMPRÓPRIA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Francisco Regis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE

Modalidad: Comunicacion
Nivel educativo: Universitário
Palabras clave: Integral Imprópria, Geogebra, Teoremas, Convergência.

Resumo

Do ponto de vista histórico, o conceito de integral contemplou apenas a classe de funções limitadas, definidas em intervalos fechados do tipo $[a,b]$. *Por outro lado, o estudo dos métodos de integração de função evoluiu, originalmente, a partir da noção de somas de riemann, quando integrais de funções ilimitadas, descontinuas e definidas em intervalos do tipo* $(a,b]$, $[a,b)$, $(-\infty,b]$ *e* $[a,+\infty)$, *passaram a ser objeto de estudo. Deste modo, neste artigo, trazemos a discussão de exemplos que detêm o potencial de uma exploração diferenciada, desde que apoiada na tecnologia. Mostraremos que o software Geogebra permite a extração de profícuas informações conceituais, sobretudo de natureza geométrica. Seu uso possibilita suavizar a abordagem algorítimico-procedimental, a qual constitui uma característica questionada por especialistas. Num contexto mais amplo do ensino do Cálculo.*

1. Introdução

Reconhecidamente, os conceitos de limite, derivada e integral constituem os principais no contexto do Cálculo Diferencial e Integral a Uma Variável Real – CUV. De modo particular, quando tratamos da noção de integral, discutida nos livros de Cálculo, de modo *standard*, nos atemos ao estudo de funções contínuas, definidas em intervalos do tipo $[a,b]$, para a descrição da *integral de Riemann*. Por outro lado, quando lidamos com funções (contínuas) ilimitadas ou funções definidas em intervalos do tipo $(a,b]$ ou $[a,b)$, deparamos a definição atinente às *integrais impróprias*.

Assim, neste artigo, discutiremos e exemplificaremos situações envolvendo funções $f:(a,b]\to IR$ (resp. $f:[a,b)\to IR$), ilimitadas e contínuas. A partir das quais, definimos $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ (resp. $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$), chamada de *integral imprópria*. Outrossim, a partir da exploração e significação, sobretudo de natureza geométrica e numérica, proporcionado pelo *software Geogebra*, evidenciaremos o significado e comportamento de convergência, divergência e, mesmo a possibilidade do comportamento de *indefinição* do objeto supracitado.

Por fim, acrescentamos a importância do domínio e entendimento das argumentações formais atinentes aos teoremas e propriedades (critérios de convergência) doravante discutidos, entretanto, a mera inspeção e reprodução de cadeias dedutivas de inferências lógicas, exigidas em cada demonstração, não asseguram um entendimento conceitual e intuitivo dos mesmos. Sendo assim, neste cenário, o *Geogebra* adquire um papel diferenciado, no sentido de potencializar determinadas abordagens e viabilizar a evolução de um raciocínio heurístico distinguido.

2. Sobre a noção de *integral imprópria*

Lima (2006, p. 140) explica, de modo sucinto, que, *integrais impróprias* podem ser de dois tipos: integrais de funções ilimitadas (definidas num intervalo limitado, porém não fechado) e integrais de funções definidas num intervalo ilimitado. No contexto do Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real – CUV, toda a discussão inicial da noção de integral, considera as funções do tipo $f:[a,b]\to IR$ contínuas no intervalo fechado. Deste modo, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ não se aplica a intervalos do tipo $[a,+\infty),(-\infty,b]$ ou $(-\infty,+\infty)$, e mesmo quando a função f é descontínua em algum ponto do intervalo $[a,b]$.

Por outro lado, antes da apresentação deste formalismo, vale comentar a ideia heurística (e intuitiva) subjacente a tal conceito. Neste sentido, Bloch (2011, p. 342) explica que supondo que possuímos uma função cujo domínio é $[a,b)$, "podemos pensar numa aproximação deste intervalo por meio de intervalos do tipo $[a,t]$, onde $t \in (a,b)$ e t é pensando como cada vez mais próximo do ponto $x = b$.". Deste modo, podemos definir a *integral imprópria* como "uma função de $[a,b)$, por meio da avaliação da integral ordinária de uma função em cada intervalo fechado $[a,t]$, e tomando limite de t se aproximando de b, se o limite existir." (BLOCH, 2011, p. 342).

Lima (2006, p. 142) define ainda a *integral imprópria* $\int_a^b f(x)dx$, de uma função $f:(a,b] \to IR$ ilimitada e contínua, como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$. Assim, em cada intervalo do tipo $[a+\varepsilon, b]$, f é contínua, logo, integrável. Todavia, acrescenta que "*o problema é saber se existe ou não o limite acima. Se ele existir a integral é convergente; se não existir o limite a integral é divergente*.".

O aspecto importante, pois, é a análise da convergência ou divergência. Para efeito de nossa discussão, vamos considerar um exemplo fornecido por Lima (2006, p. 143). Neste sentido, consideremos a integral $J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$. A argumentação do autor, totalmente de cunho algébrico, é descrita na condição em que $k \in IR$, cumpre $k^2 < 1$, então I converge. Lima (2006, p. 143) comenta que, para valores $0 \le x \le 1$, temos que $0 \le x \le 1 \therefore 0 \le x^2 \le x \le 1$, assim, $0 \le k^2 \cdot x^2 \le k^2$. Segue que $1-k^2 \le 1-k^2 \cdot x^2 \therefore \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = K$, para todo $k^2 < 1$. Assim, ele compara os termos: $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \le \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-k^2x^2)}} \le K \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Segue que podemos, então, comparar as integrais $J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \le J_2$, onde

$$J_2 = K\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = K \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = K \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[arcsen(x)\right]_0^{1-\varepsilon} = K \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[arcsen(1-\varepsilon)\right].$$

Fazendo as contas, inferimos que $J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \le J_2 = \frac{\pi}{2}$.

A declaração tácita do autor assegura a convergência da integral J_1. Na figura abaixo, descrevemos os gráficos das funções $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ e $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Com o ajuste do controle deslizante do *software Geogebra*, podemos analisar o comportamento numérico das integrais J_1 e J_2, para valores $0\le x<1$ ($J_1\le J_2$).

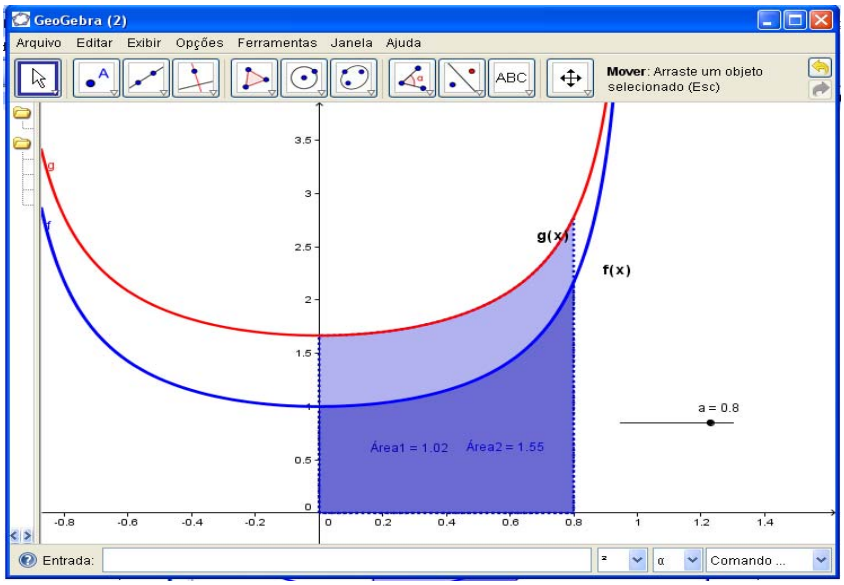


Figura 1: Descrição geométrica de convergência

Consideremos agora a seguinte integral $J_3=\int_0^{\infty}\frac{sen(x)dx}{x}$. Reparemos que a função $f(x)=\begin{cases}\frac{sen(x)}{x}\text{ se x}\neq 0\\ 0\text{ se x=0}\end{cases}$. Neste caso, vamos definir $a_0=\int_0^{\pi}\frac{sen(x)dx}{x}, a_1=-\int_{\pi}^{2\pi}\frac{sen(x)dx}{x}, a_2=-\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{sen(x)dx}{x},\ldots,\ldots$. Assim, passamos a considerar a série $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ descrita por meio dos números $a_i's$ assim definidos. Segue, pelo critério de Leibniz (LIMA, 2006, p.40) que podemos verificar a seguinte condição $a_{i+1}\le a_i$, seguindo a substituição $x\mapsto x-\pi$ indicada em Hairer & Wanner (2008, p. 258), converge. A interpretação geométrica deste resultado é colocada em destaque na figura 2. Nela, divisamos regiões, nas quais, consideramos regiões abaixo do eixo Oy.

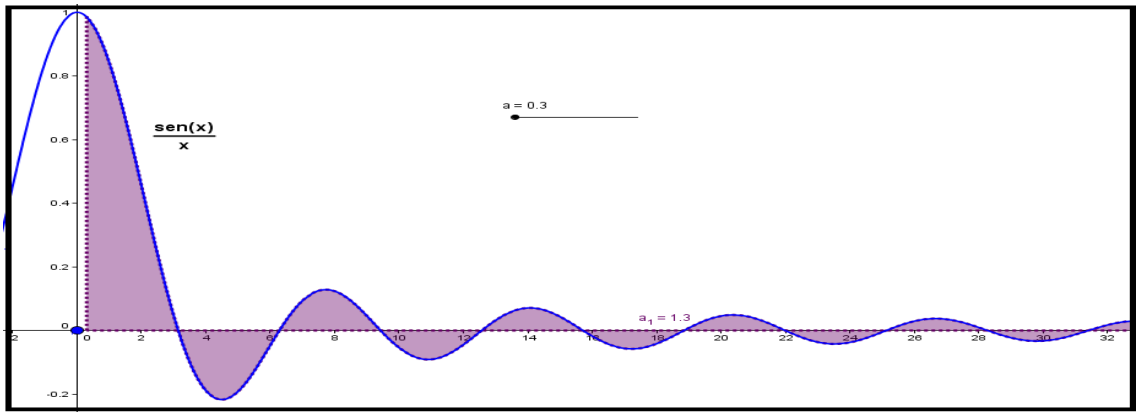


Figura 2: Interpretação geométrica do comportamento da integral imprópria e sua convergência

O resultado que garante a produção de uma ilação a respeito do comportamento da integral J_3 é evidenciado a partir do enunciado do seguinte teorema, demonstrado em Hairer & Wanner (2008, p. 259). Apresentamos, pois, seu enunciado.

Teorema (Maclaurin, 1742): Dado uma função $f(x) \geq 0$ não crescente em $[1,\infty)$, então teremos: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{\infty}$ f(x)dx converge .

Vale comentar que em Binmore (1977, p. 134) encontramos o teorema.

Teorema (Euler-Maclaurin): Dada uma função $f(x)$ contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$. Então, a sequência definida por $\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$ é decrescente e limitada inferiormente por zero. Ademais, converge.

Neste sentido, Binmore (1977, p. 134-135) comenta que sendo f decrescente, para qualquer $k \in IN$, escrevemos: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$. Assim, escrevemos:

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n = \left\{\sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx\right\} - \left\{\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n} f(x)dx\right\} = \left\{f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx\right\}.$$

Segue que $\Delta_{n+1} - \Delta_n \leq f(n+1) - f(n+1) = 0 \therefore \Delta_{n+1} \leq \Delta_n$ e a sequência $\{\Delta_n\}_{n\in IN}$ decresce. Ademais, se tem: $\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = f(n) > 0$. Então $\{\Delta_n\}_{n\in IN}$ é limitada inferiormente e monótona (não-crescente). Conclusão, convergirá.

Por fim, Hairer & Wanner (2008, p. 260), comentam que seria imprudente definirmos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx$, se tal limite existisse. Tal procedimento causaria incorrermos em procedimentos sem sentido matemático. De fato, escrevendo

$z = x + 1 \therefore dz = dx$. Assim, se tem $\int_{-\infty}^{\infty} z dz = \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0$ enquanto que $\int_{-\infty}^{\infty} (x+1) dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} [2\varepsilon] = \infty$. Deste modo, deparamos a seguinte definição $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{\infty} f(x) dx$ existe, se ambas as integrais do lado direito existirem.

Para concluir esta seção, destacamos ainda que alguns autores de livros de História da Matemática, como o caso de Botazzinni (1986), que indica o interesse peculiar manifestado por A. Cauchy pelas integrais impróprias, chamadas por ele, segundo Botazzinni (1986, p. 136) por "*singular integrals*" e devotou boa parte ao seu estudo. Neste sentido, o autor recorda que Cauchy calculou e analisou o comportamento da seguinte integral $\int_0^{\infty} \frac{x \cdot \cos(ax)}{sen(bx)} \frac{dx}{1+x^2}$. Os trabalhos de Cauchy ofereceram impulso ao estudo das integrais, quando deu indicações de extensão do método, ao estudar funções que apresentavam descontinuidades. Neste sentido, Boyer (1959, p. 280) recorda que se "uma função $f(x)$ é descontínua num ponto X_0 do intervalo de x_0 para X, a integral definida, definida como limite, é descrita pela soma $\int_{x_0}^{X_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{X_0 + \varepsilon}^{X} f(x) dx$, quando ε se torna indefinidamente pequeno." (BOYER, 1959, p. 280).

Deste modo, numa perspectiva semelhante à de Grattan-Guiness (1978, p. 279) quando adverte que a ordem de apresentação das teorias formais em Matemática se mostra justamente no caminho inverso da descoberta histórica. No próximo segmento, discutiremos situações que permitem uma apresentação do que Grattan-Guiness (1978, p. 279-280) chama de "heuristic presentation" (apresentação heurística). Em seu entendimento, deparamos apresentações formais ou históricas de teorias e, uma apresentação heurística estaria num local intermediário.

3. Discussão da noção de convergência e divergência com o auxílio do *Geogebra*

Vamos considerar, inicialmente, as seguintes integrais: $I_1 = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x-3}$ e $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) dx$.

O segundo caso foi tomado com inspiração no comentário de Bloch (2011, p. 345) que pontua um erro recorrente nesta categoria de integral. Neste caso, o erro se manifesta ao tomar de modo simultâneo o limite de números negativos e positivos, ao mesmo tempo. Em termos analíticos, escrevemos a impropriedade:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} \cos(x) dx = \lim_{t \to \infty} \left[sen(x) \right]_{x=-t}^{x=t} = \lim_{t \to \infty} \left[sen(t) - sen(-t) \right] = \lim_{t \to \infty} \left[2 sen(t) \right].$$

Neste caso, cabe nos atermos às terminologias estabelecidas na seção anterior e distinguir/diferenciar o comportamento de divergência do comportamento indefinido. Com efeito, ao considerar $I_1 = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x-3}$, escrevemos, segundo a definição $I_1 = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x-3} = \lim_{t\to+\infty} \int_4^{t} \frac{dx}{x-3} = \lim_{t\to+\infty} \left[\ln|t-3| - 0\right] = +\infty$ (diverge), pois, reparemos que tal limite possui o mesmo comportamento de $\lim_{x\to+\infty} \ln|x-3| = +\infty$ (ver figura 1) e, com base no gráfico (em vermelho) abaixo, concluímos que o mesmo não existe.

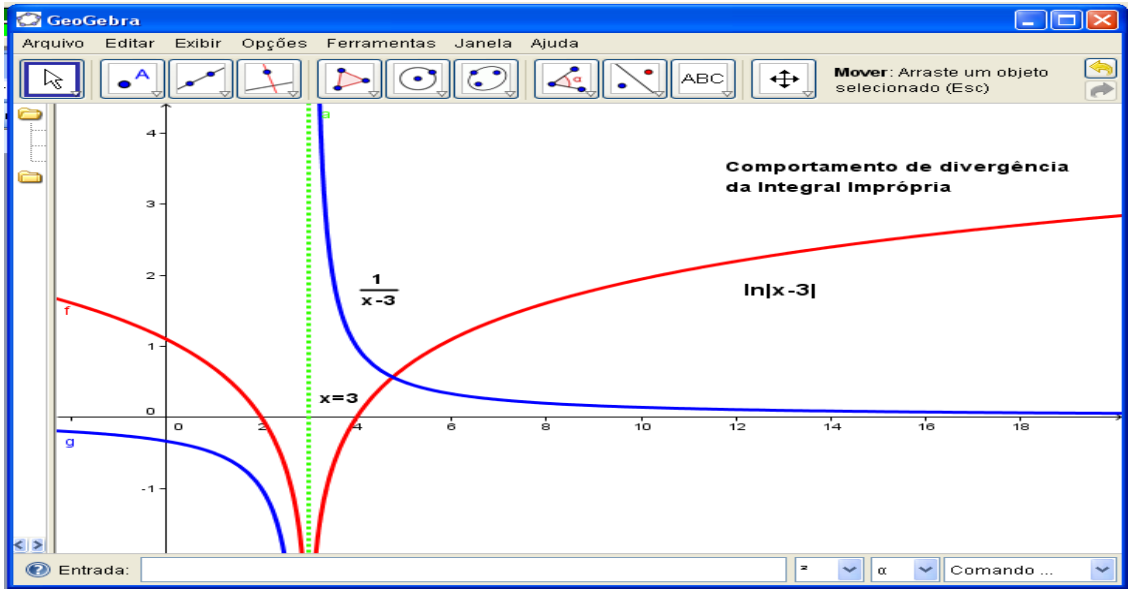


Figura 3: A descrição do comportamento de divergência da integral imprópria

Uma análise numérica detém uma importância didática, sobretudo, na condução do melhor entendimento do símbolo $I_1 = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x-3} = +\infty$. Isto significa dizer, formalmente, que: para cada número real $M > 0$, obtemos um valor suficientemente grande de $x \in IR$, com $x > 4$, de maneira que $\int_4^{x} \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| > M$. Por exemplo, se $M = 1000 = 10^3$, podemos considerar $\int_4^{10^{500}} \frac{dx}{x-3} = \ln\left|10^{500} - 3\right| \cong 1151,292 > M = 1000$.

Antes de apresentar alguns resultados formais na próxima seção, consideraremos a seguinte integral $\int_{2\pi}^{\infty} \frac{sen(x)}{x^2} dx$ e buscamos prever seu comportamento, apenas com o apoio em seu comportamento gráfico. A seguinte desigualdade é empregada $-\frac{1}{x^2} \le \frac{sen(x)}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$. Hirst (2006, p. 167) fornece uma argumentação informal e intuitiva, quando declara que "no gráfico, podemos ver que a área total é finita [...]

Assim, a integral pode ser encontrada por meio da subtração da área total sobre o eixo Ox pela área abaixo do eixo Ox, sendo assim finita.”.

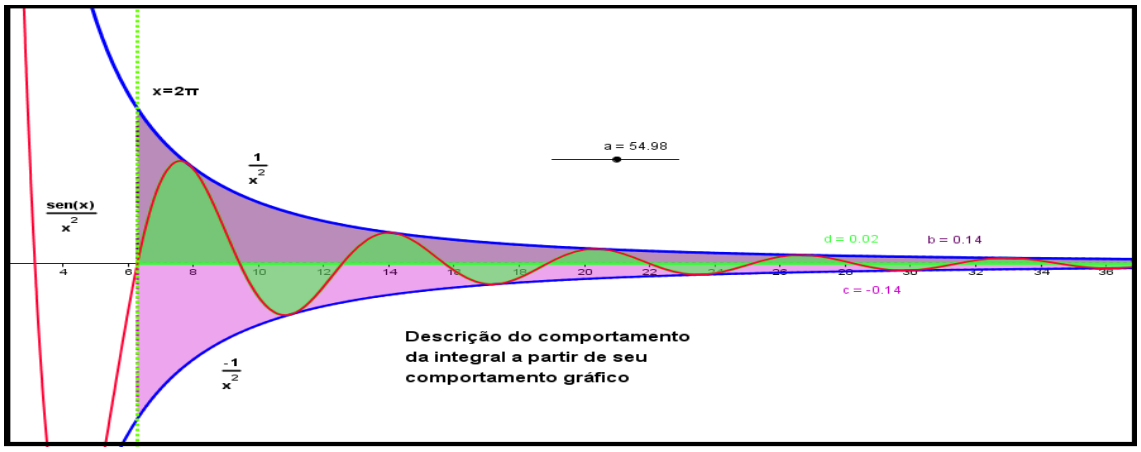


Figura 4: Hirst (2006, p. 166-167) discute o comportamento geométrico das funções integrandas

5. Considerações Finais

Como pudemos constatar, a partir de um breve relato dos aspectos históricos, o surgimento e a sistematização da noção de *integral imprópria* exigiu, por parte de vários matemáticos do passado, esforço intelectivo e, sobretudo, momentos de incompreensão ao lidar com este novo objeto.

Alguns conceitos necessários ao entendimento desta noção tais como, o comportamento geométrico e a noção vinculada de convergência, podem ser extraídos a partir do uso e exploração do *software Geogebra*. Deste modo, a partir dos gráficos exibidos, proporcionamos ao estudante o entendimento heurístico das situações que discutimos envolvendo a noção de *integral imprópria*.

Referências

BINMORE, E. G. (1977). *Mathematical Analysis: a straightforward approach*. London: Cambridge University Press.

BLOCH, Ethan, D. (2011). *The Real Numbers and Real Analysis*. New York: Springer.

BOTAZZINNI, Umberto. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. London: Springer Verlag.

BOYER, Carl. B. (1959). *The concepts of the Calculus: a critical and historical discussion of the derivative and the integral*. New York: Columbia University Press.

GUINNESS-GRATTAN, Ivor. (1978). *On the relevance of the History of Mathematics in Mathematics Education*, v. 9, nº 3, 275-285.

HAIRER, E. & WANNER, G. (2008). *Analysis by Its History*. New York: Springer.

HIRST, Keith, E. (2006). *Calculus in one variable*. New York: Springer.

LIMA, Elon. L. (2006). *Análise Real*, v. 1, Rio de Janeiro: SBM.

EL HOMBRE DE VITRUVIO

Alicia Carbajal Sylvia Bailador Victoria Vallés
aliciamarielcarbajal1@gmail.com victoriavalles92@hotmail.com
sylviabailador@gmail.com
Liceos de San Ramón y Tala - Uruguay

Modalidad: Taller
Nivel: Medio (de 11 a 17)
Palabras clave: interdisciplinariedad, historia del arte, geometría, geogebra.

Resumen
Diálogo interdisciplinar: La propuesta es una convocatoria en este sentido. Tomando como apoyo teórico la categorización presentada por Cullen (1997), entendemos por interdisciplinar una relación en la que las disciplinas intervinientes dan sus enfoques, interactúan, construyen una visión distinta. Suponemos un trabajo de identidad disciplinar, por un lado, y de disponibilidad interdisciplinar, dialógica, por otro.
Desde la historia se hará referencia a antiguos ideales clásicos de belleza relacionados con la divina proporción, centrando la actividad en la obra de Leonardo da Vinci: El Hombre de Vitruvio.
Geogebra interviene en el trazado justificado del cuadrado presente en la obra a partir del círculo y en el trazado justificado del círculo a partir del cuadrado.
Observando la figura geométrica obtenida se volverá a la pintura y a otros datos históricos y actuales sobre el tema.
El rectángulo áureo en obras del Renacimiento. Trazado justificado del mismo y de otras figuras en las que está presenta el número de oro.
Análisis didáctico sobre la naturaleza dual de las figuras geométricas e incidencia del cambio de instrumento de trazado.

Interdisciplinariedad

Este trabajo tiene su origen en la búsqueda de respuestas. Va tomando cuerpo a partir del valor de la formación específica del otro, de la fortaleza que va emergiendo desde la otra disciplina. Se dispara y enriquece a partir de preguntas desde ambas áreas del conocimiento. Busca encontrar respuestas en un tiempo que se percibe como breve y que es una realidad de los profesores de nuestro tiempo y de nuestra sociedad. Relación dialógica que enriquece y permite la construcción de una visión distinta del objeto de estudio y del proceso del enseñar y del aprender.

Es importante señalar además que la actividad involucra dos disciplinas consideradas no afines y hasta opuestas, Matemática e Historia y sus contenidos están incluidos en los programas de 5º año orientación Científica y 6º años de Físico-Matemático y Matemática y Diseño del Bachillerato del Ces de Anep.

El Hombre de Vitruvio

Es una obra que está íntimamente relacionada con el número de oro. En este trabajo se incursionará en torno a ambos, profundizando la exploración a partir de interrogantes que se consideren relevantes para impulsar aprendizajes.

¿Qué preguntas te surgen a partir de este nombre?

Se plantea que cada participante entregue por escrito las preguntas para irlas incorporando así al diálogo.

Preguntas iniciales

Desde Matemática: ¿Hay algún misterio en torno a esta obra? ¿Cómo es que Leonardo tuvo la intención de que ese número estuviese involucrado en la misma? ¿A qué se debe su nombre?

Desde Historia del Arte: ¿Cómo construir un rectángulo áureo? ¿Qué es un triángulo áureo? ¿Cuáles son los segmentos que se encuentran en proporción áurea en el pentágono regular?

Historia del arte y Matemática

¿Por qué es valioso saber sobre la historia de esta pintura en un curso de Matemática?

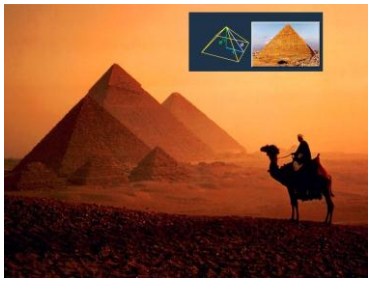
Una obra de arte es un testimonio que permite conocer momentos de las sociedades y en particular de las personas en torno a ellas. Es necesario aprender a apreciar el arte, el estudio de la obra, en un contexto sociocultural, para poder analizar los distintos factores que incidieron en la creación de la misma.

Asimismo hay elementos matemáticos, en este caso un número, que aparece recurrentemente no solo en esta obra sino en muchas otras a través del tiempo. Es por esto que en el proceso de interpretación, el arte necesite también de un conocimiento matemático y un análisis desde este lugar.

Comenzaremos a indagar en qué otros momentos o circunstancias apareció ϕ en el arte.

Muy probablemente, cuando estudiamos este número nos preguntemos si su recurrencia es intencional o no. La pregunta es válida sobre todo para las obras de la Antigüedad, dado que desconocemos la intencionalidad de los artistas, por lo tanto es aún más asombroso constatar su presencia recurrente, dado que se encuentra en impresionantes construcciones antiguas, lo que lo hace parte de la esencia humana. Como medio y modelo para plasmar la belleza, la divina proporción ha sido usada por muchas culturas, y los pueblos la han aplicado en sus monumentos con sentido estético.

¿Dónde aparece por primera vez? Lo más antiguo es la gran pirámide de Keops, en Gizeh. Data del 2600 a.C. Esta pirámide tiene cada una de sus caras formadas por dos medios triángulos áureos.

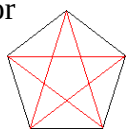


En la gran pirámide, la altura del triángulo de sus caras guarda doble relación áurea con la base. ¿Es esta afirmación equivalente a la figura trazada sobre la imagen anterior?

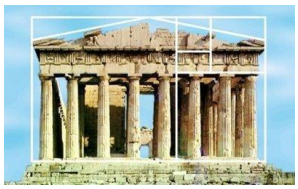
Sin embargo, la asimilación con la gran Pirámide es una inferencia ya que sus medidas han variado con el tiempo, al perder todo su recubrimiento.

Donde sí lo encontramos con seguridad es en Grecia. Siglo V a.C. ¿Por qué en Grecia?
Los griegos consideraban al hombre como medida de todas las cosas y el cuerpo humano es una constante expresión de la proporción áurea .o sea que fue estudiado no como "unidad" sino como relación o proporción entre partes de un cuerpo o entre cuerpos.

Los pitagóricos, que definían los números como expresiones de proporciones (y no como unidades), creían que la realidad es numérica y que esta proporción expresaba una verdad fundamental acerca de la existencia. Formaron una secta secreta que trataba de descubrir los misterios universales. Se expandieron, al ser perseguidos, por toda Grecia.



La estrella pentagonal o pentágono estrellado era el símbolo de los pitagóricos que pensaban que el mundo estaba configurado según un orden numérico, donde no tenían cabida números como este. La paradoja es que en su propio símbolo se encontrara un número raro: el número de oro.



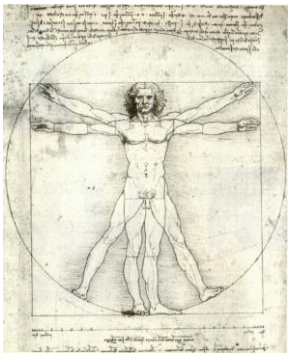
Otra obra en la cual podemos observar la presencia del número de oro es el Partenón: su alzado es el paradigma de rectángulo áureo en el Arte. Platón decía: *es imposible combinar bien dos cosas sin una tercera, hace falta una relación entre ellas que los ensamble, la mejor ligazón para esta relación es el todo. La suma de las partes como todo es la más perfecta relación de proporción.*

Cuenta la leyenda que se tomó la medida del pie de un hombre, sexta parte de su altura total, y se aplicó esta proporción a la edificación de una columna, por lo que en ella se aprecian las proporciones, fuerza y belleza del cuerpo masculino. En escultura hay que destacar el famoso Apolo de Belvedere. Los lados del rectángulo en el cual está idealmente inscrita la estatua del Apolo de Belvedere están relacionados según la sección áurea, es decir, con una proporción de 1:1,618.

Sobre el origen del nombre: Phi (Fi)

Son justamente las iniciales del escultor Phidias (Fidias), el autor de las esculturas del friso del Partenón. De ahí fue tomado este concepto por los romanos. Vitrubio, arquitecto y militar romano, dice que la armonía consiste en el acuerdo de medidas entre los diversos elementos de la obra y estos con el conjunto. Ideó una fórmula matemática para la división del espacio dentro de un dibujo, conocida como la sección áurea, y se basaba en una proporción dada entre los lados más largos y los más cortos de un rectángulo. Vitruvio estableció una afinidad entre el hombre y las figuras geométricas, al descubrir que el hombre de pie con los brazos extendidos puede inscribirse en un cuadrado, si separa las piernas puede inscribirse dentro de un circulo, que tiene como centro el ombligo.

Esta proporción no se pierde durante la edad media cuando hubo por mil años un rechazo a toda la cultura griega por considerarla contraria a las enseñanzas de Dios. El número de oro es la base del arco parabólico y del arco apuntado, innovaciones geométricas que se aplicaron en el gótico. Incluso en numerosas portadas románicas y góticas aparece como borde y frontera el triángulo áurico, como por ejemplo en la catedral de Notre Dame de París. En el Renacimiento el número de oro aparece con enorme fuerza. Uno de los primeros ejemplos es la fachada de la iglesia de Santa María Novella, obra de Leon Battista Alberti, quien utilizó la Divina proporción junto con las notas musicales para hacer la decoración.

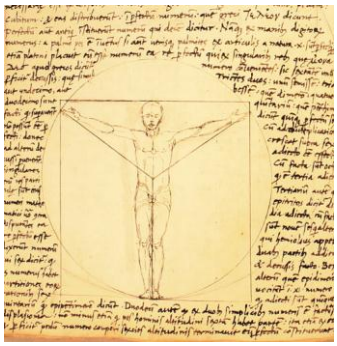


Leonardo da Vinci tomó los estudios de Vitrubio para ilustrar el libro *La Divina Proporción* de Luca Paccioli editado en 1509.

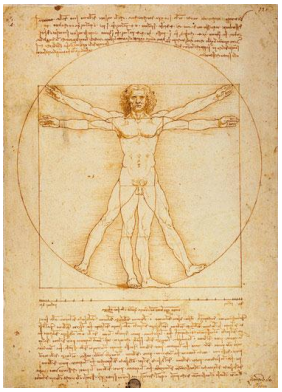
En dicho libro se describen cuales han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. En particular, Paccioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas

partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90º con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

Sobre el origen del Hombre de Vitruvio:



El 'Hombre de Vitruvio' (C. 1490), Giacomo Andrea Da Ferrara, Biblioteca Ariostea, Ferrara (Cart. Sec. XVI, Fol Figurato, Classe II, N. 176, Fol 78V)



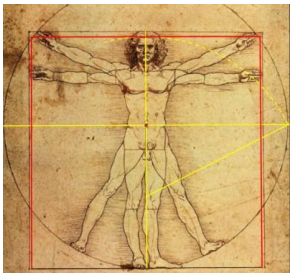
El "Hombre de Vitruvio" (C.1490-2, no hay exactitud, según Huyghe) Leonardo Da Vinci Museo del Louvre, Francia

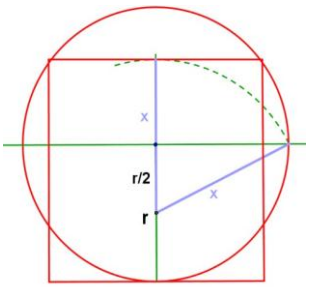
Desde la actualidad: En 1986, hace apenas 26 años, el arquitecto Claudio Sgarbi encontró en la Biblioteca Comunale Ariostea, en Ferrara, Italia, una copia anónima de los Diez Libros de Arquitectura escritos por el arquitecto romano Vitruvio junto con 127 dibujos entre los que figuraba un hombre desnudo dentro de un círculo y un cuadrado, misteriosamente similar a la obra de Da Vinci. Este manuscrito corresponde a finales del 1400. Precisamente en 1490, año en que se cree fue dibujado El Hombre de Vitruvio por Da Vinci, éste escribe sobre el "Vitruvio de Giacomo Andrea" tal vez refriéndose al manuscrito de Ferrara. Anota además que habría cenado con el arquitecto Giacomo Andrea de Ferrara. Ocho años más tarde, Luca Pacioli (franciscano y matemático italiano) escribe en Milán "La Divina Proporción" encargando dibujos a Leonardo Da Vinci para ilustrarlo. Allí se refiere a Giacomo como un gran amigo de Leonardo y un experto en Vitruvio. Es de suponer que ambos estudiaron los libros de arquitectura de Marcus Vitruvius Pollio (siglo I a.C., escritor, arquitecto e ingeniero

romano que sirvió al ejército de Julio Cesar) quién, si bien planteaba la idea de que el cuerpo humano podía ser inscrito en una circunferencia y un cuadrado, no dejaría ilustración alguna. Los ensayos presentes en el manuscrito de Ferrara dan cuenta que no fue ese copia del de Da Vinci, por lo que tal vez haya sido el primer Hombre dibujado. En función del círculo, símbolo de lo cósmico, lo divino, y el cuadrado que representa lo terrenal, la figura del Hombre de Vitruvio (la que Vitruvio pensó, la que Da Vinci y Andrea dibujaron) es por tanto más que una proposición geométrica, una metafísica: "El ser humano es el mundo". Así Leonardo escribe en 1942: "para los antiguos el hombre se llamó un mundo menor y sin duda el uso de este nombre está bien dado porque… su cuerpo es un análogo para el mundo".

Aún se estudian estos y otros aspectos relacionados con la obra y la divina proporción. Así el actual profesor e historiador francés, Pierre Gros, estudioso de la arquitectura romana y especialmente de Vitruvio, afirma que estudiar más acerca de si Leonardo y Andrea Giacomo colaboraron en sus dibujos es una idea "seductora y convincente" (Percha, 2012).

Analizando el relato de Vitruvio realicemos la construcción justificada del cuadrado a partir del círculo, de forma tal que la razón entre el lado del primero y el radio del segundo sea el número ϕ.

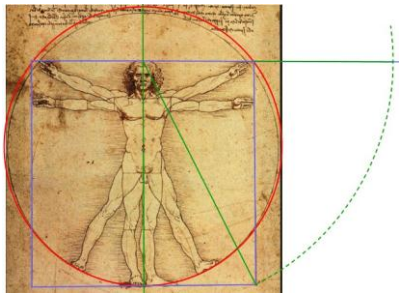


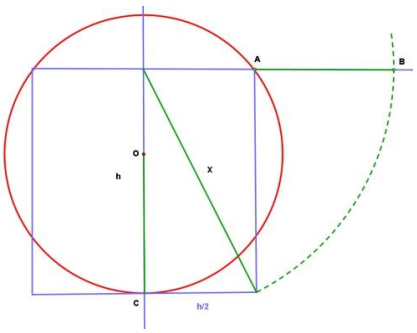


$X^2=(r/2)^2+r^2 \Rightarrow x^2=(r^2/4)+r^2 \Rightarrow x^2=5r^2/4 \Rightarrow x=(\sqrt{5}.r)/2 \Rightarrow l=x+(r/2) \Rightarrow$

$\Rightarrow l=(\sqrt{5}.r)/2+r/2 \Rightarrow l=[r.(1+\sqrt{5})]/2 \Rightarrow 1/r=[[r.(1+\sqrt{5})]/2]/r \Rightarrow l/r=(1+\sqrt{5})]/2=\phi$

Construcción justificada del círculo a partir del cuadrado de forma tal que el lado del cuadrado y el radio del círculo se encuentran en razón Áurea.





$$x^2 = h^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{5 \cdot h^2}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{5} \cdot h}{2}$$

$$OC = AB = \frac{\sqrt{5} \cdot h}{2} - \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot h$$

$$\frac{h}{OC} = \frac{h}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot h} = \frac{2 \cdot h}{\left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot h} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

¿Dos vértices del cuadrado pertenecen al círculo?

¿y en la obra?

La noción de figura geométrica y el uso del Geogebra

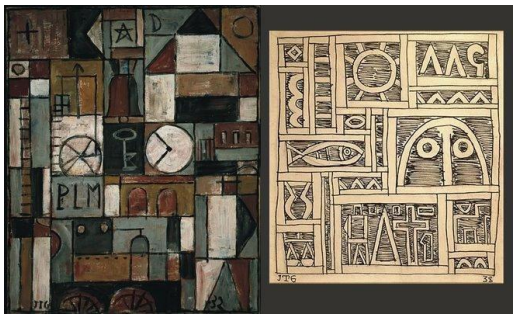
En el proceso de los trazados se explicitará la necesaria comunicación con la computadora y una descripción que priorice el énfasis sobre aspectos de pertenencia y analíticos de geometría.

Se observará cómo se habilitan y organizan tareas con el programa según qué conocimiento geométrico es requerido para las mismas.

Por otra parte se vivenciará cómo el cambiar las herramientas requiere un cambio de los objetos matemáticos, modifica la naturaleza del conocimiento.

Asimismo toda la propuesta deja de manifiesto la naturaleza dual de las figuras geométricas, una dualidad conflictiva. ¿Figura como trazado o como concepto? ¿Cuándo un dibujo adquiere características de figura?

Más asombroso aún es encontrar el triángulo áureo en la puerta del Sol de Tiahuanaco, en el monumento a Viracocha, dios del Sol Inca, en el período clásico de Sudamérica, por el 1300.



No podemos olvidarnos del genial Torres García que basó el constructivismo en la fracción áurea.-

Referencias bibliográficas:

Arqueología. Terrae antiqvae, red social de arqueólogos e historiadores (2012). *El otro Hombre de Vitruvio.* http://terraeantiqvae.com/profiles. http://terraeantiqvae.com/profiles/blogs/el-otro-hombre-de-vitruvio Consultado el 225/10/2012.

Barwise, J. y Etchemendy, J. (1991): *Visul Information and Valid Reasoning*. En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.) Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Mathematiccal Associatien of América.

Cullen, C. (1997). *Crítica de las razones de educar.* Buenos Aires: Paidós.

Gallego García, R. (2004) *Historia del Arte*. Madrid: Editex.

Garrido González, A. (1996) *Historia del Arte.* Barcelona: Edebé.

Gombrich, E.H. (2003) *La Historia del Arte.* Londres: Ed. Phaidon.

Huyghe, R. (1976) *El Arte y el Hombre.* Barcelona: Ed. Planeta.

Laborde, C. (1998) *The Computer as Part of the Learning Environment: The Case of Geometry*. De Keiter C. y Ruthen K.: Learning from computers: Mathematics Education y Technology.

Louvre (2012) http://www.louvre.fr/en/visites-en-ligne consultada el 20/10/12.

Peluffo Linari,G. (2003) *Historia de la pintura en el Uruguay*. Montevideo: E.B.O.

Salandrú, M. ,Rodríguez, F.(2011), *El Arte y la Historia*. Montevideo: Ed. Monteverde

LOS APPLETS GEOGEBRA EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

Mercedes Villalba – Adriana López
mercedes.villalba3@gmail.com – lopezadriana36@gmail.com
Instituto Profesores Artigas e Institutos Normales Montevideo - Uruguay

Modalidad: Taller
Nivel educativo: Primaria (6 a 11 años)
Palabras clave: probabilidad, simuladores, frecuencia, incertidumbre

Resumen
Este taller propone trabajar el enfoque frecuencial de la probabilidad y para ello utilizamos GeoGebra como una herramienta con la que los aprendices pueden experimentar matemáticamente. Para entender el comportamiento de "los grandes números" es necesario apreciar qué sucede con los fenómenos aleatorios cuando se repiten un número muy grande de veces y, como esto es prácticamente imposible en una clase, los simuladores se constituyen en el recurso didáctico por excelencia: en tanto variable didáctica modifica significativamente los procesos cognitivos asociados al experimento aleatorio.
La selección de applets con que trabajaremos con los participantes del taller permitirá:

- *relacionar el cálculo de la probabilidad a priori con la probabilidad a posteriori de la realización del experimento aleatorio*
- *identificar las características de un experimento aleatorio*
- *determinar el espacio muestral*
- *clasificar los tipos de sucesos*
- *vincular Probabilidad y Estadística*

Utilizamos GeoGebra para la modificación de un applet publicado en el repositorio oficial de construcciones y recursos relacionados con este software: http://www.geogebratube.org/student/m16503, a partir del cual construimos una secuencia de ítems didácticos para que los estudiantes exploren comportamientos aleatorios en la simulación presentada, visualicen relaciones entre objetos, realicen conexiones conceptuales y experimenten con las matemáticas.

Destacamos el valor de la licencia Creative Commons que nos permite utilizar, modificar y poner a disposición la producción intelectual en un ámbito de construcción colaborativa.

Un ítem didáctico está formado por una guía, una serie de cuestiones que invitan a la exploración y dirigen el uso del applet.

Iniciamos con una breve introducción al contexto situacional en que está realizada la propuesta, unas instrucciones de uso y una serie de preguntas previas y posteriores a la simulación.

Al crear un ítem didáctico estamos creando un pequeño "entorno de aprendizaje", a veces llamado "micromundo". Es importante adaptar los ítems didácticos a nuestra realidad educativa, considerando el nivel y experiencias previas de nuestros alumnos.

Item didáctico 1

Simulación de tiro al blanco - 1

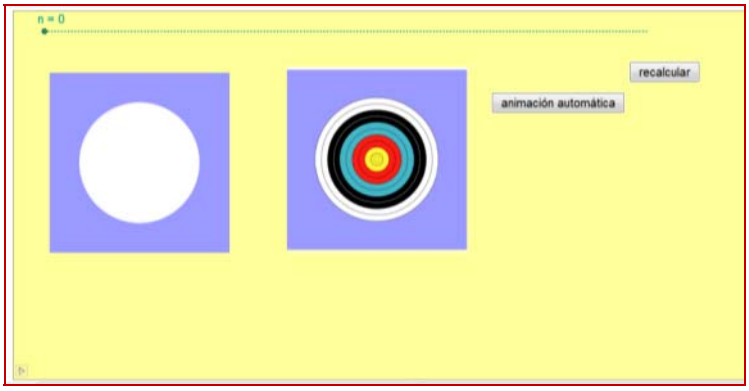
El tiro con arco es actualmente una práctica deportiva en la que se utiliza un arco para disparar flechas. Su origen hay que buscarlo en el uso de esta arma como instrumento de caza y como instrumento bélico. Con la aparición de las armas de fuego quedó obsoleto como instrumento "profesional" de uso general y su utilización quedó relegada a un uso deportivo y de ocio.

En el Tiro con arco olímpico, el objetivo es acertar lo más cerca del centro de la diana para obtener el máximo número de puntos. Los blancos en interiores están a distancias de 18 y 25 m. Los exteriores varían desde 30 hasta 90 m. La competición se divide en finales de 3 y 6 flechas. Los arqueros tienen un tiempo limitado para disparar sus flechas, puntúan cada final sumando los puntos de cada flecha y las que están tocando una línea tienen puntuación mayor.

Abre este enlace en una nueva ventana:

http://vamosticos.terra.co.cr/juegos-olimpicos/londres-2012/videos/watch/oh-hyek-de-corea-se-lleva-el-oro-en-el-tiro-con-arco-412400

¿Por qué crees que estos competidores olímpicos aciertan en el centro de la diana? ¿Qué piensas que pasaría si cualquier persona intentara tirar al blanco?



Inspirados en este deporte, unos chicos empezaron a jugar al tiro de dardos para lo cual diseñaron un objetivo de tiro al blanco con forma de cuadrado de lado 6 y una diana circular de radio 2.

En sus primeras jugadas no tenían ninguna estrategia y pensaron: si un dardo da en el blanco ¿Cuál es la probabilidad que dé en la diana? Anima la simulación y da tu respuesta.

Esta contextualización responde a la corriente conocida internacionalmente como Educación Matemática Realista, fundada por Hans Freudenthal, cuya idea central es que la matemática debe ser conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano. Entre sus principios mencionamos el uso de modelos (materiales, esquemas, diagramas y símbolos) como herramientas para simbolizar y organizar estos contextos y situaciones, la fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática, el papel clave del docente como guía.

Los ítems didácticos hacen primar las competencias generales sobre los conocimientos puntuales ofreciendo una visión más amplia de las conexiones entre los diferentes contenidos que habitualmente vemos estructurados en ramificaciones de temas y apartados. De este modo, conceptos que antes parecían islas independientes, asociados a unidades concretas, aparecen conectados por numerosos puentes.

El abordaje matemático y didáctico de la probabilidad es muy complejo pues se trata de sucesos aleatorios reales que la matemática modeliza para ciertas circunstancias que no siempre pueden ser contempladas o cuya complejidad trasciende su tratamiento a nivel

escolar. Sin embargo, el conocimiento social puede aportar a la pertinencia o no de aplicar fórmulas y modelos y qué restricciones considerar. Para el caso de acertar en un círculo no solo importa la longitud de su diámetro sino la frecuentación con el tiro al blanco y el aprendizaje de estrategias y técnicas. De ahí la necesidad de diferenciar las condiciones en que se realiza el experimento.

Es indudable el beneficio que reportan los simuladores para realizar un gran número de experimentos. Se llama simulación a la sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente que permite obtener estimaciones de probabilidades de sucesos asociados al experimento en cuestión. Tiene la ventaja de realizar un número muy importante de experimentos en muy corto tiempo. En nuestro applet, al poner en funcionamiento el simulador, aparece un punto por cada tirada que da en el blanco - dentro y fuera de la diana – y un texto que registra la cantidad correspondiente a cada región, así como la frecuencia relativa.

Item didáctico 2

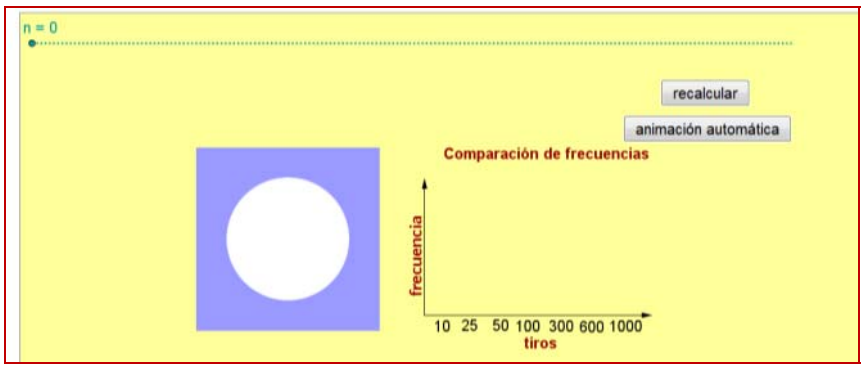
Simulación de tiro al blanco - 2

Relaciona la cantidad de tiros que dan en la diana con los valores representados en el gráfico.

Puedes detener y reiniciar las tiradas con los controles "pausa" y "play": para ayudarte a entender las relaciones numéricas detente en las tiradas 10, 100, 300, 1000 Simula varias veces las 1000 tiradas.

¿Cuál es el comportamiento de la poligonal a medida que aumenta el número de tiradas?

¿Cómo puedes asociar dicho comportamiento con la probabilidad de acertar en la diana?



Para poder contestar correctamente a las preguntas, los alumnos deben poder observar y manipular la construcción en todo momento, de acuerdo a las consignas y preguntas formuladas, por eso construimos la secuencia de ítems de manera que tengan la información suficiente y necesaria y pongan en juego lo elaborado previamente.

A los elementos del applet anterior, agregamos un par de ejes ortogonales en cuyo eje horizontal se ubica el número que representa la cantidad de tiros realizados, de manera que, al poner en funcionamiento el simulador, además de los puntos y el texto, los resultados que se van obteniendo se traducen en la graficación de los puntos correspondientes a las frecuencias relativas de los valores de abscisa.

Incluimos las instrucciones mínimas para indicar el uso de los botones de "play" y pausa, así como el significado de los números del eje de abscisas, para que la manipulación de la construcción sea eficiente.

Es indudable que aquí la forma de organizar los datos obtenidos refiere a la Estadística. Aparece el concepto de frecuencia relativa, que en este caso del tiro al blanco representa la razón entre el número de veces que el tiro dio en la diana y el total de tiradas registradas.

Analicemos algunos datos obtenidos del gráfico, por ejemplo:

Supongamos que en una experiencia aparece 0,4 como valor de la frecuencia relativa habiendo tirado 10 veces. ¿Cuántos tiros dieron en la diana?

Una fracción que representa esa cantidad es 4/10 por lo cual 4 de los 10 tiros dieron en el círculo.

Si, en 25 tiradas la frecuencia relativa es de 0,36 ¿Cuántos tiros dieron en la diana?

36/ 100 equivale a 9/25 por lo cual 9 es el número de los tiros que acertaron.

Aquí vemos que para poder resolver la situación propuesta hay que relacionar la Probabilidad con la Estadística y con las fracciones equivalentes. No se concibe una Matemática que aísle los temas y los trabaje como si fueran piezas de un puzle, sino que se piensa una enseñanza en la cual se establezcan vinculaciones entre los distintos conceptos involucrados.

Otro punto a tener en cuenta es que aparece el número como expresión de una probabilidad y ese número está comprendido entre 0 y 1: 0 asignado a los sucesos imposibles y 1 a los sucesos seguros.

En cualquier experimento aleatorio, en relación con un fenómeno estocástico, es imposible predecir el resultado de una realización del experimento. Si se repite varias veces en condiciones análogas, se obtienen, en general, resultados distintos para los

cuales no se aprecia ninguna relación causa-efecto. Sin embargo, la repetición del experimento un número grande de veces produce una estabilización de las frecuencias relativas de los distintos resultados en torno de ciertos valores. Una ley que intenta explicar la aparición de tales resultados necesita basarse en el azar o incertidumbre. Esta ley es la Probabilidad.

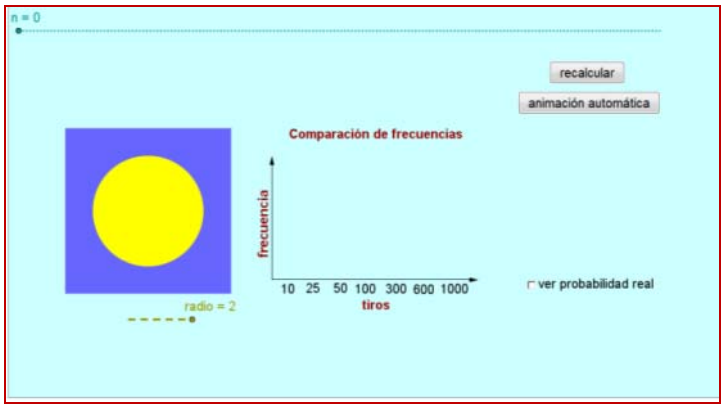
Por lo tanto la probabilidad es el valor al cual se aproxima la frecuencia de ocurrencia del suceso estudiado cuando el número de experimentos es muy grande y los mismos se realizan siempre en iguales condiciones e independientemente de la historia previa. Esta es la *interpretación frecuencial de la probabilidad.*

Item didáctico 3

Simulación de tiro al blanco - 3

1- Tilda la opción "ver probabilidad real" e interpreta lo que aparece en el gráfico cuando simulas las tiradas.

2- Saca tus conclusiones a partir de la experiencia realizada.



3- Ahora anticipa cómo varía la probabilidad de "dar en la diana" si el radio del círculo mide la mitad (1 u)

4- En el caso de una competencia este nuevo círculo representa la región central de la diana a la que se adjudica mayor puntaje ¿por qué?

5- Después de dar tu respuesta puedes verificarla modificando el radio (usa el deslizador correspondiente al radio) y simulando las tiradas nuevamente.

6- ¿Cómo justificas la relación entre los radios y entre las probabilidades de acierto en cada diana?

Los puntos 1 y 2 permiten constatar la imprevisibilidad de los resultados obtenidos en cada tirada, la variabilidad de las pequeñas muestras y la convergencia gradual de esta probabilidad- que surge de la experimentación- con la probabilidad teórica.

Ley fundamental del azar: al repetir muchas veces un experimento aleatorio la frecuencia relativa de cada suceso tiende a su probabilidad. Es la *ley de los grandes números.*

En el tiro al blanco, si analizamos qué sucede con los dos gráficos - el que surge de la experimentación y el que muestra la probabilidad teórica - después de un número muy grande de tiradas, el primero tiende al segundo. Esto sería difícil de constatar si tuviéramos que hacer la experimentación con los objetos reales, sean dados, ruletas o tiro al blanco. Sin embargo, descubrir la ley de los grandes números utilizando simuladores es posible.

Una forma de calcular la probabilidad es la interpretación clásica (de Laplace) de la probabilidad. Numerosos experimentos aleatorios admiten esta interpretación, que es una buena regla de cálculo de probabilidades de sucesos, cuando el espacio muestral es finito y los sucesos son equiprobables (o sea tienen igual probabilidad de ocurrir): En ese caso la probabilidad de un suceso es el cociente de los casos favorables entre los casos posibles.

La "probabilidad teórica" del suceso "acertar en la diana de 2u de radio es 0,35 y se representa en el gráfico por una semirrecta, al tildar "probabilidad real". ¿De dónde surge este número?

Aquí tendremos que vincular la Probabilidad con la medida de las superficies que están involucradas. Si calculamos el área del cuadrado, da como resultado 36 u^2, siendo u la unidad de medida que se utiliza. Si calculamos el área de la diana que está representada con un círculo de 2 u de radio, da aproximadamente 12,56 u^2. Aquí aparece involucrado el primer número irracional que ven los escolares - "pi"- por lo cual el área será un número aproximado, ya que se utiliza una aproximación de ese número irracional para calcularla. La razón entre los valores de las dos áreas es aproximadamente 0,35.

En este caso se trabaja con superficies y no con conjuntos finitos por lo cual sería impensable trabajar con Laplace, donde el espacio muestral es finito y los sucesos son equiprobables.

Otro punto interesante es resolver qué ocurre cuando reduzco el radio a la mitad, por lo cual en vez de ser 2, el radio será 1. Es de suponer que, para varios alumnos, la probabilidad del suceso será también la mitad. Primero realizan una conjetura y luego observan los valores en la gráfica y/o calculan la probabilidad y la contrastan con su conjetura. ¿Se cumplió? ¿No se cumplió? ¿Por qué? Lo interesante de esta propuesta es que el alumno se verá forzado a explicar lo que verifica en el simulador al realizar el cambio en la diana. El simulador le dará el número que está buscando, la probabilidad del suceso con las nuevas medidas: él deberá comparar y buscar una explicación a lo que constata. Aquí lo interesante es descubrir que no es una situación de proporcionalidad, por lo cual vincularemos la probabilidad a la proporcionalidad.

Trabajar en Matemática significa que el alumno debe experimentar, realizar conjeturas, tratar de demostrarlas, buscar explicaciones cuando sus conjeturas no son correctas, relacionar los distintos conceptos que están involucrados. En suma, el alumno está "fabricando" Matemática: aunque los conocimientos ya formen parte del saber disciplinar, no forman parte de sus saberes, por lo cual es necesario este desafío intelectual. Esto es lo que debemos tener en cuenta cuando trabajamos utilizando (o no) software educativo.

Referencias bibliográficas

- Batanero, C., Godino, J. (2002). *Estocástica para maestros*. http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf
- Bressan, A., Solkower, B. *Educación Matemática Realista. Ideas y experiencias en torno a la capacitación de docentes.* http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/conferencia_salto_uruguay.pdf
- Canavos, G. (1988): *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. México: McGraw-Hill.
- Durá, J., López, J., (1992). *Fundamentos de estadística: Estadística descriptiva y modelos probabilísticos para la inferencia*. España: Ariel.
- Godino, J., Batanero, M., Cañizares, M. (1996). *Azar y probabilidad. Fundamentos teóricos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.
- ITE. Ministerio de Educación España. *Curso GeoGebra en la Educación Primaria*. http://www.geogebra.es/cvg_primaria/index.html

LUGAR GEOMÉTRICO, ¿SÓLO RASTROS QUE DEJAN LOS PUNTOS?

Rosa Ana Ferragina – Leonardo José Lupinacci
rosaferragina_1@hotmail.com – leolupinacci@yahoo.com.ar
Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE) – Universidad Nacional de San Martín (UNSAM) Argentina

Modalidad: Taller.
Nivel educativo: Formación y actualización docente, Medio
Palabras clave: GeoGebra, Geometría, Lugar geométrico, Construcciones

Resumen
Generalmente, para encontrar un lugar geométrico se hace necesario ubicar varios puntos en el plano o el espacio con la finalidad de discernir la forma que tendrá la solución del problema. Lo anterior puede resultar complejo cuando se lo analiza con lápiz y papel. Sin embargo, un software de geometría dinámica, a modo de una poderosa lente, permitirá visualizar el camino que deja un objeto matemático (punto, segmento, figura, etc.) cuando se lo mueve respecto de otros que están dentro de una misma configuración, aun cuando éstas sean complejas. Presentando diversos problemas, el taller propone analizar cómo sería posible re significar construcciones que se repetían casi de un modo algorítmico, pero que en su mayoría no ponían en juego propiedades geométricas. Además, la personalización de la barra de herramientas de GeoGebra, permite facilitar la aparición de diferentes estrategias de resolución y poner en primer plano a las condiciones de formación de un lugar geométrico. También se reflexionará acerca de las herramientas Activa Rastro y Lugar Geométrico de GeoGebra si se complementan, cuándo y cómo es conveniente la incorporación de cada una. Tomaremos como marco teórico los aportes de la génesis instrumental.

1. La geometría en la formación docente. La integración de un software dinámico.

Numerosos son los investigadores en Didáctica de la matemática que han considerado de interés el análisis de las prácticas de enseñanza de la Geometría (Alsina (1991, 1997), Laborde (1998), Santaló (1993, 1994), Villella (1999, 2001), entre otros), destacando la importancia que tiene esta rama de la matemática en la formación de los ciudadanos y específicamente en la formación de los profesores, responsables a su vez de ofrecer a sus alumnos una *cultura geométrica* que les permita desarrollar competencias específicas en dicho campo para obtener una visión global de las aplicaciones actuales y una actitud positiva por la belleza y el buen razonar que la misma promueve (Alsina, 1997).

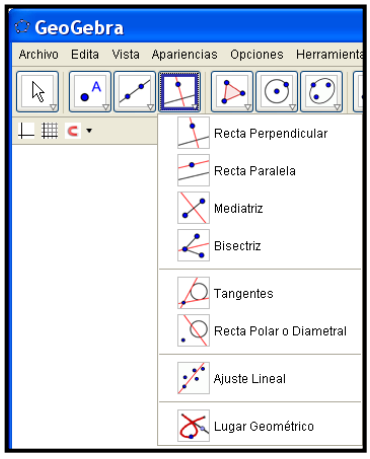
Es por estas cuestiones que en este taller proponemos poner en primer plano a la Geometría y, si bien son muchos los temas sobre los cuales se pueden reflexionar sobre cómo están presentes a lo largo de la formación básica del docente, hemos seleccionado como objeto de estudio a la noción de lugar geométrico.

En la enseñanza, a este concepto se lo limita con la presentación y aplicación de procedimientos algorítmicos de la geometría métrica o, en otros casos, analizando problemas que implican la búsqueda y análisis de lugares geométricos únicamente a partir de relaciones propias de la geometría analítica. Estas caracterizaciones se expresan a menudo en las construcciones con sólo lápiz y papel, puesto que es necesario ubicar varios puntos en el plano o el espacio con la finalidad de poder discernir la forma que tendrá la solución del problema, resultando una tarea compleja y costosa. Pero la integración de un software de geometría dinámica, como GeoGebra, permite analizar e incluso trazar las trayectorias que ciertos objetos matemáticos describen al moverse en relación a otros elementos que se desplazan en misma construcción. Es decir que, *"el software funciona como un lente poderoso que le permite a los estudiantes visualizar trayectorias de objetos matemáticos aun dentro de situaciones o configuraciones complejas."*(Santos Trigo; 2001; 249).

De este modo, nos proponemos reflexionar sobre la noción de Lugar Geométrico en los cursos de Geometría para la formación de profesores, y cómo se re significa a partir de la integración de esta herramienta informática, como es el caso de GeoGebra.

2. La construcción de lugares geométricos con GeoGebra

Algunas herramientas de GeoGebra posibilitan el trazado de lugares geométricos de un modo directo, esta presencia explícita respondería a que son las más utilizadas en otros desarrollos más complejos.



Pero, si lo que nos proponemos es caracterizar la formación de un lugar geométrico, entonces presentaríamos problemas que involucren a las condiciones de formación, sin utilizar esas herramientas específicas.

2.1. Herramientas y Restricciones

Analicemos lo presentado en el ítem anterior, con el siguiente problema:

¿Dónde podría ubicarse un centro de abastecimiento alimenticio de modo que esté a la misma distancia de un pueblo **A** que de otro **B**?

La solución se encontraría al construir un segmento de extremos **A** y **B**, trazar luego su mediatriz, puesto que todo punto de esta recta, como lugar geométrico, equidista de sus extremos.

Pero, qué procedimiento realizaríamos si la **Barra de Herramientas** de GeoGebra se modifica eliminando, por ejemplo, las herramientas que permiten la construcción de lugares geométricos directos y también la de punto medio de un segmento.

Esta restricción es posible, porque GeoGebra posee una interface que permite una **Confección de Barra de Herramientas Particular**, se ocultan opciones de la misma y sólo quedan a disposición aquellas que consideramos pertinentes con el trabajo matemático que deseamos desarrollar.

Para este caso, ¿qué otros conocimientos pondríamos en juego? Una posibilidad sería pensar en el trazado de dos circunferencias con centro en los puntos **A** y **B**, con un radio que supere a la mitad de la distancia entre esos puntos, procedimiento que por ejemplo nos permitiría analizar cuestiones relativas a las razones del uso de circunferencias y la condición pedida para sus radios.

A partir de estas posibilidades, analizamos cómo el término ***herramienta***, referido a un elemento de GeoGebra que nos brinda la posibilidad de restringir su uso, se adapta y re significa dentro del contexto de la génesis instrumental. Disciplina sensible a las cuestiones instrumentales, que estudia cómo un artefacto (el software, en este caso) se convierte en un instrumento, puesto que se integra a las actividades humanas para construir conocimiento matemático (Trouche; 2004).

Una variante del problema anterior, podría ser:

> Se quiere ubicar otro centro de abastecimiento alimenticio, de modo que esté a la misma distancia de otros 3 pueblos **C**, **D** y **E**, ¿dónde estaría construido?

Algunas cuestiones que podríamos discutir con este cambio: ¿Personalizaríamos la **Barra de Herramientas**?, ¿por qué? Y, si lo realizamos, ¿sería del mismo modo o propondríamos otra?, ¿por qué?

2.2. Procedimientos

Si proponemos la construcción de un dibujo dinámico a partir de una serie de condiciones dadas por un texto (sin tener modelo dinámico ya construido), cuando realicemos ajustes y/o modificaciones sobre la misma, es posible que reconozcamos tanto las propiedades involucradas, como así también si este procedimiento contempla todas las propiedades necesarias para la construcción. Un ejemplo de lo explicitado puede ser:

- Construir un ángulo cualquiera.
- Construir una circunferencia con centro en el vértice y un radio cualquiera.
- Poner nombre a los puntos de intersección entre la circunferencia y los lados del ángulo. Por ejemplo **P** y **Q**.
- Construir una circunferencia con centro en **P** y radio igual al elegido en el paso 2.
- Construir una circunferencia con centro en **Q** y el mismo radio elegido en el paso anterior.
- Determinar el punto o los puntos de intersección (**I**) entre las últimas circunferencias trazadas.
- Construir la recta que pasa por el vértice del ángulo y por el punto **I**.

El texto anterior, es una secuencia de pasos para construir, con regla y compás, la bisectriz de un ángulo. Revalorizar estos procedimientos permite reflexionar sobre la misma construcción y su fundamento, puesto que se han dejado de lado expresiones como «marcar un arco» modificándose por «construir una circunferencia». Además, de este modo, como el punto de intersección **I**, está a igual distancia de **P** y de **Q**, se puede deducir que equidista de los lados del ángulo, lo que revaloriza la definición de la bisectriz de un ángulo como lugar geométrico (recta que está a igual distancia de los lados) y, luego su consecuencia (divide al ángulo en dos partes iguales), que también es posible comprobar en la construcción realizada (Ferragina, Lupinacci, 2012).

3. Las Herramientas *Activa Rastro* y *Lugar Geométrico,* una posible complementariedad

GeoGebra ofrece dos herramientas para visualizar la trayectoria que describe un punto P cualquiera: **Lugar Geométrico** y **Rastro**. La primera describe a la curva que determina P, dependiendo del desplazamiento de otro punto que se encuentra sobre un objeto construido, por lo que si P no se mueve respecto de otro punto u objeto, esta herramienta no puede utilizarse. La traza o rastro de P son huellas que éste va dejando durante su desplazamiento.

Trabajaremos sobre la utilización de sólo una, ambas o ninguna, de las dos herramientas que ofrece el software, acorde con los objetos matemáticos que pretendamos caracterizar.

3.1. Explorar para tomar decisiones

El siguiente problema, que se basa en la condición que cumplen las mediatrices de los segmentos determinados por tres puntos no alineados, nos permitirá poner en primer plano a esas características cuando esbocemos una conjetura sobre la solución.

> Construimos tres puntos fijos **A**, **B** y **C**, ¿qué condiciones debe cumplir el punto **D**, no fijo, para que las mediatrices del cuadrilátero **ABCD** se corten en un único punto? (Laborde, 1998)

Algunas cuestiones que analizaremos: ¿Qué significa construir un punto fijo? ¿Dejaríamos utilizar la herramienta mediatriz?, ¿por qué? ¿Qué información brinda el punto de intersección de las mediatrices? ¿Qué herramienta permitirá visualizar la trayectoria de **D**?, ¿por qué?

¿Se modifican las respuestas anteriores si los puntos **A**, **B** y **C** no son fijos?, ¿por qué?

En el problema, interactuamos de un modo continuo con el software para ubicar al punto **D**, como si fuera una experimentación. De acuerdo con las características de la construcción, no es posible utilizar la herramienta **Lugar Geométrico**. En cambio, sí puede activarse el **Rastro** del punto **D**. Pero, al ser éste un punto libre, la huella que deja en la pantalla, no necesariamente se corresponde con el lugar geométrico que buscamos. De todos modos, puede permitirnos conjeturar acerca de la posición que debe tener **D**

para que se cumpla la condición pedida. Es por ello que se hace necesario recurrir a otros conceptos matemáticos conocidos para delimitar la posición de **D**, en particular la condición para que las mediatrices se corten en un único punto.

Además, esa interacción con GeoGebra, permite que las construcciones se transformen en «tiempo real», contribuyendo de algún modo a formar hábitos que permitan, en ese proceso de transformación, partir de una situación particular y analizar sus propiedades invariantes, que conforman las bases intuitivas necesarias para una justificación formal (Sangwin, 2008).

3.2. Un problema con muchos rastros.

Construimos una circunferencia de centro **A** y radio **AB**. Sobre el radio, marcamos un punto **F**, luego un punto **M** sobre la circunferencia. Construimos la mediatriz del segmento **FM** y el segmento **AM**. Llamamos **P** a la intersección de la mediatriz con el segmento **AM**. ¿Qué trayectoria describe **P** cuando **M** se mueve sobre la circunferencia?

Podríamos analizar: ¿Qué herramienta es conveniente utilizar para la construcción de la circunferencia?, ¿por qué? ¿Qué condición verifica el punto **P** por su construcción? ¿Qué figura determina la trayectoria de **P**?, ¿qué paso/s de la construcción la condicionan?

Este problema nos permite discutir sobre la conveniencia de la utilización de una u otra herramienta de Geogebra para construir lugares geométricos. Consideramos que si recurrimos directamente a **Lugar Geométrico**, al modificar la posición de los puntos implicados, sólo veremos en la pantalla una única figura por cada cambio, puesto que la misma se va modificando en tiempo real. En cambio, activar la opción de **Rastro** para **P**, permite visualizar simultáneamente distintos lugares geométricos (generando así una familia de curvas), cuando se modifican las posiciones de los puntos **B** y **F**.

En última instancia, dejamos planteado un debate acerca de qué tipo de problemas propondríamos como óptimos para que la utilización de la herramienta **Lugar Geométrico** permitiera una conformación superior a la que se obtendría con activar el **Rastro**.

4. Una reflexión final

Como cierre de este taller, queremos compartir estas palabras que guían nuestra tarea: *"Nos dimos cuenta de que tenemos un poderoso medio para estimular el aprendizaje del estudiante a través de investigaciones matemáticas haciéndolas significativas, que se conectan fuertemente a las explicaciones producidas de los fenómenos inesperados, y las diferentes representaciones matemáticas de eso mismo.*

Para nosotros, el encuentro con la herramienta surgió de nuestra comprensión de su necesidad. Fue un punto de partida para motivarnos a aparearlo en consonancia con nuestros puntos de vista del aprendizaje, y así investigar y diseñar situaciones problema consecuentemente." (Arcavi, 2003, p 41)

5. Referencias bibliográficas

- Alsina C., (1991). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Alsina, C, (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Arcavi, Hadas (2003). "El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque". Documento de Trabajo del Grupo EM&NT. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle, Septiembre 2003.
- Ferragina, R., Lupinacci, L. (2012). Los puntos en su lugar. En: Ferragina, R. (ed.) (2012) *GeoGebra entra al aula de Matemática.* Pp. 69-80. Montevideo: Ediciones Espartaco..
- Laborde, C. (1998). Cabrí-geómetra o una nueva relación con la geometría. En: Puig, L. (ed.) (1998) *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática.* Pp. 33-48. Bogotá: Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.
- Santaló L. (1993) *La Geometría en la formación de profesores*. Buenos Aires: Red Olímpica.
- Santaló L. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la Matemática*. Buenos Aires: Troquel Educación.
- Santos Trigo, L. M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. En: *Avance y Perspectiva.* Vol 20. México. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. 247-258.

- Sangwin, C. (2008). *Geometrical functions: tools in GeoGebra*, 8 (4), pp. 17-20. In: MSOR Connections.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students´ command process through instrumental orchestations In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 281-307. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Villella J. (1999). *Cuando la Geometría es el tema de la reflexión matemática.* Documentos para la Capacitación Docente. UNSAM. Buenos Aires: Baudino Ediciones.
- Villella J. (2001), *Uno, dos, tres… Geometría otra vez*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA TRABAJAR EN SECUNDARIA: ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA.

Teresita Carrión – Daniela Pagés
pitacar@gmail.com – danielapages@gmail.com
Consejo de Formación en Educación, Uruguay

Modalidad: T
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Palabras clave: Geometría dinámica, didáctica, aprendizaje.

Resumen
El programa GeoGebra es una herramienta que permite la elaboración de conjeturas, la visualización dinámica y la construcción de modelos, por parte de los estudiantes. En este taller proponemos, a partir de la presentación de dos enfoques didácticos distintos del mismo tema (ángulos en la circunferencia), crear un espacio de reflexión, discutiendo qué potencialidades del programa permiten a los estudiantes obtener aprendizajes más significativos. La concepción que tienen los estudiantes del "hacer matemático" depende en gran medida del tipo de actividades que se les planteen en el aula. Si bien la visualización dinámica es muy importante y aporta a la búsqueda de conjeturas, nos preguntamos si reducir las actividades a la visualización, no reafirma la creencia del estudiante en lo que le resulta evidente, desestimando la necesidad de su demostración.

Ya nadie duda de la importancia de la computadora en la enseñanza, sobre todo en la actualidad, con el desarrollo de software especialmente creado para su uso en la clase.

"Los softwares educativos tienen la capacidad de realzar el componente visual de la matemática atribuyendo un papel importante a la visualización en la educación matemática, pues ella alcanza una nueva dimensión si fuera considerado el ambiente de aprendizaje con computadoras como un particular colectivo pensante (Lévy, 1993), donde profesores, alumnos, medios y contenidos matemáticos residen juntos y, más que eso, piensan juntos. En este colectivo el medio adquiere otro status, es decir, va más allá de mostrar una imagen. Más específicamente, es posible decir que el software se torna actor en el proceso de hacer matemática. Algunas particularidades del proceso visual, en educación matemática, proporcionadas por las tecnologías computacionales pueden ser destacadas:

La visualización constituye un medio alternativo de acceso al conocimiento matemático.

La comprensión de conceptos matemáticos requiere de múltiples representaciones, y las representaciones visuales pueden transformar su comprensión.

La visualización es parte de la actividad matemática, y una forma de resolver problemas.

Las tecnologías con poderosas interfaces visuales están presentes en las escuelas, y su utilización para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática exige la comprensión de los procesos visuales.

Si el contenido de matemática puede cambiar debido a las computadores (…) es claro en este punto que las matemáticas en las escuelas pasarán por al menos algún tipo de cambio (…) (Borba y Villarreal, p96)". (Borba 2010).

De Villiers (2007) plantea que, aunque las nuevas tecnologías volverán inevitablemente obsoletas algunas prácticas (operatorias, por ejemplo), también requieren el desarrollo de nuevas habilidades. Al mismo tiempo, el autor plantea que las nuevas tecnologías requieren que nos cuidemos de nuevas trampas, que ellas traen consigo. En particular en cuanto al software de geometría dinámica, el autor señala que muchos docentes lo utilizan como un pizarrón glorificado. "… Muchos profesores tienden a utilizar el software de geometría dinámica como una extensión de la geometría del lápiz y el papel. (…) usada de esta forma la nueva tecnología no es tan buena como la antigua tecnología. Para continuar usando la nueva tecnología para hacer matemática tenemos que aprender a usarla de modo que transforme la actividad matemática, permitiéndonos hacer cosas que antes no hubieran sido posibles." (Sutherland,)

Otra trampa que señala De Villiers es la de pensar que solo presentar o permitir investigar un problema o teorema con ayuda de la geometría dinámica, automáticamente torna el aprendizaje de la geometría más fácil y menos doloroso. Plantea el autor que la geometría dinámica, como cualquier tecnología, no ofrece una mágica panacea para aprender geometría, por el solo movimiento en la pantalla. Salvo que el estudiante analice críticamente o sea guiado a observar y examinar lo que ocurre en la pantalla, tendrá lugar muy poco aprendizaje.

La tercera trampa que señala el autor es la de creer que la visualización hace todo más fácil. Plantea que esta puede ayudar muchísimo como herramienta a un estudiante avanzado, pero que a un novato puede incluso distraerlo del aprendizaje matemático.

Finalmente De Villiers afirma que para comenzar usando geometría dinámica es necesario repensar críticamente el contenido, los objetivos, y el enfoque didáctico que se utiliza. Además, la implementación de este enfoque debe ser constantemente evaluada y revisada. Dice que, por ejemplo, una de las principales ventajas de la geometría dinámica es su exactitud, inmediata retroalimentación visual y la posibilidad de chequear muchos casos en poco tiempo. Sin embargo, los estudiantes son proclives a

convencerse fácilmente de la validez de un resultado, e inmediatamente plantean: ¿Por qué todavía necesito una prueba deductiva para estar seguro?

Durante la década pasada, las computadoras y el software usado en los cursos de geometría han sido cada vez más poderosos.

Según Dreyfus y Hadas (1995), los ambientes dinámicos de aprendizaje animan a los estudiantes a medir e investigar empíricamente situaciones geométricas; permiten dinamizar los cambios de algunos datos mientras se mantienen otros constantes para observar qué se mantiene invariante y qué es lo más probable y qué no. Sostienen estos autores que el énfasis que se pone en ese software en el lado empírico de la geometría, claramente hace aumentar en los estudiantes la voluntad y la habilidad de investigar, generalizar y conjeturar. Si bien esta actividad tiene un importante rol en el curriculum de geometría, no necesariamente fortalece el entendimiento de los estudiantes sobre el rol de la demostración. Señalan a Laborde (1993), quien ha llevado adelante un análisis teórico de los objetos que los estudiantes manejan mientras mientras aprenden en un ambiente de geometría dinámica y ha advertido que el mal uso de computadoras puede llevar fácilmente al triunfo del inductivismo. También mencionan a Schwartz (citado en Chazan, 1993) quien ha sugerido que los estudiantes que en los cursos de geometría utilizan evidencia empírica presentan dificultades para distinguir entre esta y la demostración.

A partir de lo anterior nos preguntamos qué tipo de actividades utilizando GeoGebra, permitirán a los estudiantes conjeturar, visualizar, y a la vez plantearse la necesidad de la justificación, en lugar de tomar como verdadero aquello que “ven”.

En este taller trabajaremos con dos enfoques distintos para abordar la propiedad que vincula el ángulo central y los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco.

El primero de los enfoques se basa en una figura dinámica que permite conjeturar en forma dirigida las propiedades en cuestión. El segundo enfoque consiste en una secuencia de actividades extraídas de Itzcovich, H (Iniciación al estudio didáctico de la Geometría) adaptadas para ser trabajadas en GeoGebra, donde se pide que se realicen algunas construcciones. Unas se pueden construir de inmediato y otras son imposibles de construir, con la intención de provocar un conflicto que se pueda resolver al descubrir la propiedad.

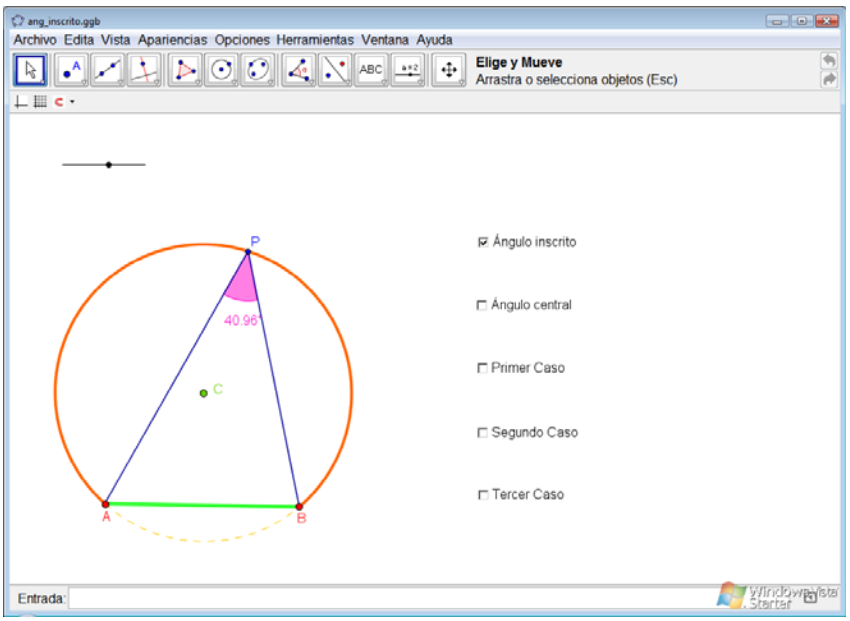
En cualquiera de las dos presentaciones, se parte de que el estudiante ya conoce y sabe utilizar: los criterios de congruencia de triángulos, la clasificación de triángulos y las propiedades generales y particulares de los mismos, la definición de circunferencia.

Las actividades del taller:

Analice las siguientes propuestas, indicando qué resoluciones y conclusiones son esperables de alumnos de primer año de bachillerato, ante cada una de ellas.

Propuesta I:

Los alumnos acceden al archivo de GeoGebra que presenta la siguiente vista:



La figura se acompaña de la siguiente ficha de trabajo:

Se llama ángulo inscrito en una circunferencia, a cualquier ángulo cuyo vértice pertenece a la circunferencia y sus lados son secantes a la misma.

Se llama ángulo central a cualquier ángulo cuyo vértice sea el centro de la circunferencia.

Consideramos dos puntos fijos A y B de una circunferencia de centro C.

P es un punto de la circunferencia. Mueve el deslizador y P se moverá en el arco mayor AB. ¿Observas algo?

Activa la casilla de control “Ángulo Central” y verás el ángulo ACB que es el ángulo central que abarca el mismo arco que los inscritos anteriores.

Si mueves el punto C, cambia la circunferencia y también el ángulo central ¿Puedes realizar alguna conjetura con lo que observas?

¿Será casualidad o una propiedad geométrica que podremos demostrar?
A continuación se orienta la demostración de la propiedad en los tres casos en que se hace usualmente, utilizando casillas de control para visualizar cada uno. Se dirige el razonamiento de los estudiantes a través de preguntas.

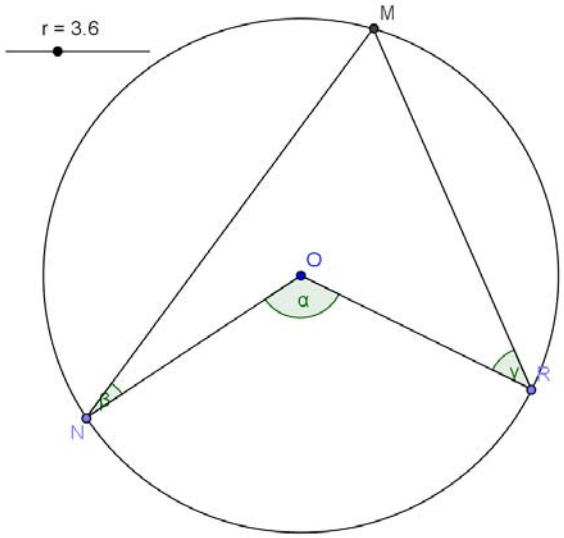
Propuesta II:

a) Construye una circunferencia de centro O y radio 3. Traza un diámetro y llama A y B a sus extremos. Determina un punto P perteneciente a la circunferencia, distinto de A y de B, de modo que el ángulo PAO mida 30º y el ángulo POB mida 60º.
b) Construye una circunferencia de centro T y radio 3. Traza un diámetro y llama C y D a sus extremos. Determina un punto Q en la circunferencia, distinto de C y de D, tal que el ángulo QCT mida 40º y el ángulo QTD mida 100º.
¿Cuántas soluciones encontraste en cada caso? Compara lo que hiciste con lo que hizo el compañero al lado tuyo. Extraigan conclusiones sobre el trabajo realizado.

2) Construye una circunferencia de centro O y radio r (usa un deslizador para r, variando entre 0 y 10, con incremento 0.1). Marca tres puntos A, B y C en la circunferencia, tales que el ángulo ABC sea de 45º.
A partir de las informaciones anteriores, ¿es posible conocer las medidas de otros ángulos? ¿De cuáles? ¿Es posible conocer la medida del ángulo AOC?

3) Retoma el problema anterior y piensa en una figura "parecida" pero con otros valores para el ángulo CBA. Puede ser útil definir un deslizador ángulo, y luego definir el ángulo con esa medida variable.
Analiza qué del razonamiento del problema 2, depende de la medida del ángulo dado, y qué es independiente del mismo. A partir de ahí formula alguna conjetura.

4) En la siguiente figura, O es el centro de la circunferencia, y r es el radio. Determina, sin medir con herramientas del programa, la medida del ángulo ORM, sabiendo que la medida del ángulo NOR es 120º, y el ángulo MNO mide 20º.



Ayuda: utiliza las propiedades que ya conoces, de los ángulos interiores de un triángulo, y las que dedujimos a partir de los problemas anteriores.

Otras actividades

A continuación se presentan otras actividades que se discutirán si el tiempo del taller lo permite.

1) Dado el triángulo MRP, ubica un punto S de manera que el triángulo MSP sea rectángulo en S y el área de MSP sea la mitad del área de MRP.
¿El problema siempre tiene solución? Justifica la respuesta.

2) En un triángulo rectángulo ABC la hipotenusa AB mide 8 cm. La altura correspondiente a la hipotenusa mide 3 cm. Determinar un punto P de manera que el triángulo ABP sea rectángulo en P y el área de ABP sea el doble que el área de ABC.

3) Dado un cuadrilátero ABCD, encuentra qué condición debe cumplirse para que las mediatrices de los cuatro lados se intersequen en un punto.

Referencias bibliográficas

Borba, M. (2010). Softwares e internet na sala de aula de matemática.- X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA.-
En http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF
Consultado 20/10/2012.

Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la geometría.- Buenos Aires: Libros del zorzal.

de Villiers, M. (2007). Some pitfalls of dynamic geometry software. From Teaching & Learning Mathematics, No. 4, Feb 2007, pp. 46-52, a journal of the Association of Mathematics Education (AMESA). http://academic.sun.ac.za/mathed/AMESA/

Dreyfus, T. y Hadas, N. (1995). Proof as Answer to the Question Why. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 95/5, 1-5

Gil Pérez, D. y de Guzmán Ozámiz, M. (1993). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones. Organización de Estados Iberoamericanos para la educación, la ciencia y la cultura. Edición pdf: Joaquín Asenjo y Oscar Macías.
En http://www.oei.es/oeivirt/ciencias.pdf (Consultado 20/10/2010).

Mariotti, M. A. (2002). Influence of Technologies advances on students' math learning.- Lawrence Erbaum Associates.
En http://www.itd.cnr.it/telma/docs/Siena/Mariotti-Handbook.pdf (Consultado el 20/10/2010).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA EN GEOGEBRA EMPLEANDO LUGARES GEOMÉTRICOS Y ALGO MÁS

Julián Andrés Caicedo López
jcaicedo14@hotmail.com
Colegio Colsubsidio Chicalá - Colombia

Modalidad: Taller
Nivel educativo: Medio
Palabras clave: Problemas de construcción geométrica, lugar geométrico, heurística.

Resumen

Este taller consiste en estudiar en primera instancia, como la noción de lugar geométrico permite abordar la resolución de algunos problemas de construcción geométrica desde un punto de vista instrumental, en el sentido que dicha noción entra a jugar un papel crucial como herramienta mediadora en la implementación de una estrategia heurística específica; y en segunda instancia, se plantea una variante didáctica a los problemas propuestos, al pedir la recreación de los lugares geométricos involucrados por medio de transformaciones, es decir, que la herramienta de lugar geométrico ofrecida por el programa Geogebra, sólo sea usada en la fase exploratoria del problema pero no en la presentación final de la resolución del mismo.

Introducción

La visualización de los lugares geométricos y los movimientos de figuras en el plano, son piedras angulares en la enseñanza de la Geometría elemental a nivel de la educación secundaria; los sistemas de geometría dinámica como Geogebra, se constituyen en una herramienta clave para lograr ese tipo de visualizaciones y movimientos, que los estudiantes aprecian de manera evidente.

Tradicionalmente el lugar geométrico se define como el conjunto de todos los puntos, y sólo aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones dadas (Hemmerling, 2002), pero en los distintos programas de geometría dinámica, comoGeogebra , la noción de lugar geométrico, se percibe desde una perspectiva másdinámica (se llama lugar geométrico de un punto M al variar otro punto Q sobre unobjeto, como el conjunto de posiciones que toma M al mover Q sobre ese objeto) ypermite abordar problemas de construcción geométrica desde un punto de vistainstrumental, en el sentido que dicha noción entra a jugar un papel comoherramienta mediadora en algunas estrategias en el

enfoque de la resolución deproblemas. Se ilustrará el uso de una estrategia en particular, la cual entérminos generales consiste en el "relajamiento" de las condiciones iniciales, esdecir, tratar de satisfacer algunas de las condiciones iniciales que plantea el problema.

Los lugares geométricos vistos a través de la dialéctica herramienta–objeto enGeogebra.

De acuerdo con Douady (1995), los objetos matemáticos se pueden presentar desdedos aspectos, como herramientas y como objetos de estudio, a tal enfoque, lodenomina la dialéctica herramienta-objeto. La dificultad de materializar la graficacióna partir de la descripción sintética del lugar geométrico correspondiente, hace que nose haya aprovechado la oportunidad de articular dicha descripción sintética con surepresentación visual; una forma de aprovechar el dinamismo para enseñargeometría es a partir de la construcción de curvas como lugares geométricos enGeogebra.

En Geogebra, la herramienta "lugar geométrico", produce un conjunto de puntos L,tal que cada elemento es definido en función de un elemento del conjunto E: L ={f(P), P □ E}, y aparecerá sobre la pantalla como un dibujo (una representación) delconjunto L para un número finito de f(P).

Para definir tal lugar geométrico es necesario seleccionar un punto P' para el cual ellugar es deseado y luego seleccionar el punto P sobre el cual P' dependa (dondeuna relación funcional existe entre P y P'). El punto P es un punto "variable" quepertenece a un conjunto particular de puntos del plano (una recta, unacircunferencia, un segmento de recta, etc.) y el punto P' está relacionado a P pormedio de una construcción geométrica.

Metodología

Existen diversas estrategias de resolución de problemas (dibujar una figura,enriquecer la figura, particularizar el problema, descomponer y recomponer elproblema, aritmetizar el problema, ver el problema resuelto y trabajar hacia atrás,etc.) y algunas de esas

estrategias cuando se trabajan con el uso de latecnología, pueden adquirir una dimensión notable en el proceso de solución otratamiento de situaciones-problema.

Con el fin de ilustrar la estrategia heurística que es objeto de estudio, *"relajamiento "de las condiciones iniciales del problema",* se parte de un ejemplo concretoplanteado por el matemático George Polya (1965. p. 41-42), donde se presenta unproblema de construcción geométrica, cuya solución se va desarrollando a manerade un dialogo socrático entre el maestro que propone el problema y el estudiantequien debe resolverlo, dicha solución puede ser recreada en el ambiente deGeogebra:

Inscribir un cuadrado en un triángulo dado (acutángulo), tal que dos vértices delcuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices delcuadrado sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo respectivamente.

• ¿Cuál es la incógnita?
Un cuadrado.
• ¿Cuáles son los datos?
Un triángulo dado, nada más.
•¿Cuál es la condición del problema?
Los cuatro vértices del cuadrado deben hallarse sobre el perímetro deltriángulo, dos sobre la base y los otros dos sobre cada uno de los otros doslados respectivamente.
•¿Es posible satisfacer la condición?
Creo que sí, pero no estoy seguro.
•No parece que el problema le resulte muy fácil. Si no puede resolverlo, trateprimero de resolver algún problema relacionado ¿Puede usted satisfacer algunaparte de la condición?
•¿Qué quiere decir por una parte de la condición?
•Veamos; la condición concierne a todos los vértices del cuadrado. ¿De cuántosvértices se trata?
De cuatro
•Una parte de la condición se aplicaría a menos de cuatro vértices. Tome sólouna parte de la condición, deje la otra parte. ¿Qué parte de la condición es fácilde satisfacer?
Es fácil trazar un cuadrado con dos de sus vértices sobre el perímetro deltriángulo, incluso un cuadrado con tres de sus vértices sobre el perímetro deltriángulo.

•Dibuje la figura

El alumno dibuja la figura 1.

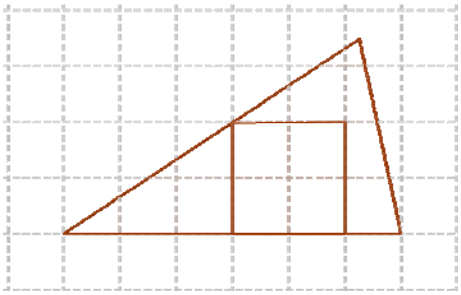


Fig. 1. Cuadrado con tres vértices sobre un triángulo

•Usted no ha considerado más que una parte de la condición, abandonando la otra.

¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada?

El cuadrado no está determinado si sólo tiene tres de sus vértices sobre elperímetro del triángulo.

•Bien. Dibuje otra figura.

El alumno dibuja la figura 2.

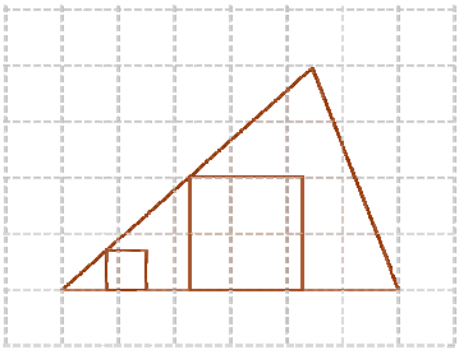


Fig. 2. Dos cuadrados, cada uno con tres vértices sobre un triángulo

•Tres de los vértices de su cuadrado están en el perímetro del triángulo, pero elcuarto no está donde debería estar. Como usted lo ha dicho, el cuadrado no estádeterminado, puede variar; resulta lo mismo para su cuarto vértice. ¿Cómo puedevariar?

•Trátelo experimentalmente si lo desea. Trace otros cuadrados, tres de cuyosvértices se hallen sobre el perímetro del mismo modo que los dos cuadrados yadibujados en la figura.

•Dibújelos pequeños y grandes. ¿Cuál le parece ser el lugar geométrico delcuarto vértice? ¿Cómo puede variar?

El profesor ha llevado al alumno muy cerca de la idea de la solución. Agrega Polya,que si el alumno es capaz de adivinar que el lugar geométrico del cuarto vértice esuna recta, habrá resuelto el problema.

Primera Situación-problema.

A manera de ejemplo, se plantea el problema de construir un triángulo equilátero inscrito en un cuadrado dado, de tal forma que tengan un vértice en común.

Empleando la estrategia estudiada anteriormente, se construye el cuadrado AMPQ y después un triángulo equilátero ABC, debilitando las condiciones iniciales del problema, es decir, se construye de tal forma que el vértice A sea común al cuadrado dado, además que el vértice B esté sobre un lado del cuadrado pero que el vértice C no pertenezca a él; por lo tanto al desplazar el vértice B sobre el perímetro del cuadrado se debe determinar el lugar geométrico descrito por el vértice C (ver figura 3).

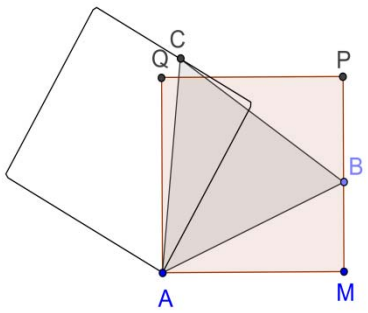


Fig. 3. Lugar geométrico del punto C con respecto al punto B

Si Geogebra reconociera el punto de intersección del lugar geométrico y el lado $\overline{QP}$ del cuadrado y lo nombramos como C', entonces los puntos A y C´ como vértices, se podría construir el triángulo equilátero AB'C' (B' □ $\overline{PM}$), solucionando así el problema propuesto (ver figura 4):

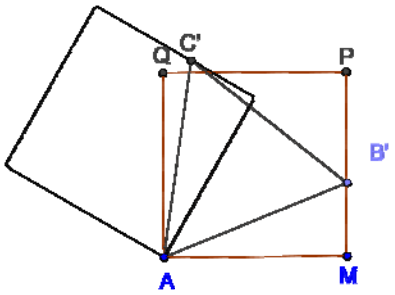


Fig. 4. TriánguloAB'C' inscrito en el cuadrado AMPQ

Atendiendo a las directrices planteadas en los objetivos del taller, debe caracterizarse dicho lugar geométrico y luego este debe ser reconstruido; después de algunas conjeturas y mediciones pertinentes, se "descubre" cuál es la transformación involucrada en la resolución del problema; esta corresponde a una rotación del cuadrado AMPQ con centro en A y ángulo de rotación 60°.

Segunda situación-problema

Se plantea el problema de construir un triángulo equilátero a partir de tres circunferencias concéntricas dadas, de tal forma que cada vértice del triángulo este sobre una de las circunferencias.

Tercera situación-problema

Para un punto A de una circunferencia y un punto exterior B, sea P el punto de intersección de la recta tangente a la circunferencia por el punto A y de la recta perpendicular a la tangente anterior trazada por el punto B.

a) Hallar el lugar geométrico del punto P cuando A recorre la circunferencia.

b) Determinar el lugar geométrico que resultará cuando B sea un punto situado en la circunferencia, o cuando sea el centro de la circunferencia.

Referencias bibliográficas

- Agustín, C. y Inmaculada L, (2009). Trazados de lugares geométricos, Geogebra mucho más que geometría dinámica, Capítulo 3, pp. 71-84. México: Alfaomega.
- Hermmerling, E. (2002). Lugares geométricos, En: *Geometría elemental*. Ciudad de México, México: Limusa, Noriega Editores.
- Ministerio De Educación Nacional, (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Santafé de Bogotá. Colombia: Enlace Editores.
- Polya, G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad de México: Editorial Trillas.

UN BINOMIO DINÁMICO: GEOMETRÍA Y FUNCIONES

Fernando Jorge Bifano– Leonardo José Lupinacci
fbifano@unsam.edu.ar – leolupinacci@yahoo.com.ar
Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE) – Universidad Nacional de San Martín (UNSAM), Argentina

Modalidad: Taller.
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: GeoGebra, Geometría, Funciones, Problema dinámico

Resumen

Apelar a un cambio de registro de representación para resolver un problema, se transforma en una estrategia disponible en la medida en que el tipo de problemas que se proponen para trabajar favorece la integración de los mismos. A partir del análisis de un "problema dinámico" (Bifano & Villella, 2012), centrado en el estudio de las variaciones del área de un rectángulo inscripto en un cuarto de circunferencia, ofrecemos un taller con el propósito de estudiar las diferentes cuestiones que emergen de las potencialidades didácticas de la modelización del problema a través del GeoGebra, en tanto las características intrínsecas del software genera una conexión dinámica para múltiples representaciones (Hohenwarter y Jones, 2007). El uso de comandos tales como activa trazo, lugar geométrico, registra en hoja de cálculo; entre otros, pueden ser concebidos como casos específicos de "variables didácticas" (Artigue, 1995) y su utilización y manipulación son parte de las reflexiones que se esperan promover en los participantes. Los aportes teóricos de la "génesis instrumental" y de la "orquestación documental" (Trouche, 2004) serán el marco de referencia para el análisis

La integración de registros geométricos y funcionales en la formación docente

Hoy se reconoce que hacer matemática implica mucho más que el dominio de técnicas, fórmulas o procedimientos de resolución de problemas rutinarios. Desde el punto de vista del aprendizaje de la matemática, se plantea que "*los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar donde constantemente busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planten conjeturas, utilicen distintos sistemas de representación, establezcan conexiones, empleen varios argumentos y comuniquen sus resultados.*" (Santos Trigo, 2003, p 196)

Esto lleva a replantearnos, desde el punto de vista de la enseñanza, la necesidad de generar ámbitos de quehacer matemático donde se posibilite la articulación de las características antes mencionadas, las cuales pueden potenciarse a partir de la integración de diversos marcos, tales como el algebraico, el aritmético o el geométrico.

Estos marcos, a su vez, posibilitan la representación de los objetos matemáticos puestos en juego a partir de diversos registros (tablas, gráficos, fórmulas…)

Cuando analizamos la enseñanza de la matemática y específicamente la formación docente, es posible observar que no suele favorecerse el cambio de registro de una representación como estrategia para resolver problemas. Esta ausencia de los diversos marcos matemáticos en un sentido integrador implica una pérdida sustancial de conocimiento y de desarrollo de habilidades matemáticas, limitando muchas veces el trabajo al análisis de un único registro de representación.

Creemos que esta multiplicidad de sentidos que adquieren los conceptos a partir de la integración de diversos marcos y registros en la formación del profesor, se puede potenciar mediante la utilización de un software de geometría dinámica como el GeoGebra; adquirir conocimientos profesionales en el ámbito de estas tecnologías requiere tanto profundizar en el conocimiento propio de la Matemática, como en el análisis de los resultados de su implementación en la enseñanza.

Las características intrínsecas del GeoGebra en su condición de conector dinámico de múltiples representaciones (Hohenwarter y Jones, 2007), a partir de las potencialidades del trabajo simultáneo con la *Vista Gráfica*, la *Hoja de Cálculo* y la *Ventana Algebraica*, posibilitan su implementación como integrador de registros, permitiendo crear lazos entre los distintos marcos y, a partir de ellos, la creación y justificación de nuevas técnicas de resolución y la posibilidad de nuevos análisis que permitan un estudio global de los problemas modelizados.

Creemos que la mera implementación de las herramientas informáticas no genera la integración conceptual deseada de forma externa a las tareas que se propongan realizar en dichos entornos. De ahí que la elección de los problemas resulta muy importante, puesto que éstos dan lugar a conjeturar con la ayuda del software, para que la actividad matemática no quede en una simple observación o en la realización de cálculos, sino que busque explicitar las propiedades y conceptos puestos en juego permitiendo justificar las observaciones realizadas.

Surge entonces la necesidad de elaborar y/o seleccionar problemas que, mediante su estudio a partir de las herramientas informáticas, favorezcan la integración buscada. Pasar de pedir, por ejemplo, una simple construcción a convocar a la exploración de una cuestión que se abre a partir de las condiciones que hacen a la construcción, conlleva un cambio de tarea para el alumno, motivado (provocado) por un medio (Brousseau, 1987)

con formato de problema, que lo interpela. Este tipo de formatos, es el que llamaremos problema dinámico (Bifano & Villella, 2012).

De esta forma, se establece un nuevo contrato didáctico (Brousseau, 1987) en cuanto a la división de tareas que profesor y alumno deben asumir. El profesor propone una cuestión inicial a estudiar y el mismo alumno es requerido a formularse sus propios interrogantes.

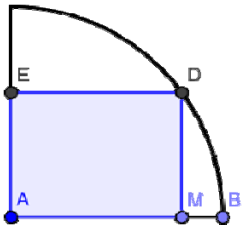
En este taller, proponemos analizar una serie de cuestiones que se pueden desentrañar a través del estudio de un problema dinámico sobre las variaciones del área de un rectángulo inscripto en un cuarto de circunferencia. Una construcción con elementos que pueden variar su ubicación nos permitirá entender los diferentes factores que influyen en tales variaciones, más allá de una mera conceptualización de tipo causa-efecto. Cabe destacar que lo dinámico del problema radica en la evolución de la situación a explorar más allá de que haya ciertos elementos que puedan moverse en la construcción.

A partir de esto, podemos configurar una definición del concepto de función que recupere los aspectos intuitivos relacionados con la variación y la dependencia que se encuentran en el corazón mismo de los orígenes del concepto.

La integración geométrica funcional a partir de un problema dinámico

Consideremos el siguiente problema[1]:

Un cuarto de círculo cuyo radio **AB** es 6 cm. Un punto **M** que se desplaza sobre **AB**. Construimos un rectángulo, como se indica en la figura, **AMDE**. Estudiaremos las variaciones del área de este rectángulo dependiendo de la posición de **M** y, luego, analizaremos si en alguna posición tendremos área máxima.



[1] El problema originalmente no está pensado para ser «simulado» con un software de geometría dinámica. El mismo ha sido tomado de una investigación francesa llevada adelante por el Grupo “Lycée” del IREM de Clermont-Ferrand. (Barbin, E. & Douady, R. (1996), pp. 164). Un estudio pormenorizado del mismo puede verse en “GeoGebra entra al aula de Matemática” (Ferragina, R, 2012).

El problema puede separarse en el estudio de dos cuestiones que están estrechamente vinculadas entre si:

- ¿Cómo resulta la variación del área del rectángulo al variar la posición del punto M?
- ¿Existe alguna posición para dicho punto, tal que el área sea máxima?

Durante el desarrollo del taller pretenderemos que los destinatarios puedan explorar este problema inicial, comenzando por una "simulación" del mismo en GeoGebra. Esto los enfrentará a la toma de diversas decisiones, algunas de las cuales podrían ser:

- Dado que quiero estudiar una variación, ¿será más conveniente "alojar" la construcción de forma tal que el centro del cuarto de círculo sea coincidente con el origen de coordenadas?
- ¿Qué ventajas y desventajas podría traerme esta decisión?
- ¿Qué efectos traerá para la resolución del problema? ¿Lo podré "cambiar" de ubicación si resultara más conveniente?[2]

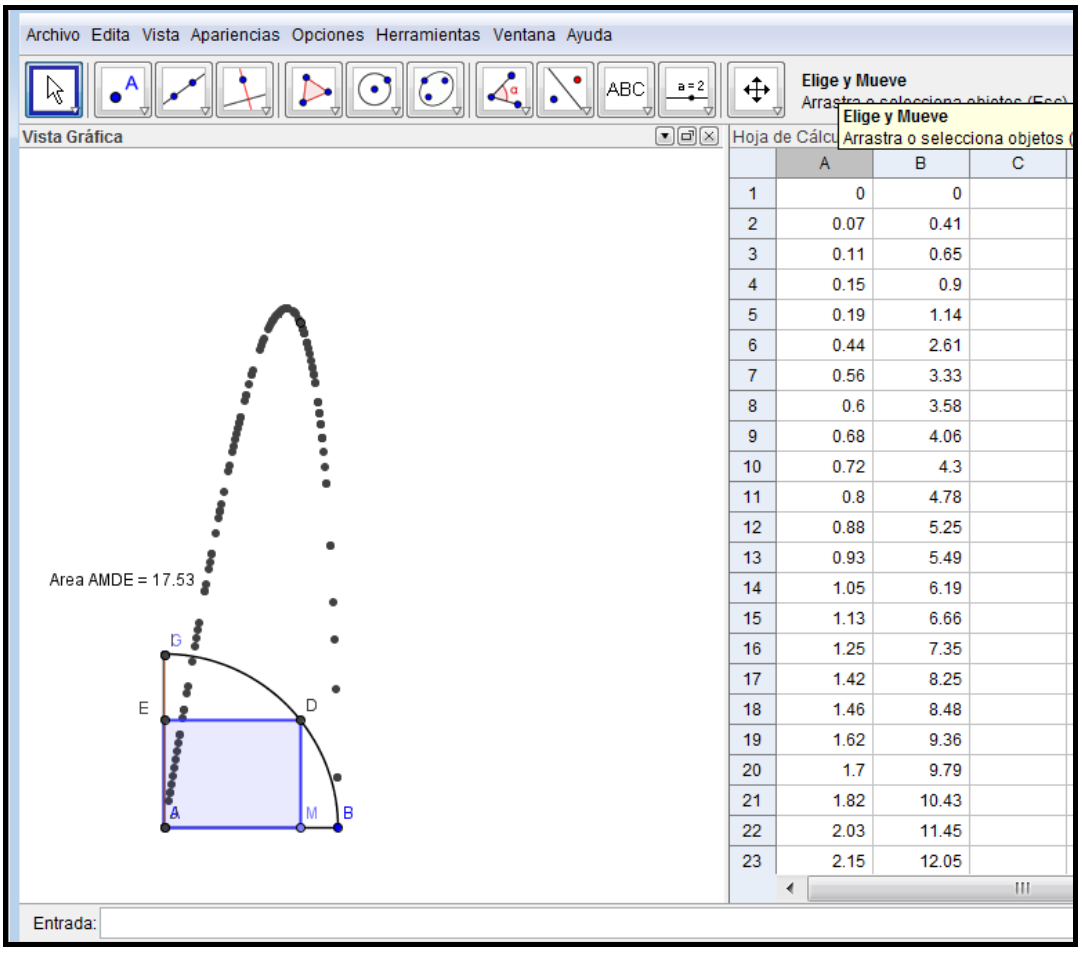
Una vez armada la "simulación", comenzará el trabajo exploratorio sobre las cuestiones planteadas y algunos nuevos interrogantes que puedan ir surgiendo con la evolución del problema: ¿qué comandos o herramientas del software me permiten contar con elementos para establecer alguna conjetura sobre el comportamiento del área del rectángulo a medida que se desplaza el punto M sobre el segmento AB? ¿Bastará con la simple medición del área para poder establecer una hipótesis sobre el comportamiento de la misma?

Aquí tiene sentido analizar la potencialidad del software con relación a la integración de registros. Para ello habrá que reflexionar sobre la posibilidad de definir de alguna manera la relación funcional entre el área y la medida del lado, para luego poder "leer" de diferentes maneras tal comportamiento.

Para ahondar en las posibilidades de "lectura" que brinda el GeoGebra, habilitaremos la discusión sobre el sentido y utilidad de las diferentes herramientas como "activa trazo" o "registra en hoja de cálculo", entre otras, con la finalidad de establecer una suerte de "lazo" entre las representaciones de la relación funcional a estudiar. La figura que se

[2] Cabe destacar que este tipo de interrogantes tendrán cabida en la medida en que los asistentes del taller tengan algún conocimiento sobre las posibilidades del software. En el caso en que algunos nunca hayan experimentado con el mismo, estas cuestiones pueden no ser percibidas en una primera instancia, pero podrán ser traídas en el momento conveniente al trabajar con los diferentes registros de datos que proporciona el GeoGebra.

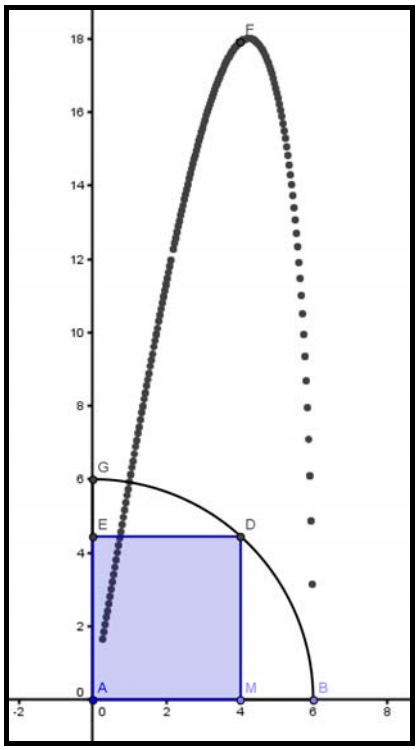
propone a continuación ilustra cómo se pueden integrar los diferentes registros de representación de la situación para poder contar con elementos que ayuden a establecer alguna conjetura sobre el comportamiento del área del rectángulo con relación a la posición[3] del punto M.

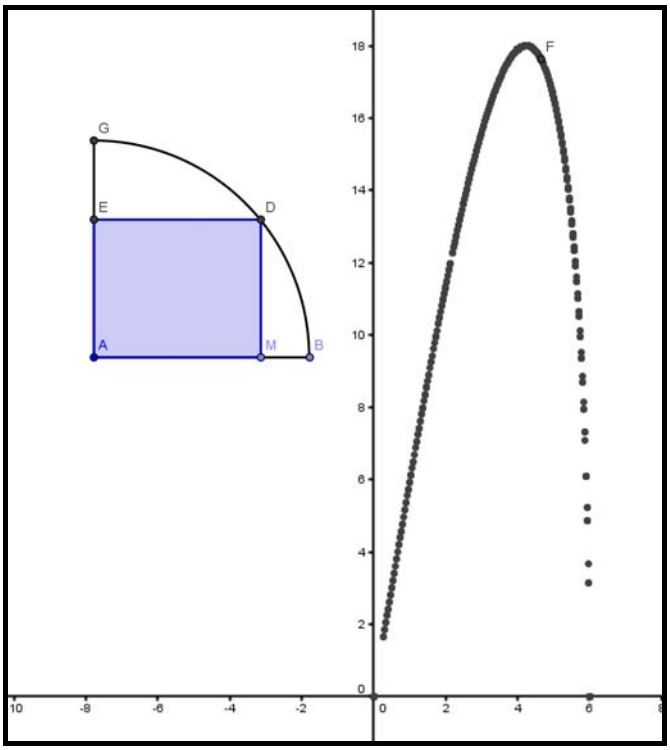


	A	B	C
1	0	0	
2	0.07	0.41	
3	0.11	0.65	
4	0.15	0.9	
5	0.19	1.14	
6	0.44	2.61	
7	0.56	3.33	
8	0.6	3.58	
9	0.68	4.06	
10	0.72	4.3	
11	0.8	4.78	
12	0.88	5.25	
13	0.93	5.49	
14	1.05	6.19	
15	1.13	6.66	
16	1.25	7.35	
17	1.42	8.25	
18	1.46	8.48	
19	1.62	9.36	
20	1.7	9.79	
21	1.82	10.43	
22	2.03	11.45	
23	2.15	12.05	

La integración de registros permitiría contar con mayores elementos para analizar la conjetura sobre porqué, por ejemplo, la curva descripta por la variación del área en relación con la variación de la medida del lado no ha resultado simétrica. En este sentido, la decisión de la ubicación de la construcción se torna significativa junto con la "habilitación" de la vista de los ejes cartesianos.

[3] Hay que destacar que la idea de posición del punto, se "traduce" de alguna forma en variación, porque la "simulación" que se hace del problema lleva a establecer una conjetura sobre el valor que toma el área del rectángulo a medida que varía la magnitud del lado del mismo.

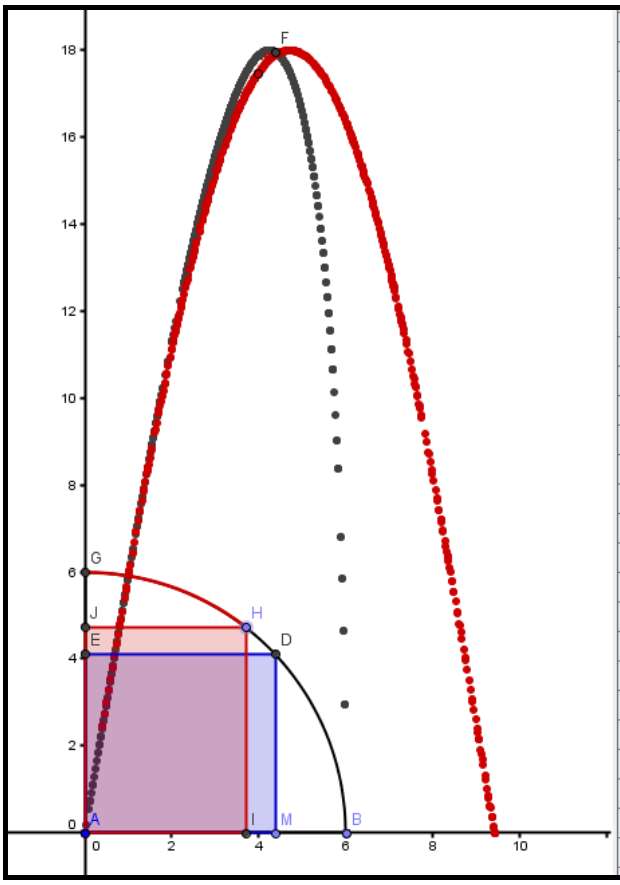




Todas estas herramientas y comandos del software, se constituyen en "variables didácticas" (Artigue 1995), pues se transforman en comandos que el docente puede decidir o no habilitar y que tienen consecuencias para el aprendizaje. En línea con lo que define Trouche (2004), forman parte del proceso de "orquestación documental" que el profesor organiza para la gestión de la clase.

Las características dinámicas del software facilitarían la construcción de una noción de función emparentada con los aspectos de variación y dependencia, y cómo se manifiestan los efectos por una suerte de inter-juego entre las variables elegidas.

Todo este despliegue habilita ir más allá aún del problema inicial y explorar nuevas preguntas: ¿qué pasaría si el punto M se hallara alojado sobre el arco de circunferencia y se desplazara sobre el cuarto de círculo?, ¿se trata de la misma variación? , ¿se describiría la misma curva u otra?, ¿tendría aspectos en común?, …. Estos interrogantes podrían estudiarse en "simultáneo" con el estudio realizado para sacar conclusiones a contrastar los resultados obtenidos.



		x(P)	y(P)	x(F)	y(F)
1					
2		3.45	16.42	3.3	16.53
3		3.46	16.46	3.33	16.61
4		3.49	16.52	3.36	16.7
5		3.52	16.59	3.39	16.78
6		3.54	16.65	3.42	16.86
7		3.58	16.74	3.45	16.94
8		3.61	16.8	3.48	17.01
9		3.65	16.89	3.51	17.09
10		3.7	16.98	3.54	17.16
11		3.72	17.03	3.57	17.22
12		3.74	17.06	3.6	17.29
13		3.77	17.11	3.64	17.35
14		3.78	17.15	3.67	17.41
15		3.81	17.19	3.7	17.47
16		3.83	17.22	4	17.89
17		3.85	17.27	4.25	18
18		3.88	17.31	4.28	18
19		3.9	17.34	4.31	17.99
20		3.94	17.41	4.35	17.98
21		3.99	17.47	4.38	17.96
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					
29					

Conclusiones:

Luego del desarrollo del taller y sobre la base de los interrogantes analizados y discutidos con el grupo asistente, esperamos arribar a diferentes conclusiones en relación con:

- El tipo de problemas que adquieren mayor potencial didáctico para el trabajo matemático en entornos de geometría dinámicos como GeoGebra.
- Los elementos potencializadores del software para la exploración de problemas y el establecimiento de conjeturas.
- La estrecha relación entre el tipo de problemas que se pueden estudiar con GeoGebra con el tipo de conocimiento matemático que pueden construir los alumnos, a partir de las diferentes intervenciones didácticas de quien enseña.
- El sentido de facilitar la integración de registros para la construcción de conocimientos.
- Los diferentes comandos y herramientas del GeoGebra y sus diversos usos con fines didácticos para la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Artigue, M y otros. (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

Barbin, E., Douady, R. (1996). *Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre Saberes, Programas y Prácticas.* Topiques éditions.

Bifano, F. & Villella, J. (2012). *Saberes construidos con (en) problemas dinámicos: ¿Otros objetos de saber?* Comunicación Coloquio Internacional, La didáctica de la matemática: enfoques y problemas. Homenaje a Michéle Artigue. Universidad Paris VII.

Brousseau, G. (1987). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ferragina, R. (ed.) (2012) *GeoGebra entra al aula de Matemática.* Montevideo: Ediciones Espartaco.

Hohenwarter, M., Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. En: *Proceedings of the British Society for Resarch into Learning Mathematics.* 27 (3): 16-131, University of Northhampton, UK: BSRLM

Santos Trigo, L. (2003) Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos En: *Boletín de Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, Nº 2.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students´ command process through instrumental orchestations In: *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 281-307. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA CONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE UM MODELO PLANO PARA A GEOMETRIA ELÍPTICA

Valdeni Soliani Franco – Luana Paula Goulart de Menezes
vsfranco@uem.br – ra61976@uem.br
Universidade Estadual de Maringá - Brasil

Modalidade: Minicurso.
Nivel educativo: Terciario
Palavras chave: Educação Matemática, Geometrias não Euclidianas, Geometria Elíptica, Modelos Planos.

Resumo
A Geometria Euclidiana e a Geometria Elíptica diferem não somente em seus conteúdos, mas também do modo em que foram construídas. Enquanto a primeira foi desenvolvida a partir da percepção tátil e visual e posteriormente axiomatizada, a outra foi desenvolvida a partir da axiomatização e somente posteriormente é que foram desenvolvidos modelos matemáticos para a percepção tátil e visual dessa geometria. Após a construção da Geometria Hiperbólica, desenvolvida principalmente por Bolyai e Lobachevsk, Riemann, com a finalidade de obter habilitação para ser professor na Universidade de Göttingen, desenvolveu a Geometria Esférica. Uma vez que na Superfície Esférica cada ponto determina um único ponto antípoda, e cada figura é assim duplicada nos antípodas, Felix Klein percebeu que seria possível, abstratamente, a identificação de cada par de pontos antípodas, isto é, construir um modelo com um novo conceito de ponto, de reta e de plano, após esta identificação. Dessa forma Klein construiu o que denominamos de Geometria Elíptica. Klein construiu também um modelo plano para tal geometria. Neste minicurso, será feita a construção de ferramentas que possibilitam construir esse modelo e explorar vários resultados que são pertinentes à Geometria Elíptica.

Introdução

Os trabalhos de Saccheri (1667-1733) e Lambert (1728-1777), de origem puramente lógica, indicavam a possibilidade de uma geometria alternativa à Geometria Euclidiana, mas pela forte influência de filósofos e pensadores de suas épocas, não levaram adiante os seus estudos.

Problemas práticos, tais como a determinação de geodésicas de superfícies suaves, levaram Gauss (1777-1855) a estabelecer novos conceitos, como a curvatura de uma superfície em um de seus pontos, que ao serem estudados levantavam também a possibilidade de comportamentos distintos dos Euclidianos. Apesar dessas evidências, Gauss nada publicou sobre essa possibilidade.

Alguns matemáticos, contemporâneos de Gauss, desenvolveram uma teoria similar à Geometria Euclidiana, trocando o Postulado das Paralelas por uma de suas negações. Podemos negá-lo escrevendo “Existem uma reta r e um ponto P não

pertencente a r, tal que por P passam duas retas paralelas a r" ou "Existe uma reta r e um ponto P, tal que por P não passa reta paralela a r". A primeira forma descrita deu origem à Geometria Hiperbólica, creditada a Lobachevski (1793-1856) e Bolyai (1802-1860), e a segunda forma descrita, juntamente com a substituição de outros postulados de Euclides deu origem a Geometria Esférica desenvolvida inicialmente por Riemann (1826-1866) e que proporcionou a construção por Klein (1849-1925) da Geometria Elíptica.

O objetivo central do minicurso será a construção de um modelo plano para a Geometria Elíptica, por intermédio da utilização do software livre, geométrico e dinâmico GeoGebra, com a finalidade de explorar alguns dos seus conceitos e resultados.

Fundamentação Teórica

O estudo da Geometria Elíptica foi baseado em COXETER (1968) e GREENBERG (1974). A análise das figuras construídas por meio do GeoGebra levaram a descoberta de resultados bastante interessantes e não encontrados na literatura pesquisada.

Resultados

Neste artigo, serão evidenciados os resultados que envolvem a Geometria Esférica e principalmente a Geometria Elíptica, já que esta última foi o foco central do estudo. Para isso é necessário descrever o início da Geometria Esférica.

Na Geometria Euclidiana, dado um ponto *P* que não está em uma reta *r*, existe exatamente uma reta paralela a reta *r* que contém o ponto *P*, sendo isso, uma das versões do conhecido postulado das paralelas. Na Geometria Hiperbólica, existe mais de uma reta paralela a *r* passando pelo ponto *P*. Em algumas geometrias, assume-se que não existe reta paralela a *r* que contém o ponto *P*. Uma dessas geometrias é a Geometria Esférica, que foi desenvolvida por Riemann (1826-1866), sendo a segunda Geometria não Euclidiana reconhecida como tal.

Riemann supôs que a hipótese de Saccheri do ângulo obtuso era válida, e alterou outros postulados dos Elementos de Euclides, a saber:

1- Quaisquer dois pontos determina ao menos uma reta;

2- Uma reta é ilimitada;

> 3- Quaisquer duas retas em um plano se encontra. COXETER (1968, p.11).

Essa tese de Riemann foi fruto de um trabalho de trinta meses, cuja finalidade era obter habilitação para ser professor na Universidade de Göttingen. A prova consistia de um trabalho de pesquisa inédito e de três conferências, uma das quais era escolhida pelo corpo docente, permitindo ao candidato indicar suas linhas de estudo na Instituição.

Se Gauss fosse acusado por ter retardado o surgimento da Geometria Hiperbólica, isso ficaria superado por ter sido dele (como chefe de departamento) o pedido para Riemann discorrer sobre o último tema.

No trabalho apresentado por Riemman, as retas seriam as geodésicas de uma superfície esférica, que no caso seria o plano dessa geometria. Como a reta é ilimitada, mas tem comprimento finito, ela pode ser representada como uma circunferência. As circunferências máximas, interpretadas como retas, nos fornecem um modelo para as retas finitas no plano finito – a Superfície Esférica.

Para se ter uma noção básica da superfície esférica descreve-se a seguir o modelo estudado para essa geometria.

Definição 1: Quando um plano π passa pelo centro de uma superfície esférica S^2 (superfície esférica de raio unitário), ele é denominado *plano diametral* e a circunferência $C = \pi \cap S^2$ é denominada *circunferência máxima.*

Definição 2: *Eixos* são retas euclidianas que passam pelo centro da esfera. *Eixo polar* é uma reta euclidiana que contém o centro da esfera e é perpendicular ao plano que determina uma reta *n* de S^2.

Definição 3: *Pontos antípodas* são os pontos de interseção do plano esférico com um eixo.

Observe na figura 1, que o que se denomina reta em S^2 é uma circunferência máxima.

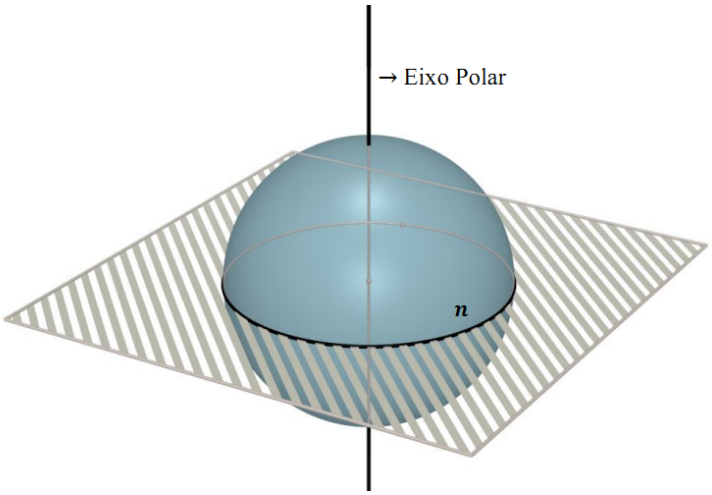


Figura 1

Fonte: autores

Esta é uma diferença básica entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica, pois a representação de uma reta nesta geometria é bastante diferente da representação de uma reta que se está acostumado, e que é basicamente da Geometria Euclidiana.

A partir desse ponto é necessário reformular os postulados dos Elementos de Euclides, pois, por exemplo, para se dividir uma reta não basta apenas um ponto (no modelo da Figura 1, fica claro isso), mas sim dois pontos.

Na Superfície Esférica a cada ponto corresponde um único ponto antípoda, e cada figura é assim, duplicada por meio desses pontos antípodas. Klein percebeu que seria possível, abstratamente, a identificação de cada par de pontos antípodas, isto é, construir um modelo com um novo conceito de ponto. Nesse modelo "ponto" seria um par de pontos antípodas na esfera. Com essa identificação, a reta nesse modelo, não seria mais a circunferência máxima, mas sim, a curva obtida por meio de uma circunferência máxima com os pontos antípodas identificados.

Ao fazer essas identificações descobriu-se uma surpreendente propriedade: uma reta já não divide o plano em dois lados, pois você pode "pular" de uma circunferência máxima, passando por um ponto dado que agora é igual ao ponto antípoda que costumava ser do outro lado, na superfície esférica. Se cortarmos uma tira a partir deste plano, será parecido com uma faixa de Möbius, que tem apenas um lado (Figura 2).

Figura 2
Fonte: GREENBERG (1974)

Já o “plano”, é a superfície obtida mediante a identificação dos pontos antípodas da superfície da esfera, cada um, com um único ponto.

Note, portanto, que nesse modelo construído por Klein, quaisquer dois pontos determina uma única reta, e assim, temos o primeiro postulado de Euclides re-estabelecido. Quanto ao segundo postulado de Euclides, ele não é verdadeiro, mesmo nesse novo modelo, pois apesar da reta continuar a ser ilimitada, ela tem comprimento finito, na verdade, metade do comprimento da circunferência máxima.

Foi a essa modificação feita na Geometria da Superfície Esférica que Klein deu o nome de Geometria Elíptica. Como se poderia esperar partir deste modelo é um teorema na Geometria Elíptica que as retas têm tamanho finito. Além disso, todas as retas perpendiculares a uma reta r não são paralelas umas às outras, mas são concorrentes.

Os axiomas da Geometria Elíptica de incidência, congruência e continuidade, consistem nos mesmos axiomas da Geometria Euclidiana, sem o quinto postulado (com as novas definições do segmento, triângulo etc.).

Um modelo em Geometria Plana Elíptica (devido a Klein) lembra o modelo de Poincaré para Geometria Hiperbólica. Neste modelo o plano é um círculo unitário (só que aqui estão incluídos os pontos da circunferência), os “pontos” são os pontos euclidianos dentro do círculo unitário, bem como os pares de pontos antípodas no círculo que são identificados e as “retas” são ou diâmetros do círculo unitário ou arcos das circunferências euclidianas que interceptam a circunferência do círculo unitário nas extremidades de um diâmetro, conforme Figura 3.

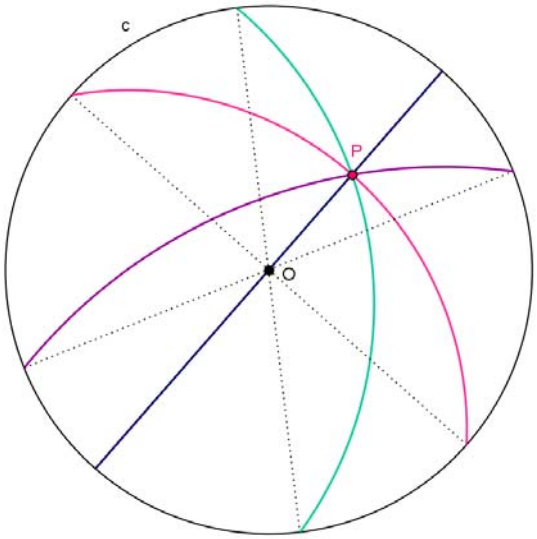


Figura 3

Fonte: autores

Para a construção desse modelo no GeoGebra foi necessário elaborar um teorema e demonstrá-lo.

O principal resultado obtido foi o teorema descrito a seguir:

Teorema 1: Seja C uma circunferência qualquer de centro O e P um ponto no seu interior. O lugar geométrico dos centros das circunferências que passa pelo ponto P e determina em C um diâmetro é a reta r obtida como segue:

"Trace a reta s determinada por P e O e a reta m perpendicular a s pelo ponto O, cuja interseção com C são os pontos A e B. A mediatriz do segmento AP determina em s um ponto P'. A reta r é a única reta perpendicular a s que contêm o ponto P'."

A aplicação desse resultado foi fundamental na construção do modelo de Klein para a Geometria Elíptica, descrito acima.

Para a demonstração deste teorema, foi necessário a demonstração de outro resultado, que também é bastante interessante, e por não ter encontrado similar nas pesquisas realizadas, enunciamos na sequência.

Lema: Dados um triângulo qualquer PP'D e um triângulo OP'D, tais que O é um ponto entre P e P', o lado PP' é menor que DP e o lado OP' menor que o lado OD. Além disso, se a seguinte igualdade é verificada:

$$\overline{DP}^2 - \overline{PP'}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OP'}^2 \qquad (1)$$

Então, os triângulos PP'D e OP'D (ver figura 4) são retângulos em P'.

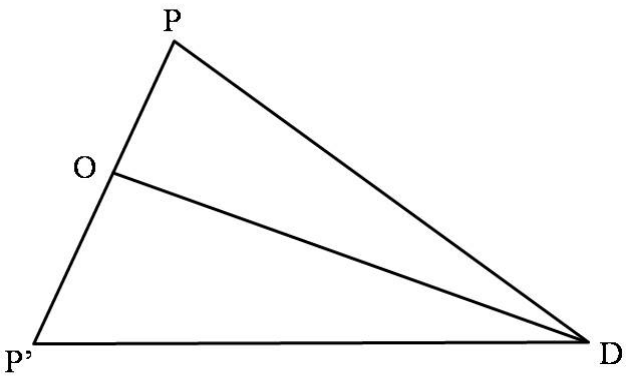


Figura 4

Apenas para deixar mais claro, o tipo de estudo que foi feito após a construção do modelo plano de Klein, para a Geometria Elíptica, enunciamos um dos teoremas estudados utilizando o modelo.

Teorema 2: Dados P e Q pontos distintos. Então existe uma única reta contendo P e Q.

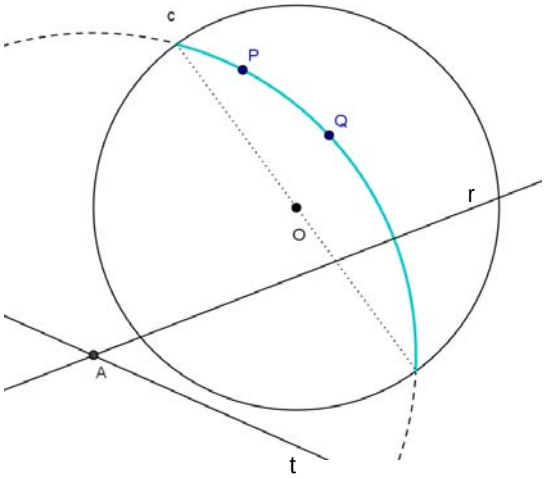


Figura 5

Fonte: autores

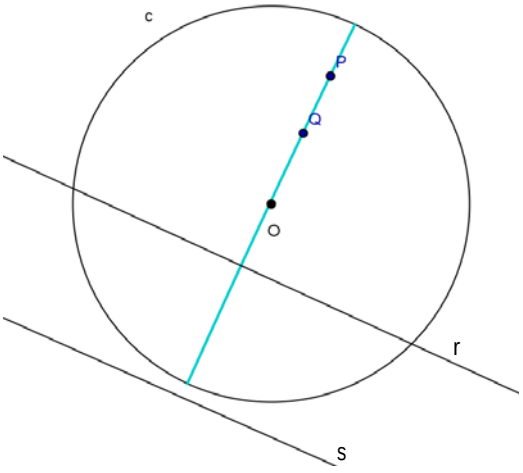


Figura 6

Fonte: autores

É evidente que todos estes resultados foram demonstrados por meio do método hipotético dedutivo, mas não foram apresentados aqui, pelo espaço necessário para essas demonstrações.

Conclusões

O ponto central do minicurso é o estudo do modelo plano sugerido por Félix Klein para a Geometria Elíptica.

Durante a realização do minicurso, será feito a construção desse modelo plano, por meio do software livre GeoGebra. Não foi encontrado na literatura pesquisada o Teorema 1, enunciado acima, mas ele é o principal resultado que auxilia a construção desse modelo no GeoGebra. Após essa construção, é possível verificar a validade de diversos axiomas da Geometria Elíptica em tal modelo, além de observar alguns dos principais resultados válidos nessa geometria.

Referencias bibliográficas

Coxeter, H. S. M. (1968). *Non-Euclidean Geometry*. 5ª ed. Toronto: University of Toronto Press.

Greenberg, M. J. (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company.

UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA CONSTRUÇÃO DE MODELOS PLANOS PARA A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Karla Aparecida Lovis – Valdeni Soliani Franco
karlalovis@gmail.com – vsfranco@uem.br
Universidade Estadual de Maringá - Brasil

Modalidade: Minicurso
Nível educativo: Terciário
Palavras-chave: Educação Matemática, Geometrias não Euclidianas, Geometria Hiperbólica, Modelos Planos.

Resumo
A Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica diferem não somente em seus conteúdos, mas também no modo em que foram construídas. Enquanto a primeira foi desenvolvida por meio da percepção tátil e visual e posteriormente axiomatizada, a outra foi axiomatizada e posteriormente foram desenvolvidos modelos matemáticos para a percepção tátil e visual dessa geometria. Provavelmente isso fez com que as publicações de Bolyai e Lobachevski (sobre o que hoje denominamos Geometria Hiperbólica), não fossem suficientes para convencer o mundo matemático da possibilidade de existirem outras geometrias diferentes da estabelecida por Euclides. A construção de modelos que satisfizessem os axiomas estabelecidos na Geometria Hiperbólica contribuíram para a aceitação de tal Geometria. Felix Klein construiu um modelo plano e Henry Poincaré mais dois modelos planos. O GeoGebra é uma ferramenta muito eficaz para construção desses modelos. Neste minicurso faremos a construção de ferramentas que possibilitam construir o modelo do disco de Poincaré e outras que permitem explorar vários resultados que são pertinentes à Geometria Hiperbólica.

Introdução

Durante o meados do século XIX encontramos um exemplo de simultaneidade de descobertas relacionadas às Geometrias não Euclidianas; o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856), sem qualquer contato mútuo e sem prévio conhecimento dos trabalhos de Saccheri, desenvolveram, independentemente, um novo tipo de Geometria (LOVIS, 2009).

Lobachevsky foi um dos matemáticos que mais contribuiu na construção das Geometrias não Euclidianas. Durante sua vida acadêmica elaborou vários trabalhos relacionados à Geometria. Em um desses trabalhos “On the Principles of Geometry”, publicado em 1829, Lobachevsky marcou oficialmente o nascimento da Geometria não Euclidiana.

Matemáticos do fim do século XIX chegaram a resultados importantes sobre à consistência da Geometria de Lobachevsky. Eles descobriram que as Geometrias não Euclidianas devem ser consistentes caso seja consistente a Geometria Euclidiana. Lobachevsky rejeitou somente o quinto postulado de Euclides, mas conservou os demais postulados e os axiomas da Geometria Euclidiana. O que faltava era construir um modelo matemático para a Geometria de Lobachevsky.

O matemático Felix Klein (1849-1925) criou um modelo para a Geometria Hiperbólica, que está de acordo com os postulados dessa Geometria. O matemático Henri Poincaré (1864-1912) criou outros dois modelos para a Geometria Hiperbólica. A seguir vamos descrever um desses modelos, o modelo do disco de Poincaré.

O modelo do Disco de Poincaré

O francês Henri Poincaré (1864-1912) criou dois modelos para a Geometria Hiperbólica. Neste minicurso, será trabalhado o "Modelo do Disco de Poincaré" que, no decorrer deste texto, chamaremos simplesmente de modelo de Poincaré. Neste texto, descreveremos algumas características deste modelo[1].

Poincaré criou o seu modelo baseado na Geometria Euclidiana. Os pontos desse modelo são pontos no sentido habitual que estão em um plano. O plano é, por definição, o interior de um círculo euclidiano, ou seja, se O é o centro de uma circunferência euclidiana qualquer e OR um de seus raios, o plano no modelo hiperbólico é constituído por todos os pontos P tais que $\overline{OP} < \overline{OR}$. A circunferência (que por definição não faz parte do plano) é chamada de horizonte.

As retas neste modelo são cordas abertas que passam pelo centro O (ou seja, os diâmetros abertos), e arcos de circunferências abertos ortogonais[2] ao horizonte. No decorrer do texto chamaremos estas retas de retas hiperbólicas, ou simplesmente de h-retas. Um exemplo de h-retas e horizonte estão na figura 1.

[1] As características serão apresentadas segundo Greenberg (1980) e Lovis (2009).

[2] Duas circunferências secantes são ortogonais se em cada ponto de intersecção os raios são perpendiculares.

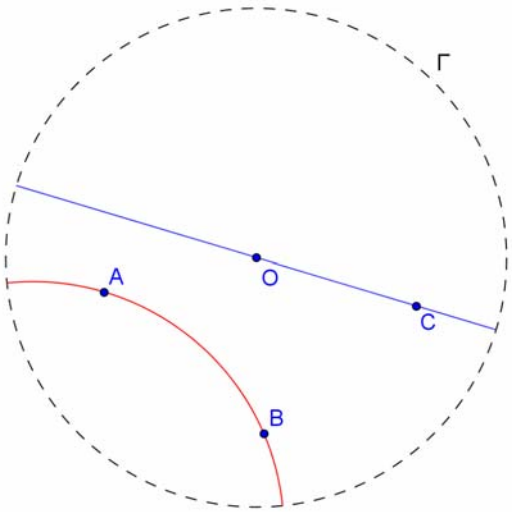


Figura 1 – h-retas AB e OC, e horizonte Γ

Para construção de h-retas, necessitamos saber, como construir circunferências ortogonais. Para isso é necessário conhecer o que significa o inverso de um ponto em relação à uma circunferência qualquer.

Em um plano euclidiano π, construímos um círculo com raio r e centro O (chamado centro de inversão), e definimos uma aplicação de π em π, cuja imagem de um ponto qualquer A em π é definida como sendo o ponto A' contido na semi-reta OA, tal que $\overline{OA}.\overline{OA'} = r^2$. Sendo assim, os pontos A e A' são chamados de pontos inversos com relação à circunferência. Se A' é o inverso de A, então A é o inverso de A'.

Mas afinal, qual a relação que tem o conceito de inverso de um ponto em relação a uma circunferência, com a definição de h-reta? Esta relação está descrita pelo teorema a seguir.

Teorema: Sejam C uma circunferência e A um ponto qualquer do plano que contém C. Uma circunferência C' que passa por A é ortogonal a C se, e somente se, o centro de C' está localizado na mediatriz de A e o seu inverso A' em relação a C.

Este teorema garante que a mediatriz de um ponto A e o seu inverso A' em relação a uma circunferência C, é o Lugar Geométrico dos centros das circunferências ortogonais a C que passam pelo ponto A. No minicurso, utilizaremos o GeoGebra e o teorema anterior para construir h-retas que passam por um ponto do plano hiperbólico.

No modelo do disco de Poincaré, se duas h-retas se interceptam em um ponto P, elas vão determinar um ângulo. A medida do ângulo formado por elas é, por definição, a medida do menor ângulo formado pelas semirretas euclidianas que são tangentes aos

arcos (retas hiperbólicas) no ponto em que estes se interceptam. Portanto, para calcular a medida de ângulo nesse modelo é preciso encontrar as retas euclidianas tangentes aos arcos para depois calcular a medida do ângulo formado por essas duas retas, como ilustra a figura 2.

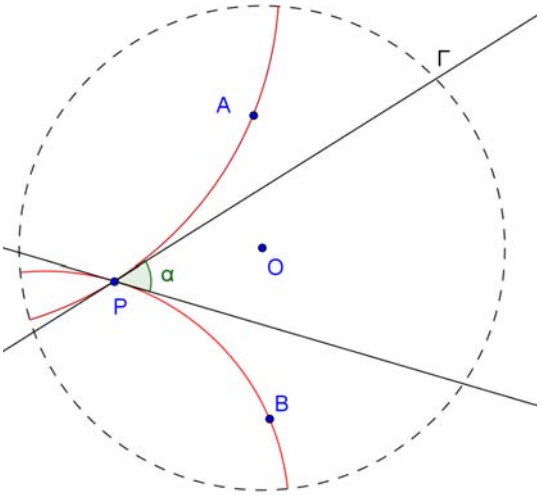


Figura 2 – Ângulo α entre as h-retas AP **e** BP.

A distância entre dois pontos neste modelo é dada pela seguinte definição:

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \left| \ln \frac{\overline{\mathrm{AU}} * \overline{\mathrm{BV}}}{\overline{\mathrm{AV}} * \overline{\mathrm{BU}}} \right|$$

onde U e V são pontos ideais[3] da h-reta AB. A operação definida por $*$ é a multiplicação usual de números reais, e as medidas dos segmentos $\overline{\mathrm{AU}}$, $\overline{\mathrm{BV}}$, $\overline{\mathrm{AV}}$ e $\overline{\mathrm{BU}}$ são euclidianas. O esboço encontra-se na figura 3.

[3] Os pontos do horizonte são chamados de pontos ideais.

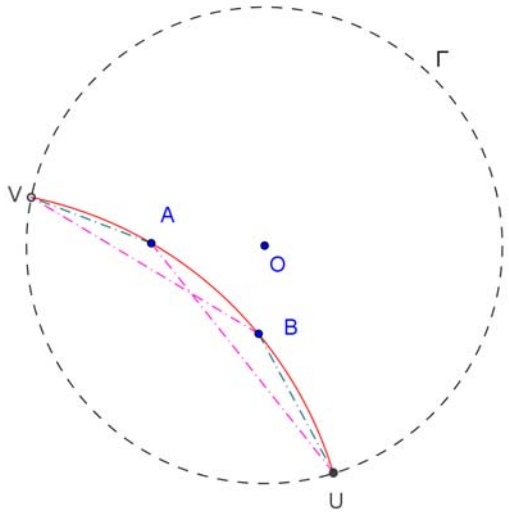


Figura 3 – Distância entre os pontos A e B.

Poincaré usou esta métrica para construir um espaço ilimitado (plano hiperbólico), em um espaço limitado com a métrica euclidiana (circunferência euclidiana). A métrica desenvolvida por Poincaré permite que quando os pontos A e B se aproximam dos pontos ideais o valor das medidas $\overline{AV}$ e $\overline{BU}$ diminuem, consequentemente o logaritmando aumenta e, assim, depois da aplicação da função logarítmica a função distância tende ao infinito. Ao aproximar os pontos A e B o valor das medidas $\overline{AU}$ e $\overline{BV}$ diminuem, o que ocasiona, depois da aplicação da função logarítmica uma distância que tende a zero.

Ao utilizarmos a métrica desenvolvida por Poincaré, obtemos que a distância entre dois pontos quaisquer, quando estes estiveram próximos do horizonte, tenderá ao infinito. Isso acontece porque as h-retas, assim como a reta euclidiana, devem ser infinitas, para satisfazer o segundo postulado de Euclides.

Retas paralelas neste modelo são retas que, assim como na Geometria Euclidiana, não possuem nenhum ponto em comum. Neste modelo, dado um ponto P e uma h-reta AB é possível traçar, por P, infinitas h-retas paralelas a h-reta AB.

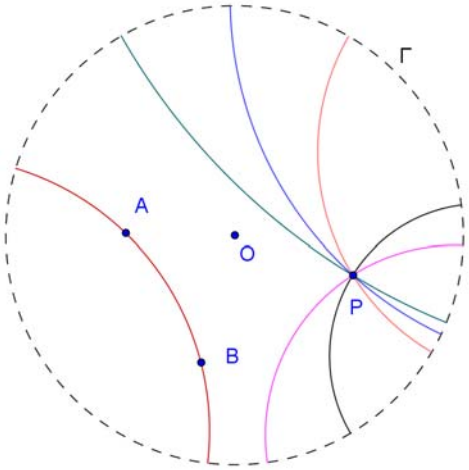


Figura 5 – h-retas passando por P paralelas à h-reta AB

Dada duas h-retas CU e AB, a h-reta CU, é chamada de h-reta paralela limite da h-reta AB, se ela tiver um ponto ideal em comum com a h-reta AB. A figura 6, ilustra duas retas que são paralelas limites.

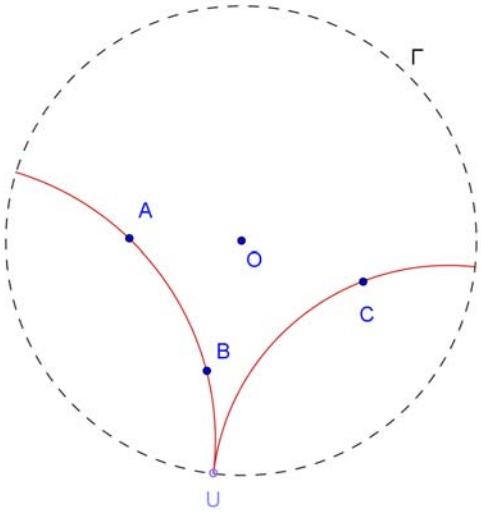


Figura 6 – H-retas paralelas limites

Alguns resultados da Geometria Hiperbólica, deverão ser explorados durante o minicurso, como por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede menos do que 180º. Na figura 7, desenhamos um triângulo hiperbólico, no modelo do disco de Poincaré, em que se mostra a soma dos seus ângulos internos.

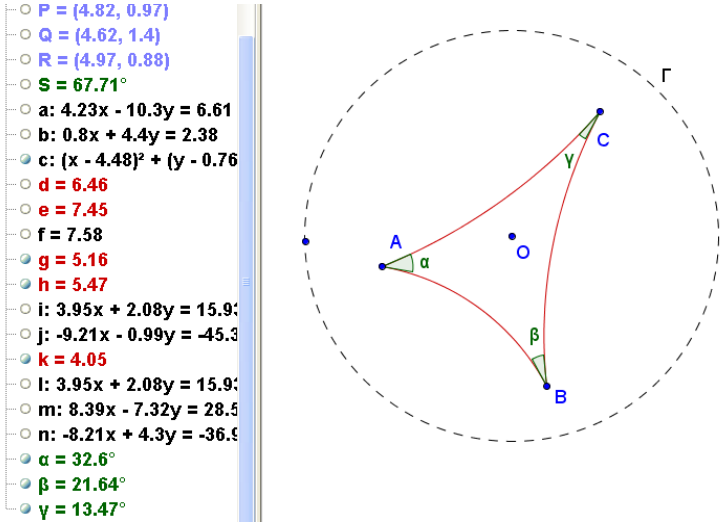


Figura 7 – Soma S dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico

Referências Bibliográficas

- Euclides. (2009). *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp.
- Franco, V. S.; Gerônimo, J. R.; Barros, R. M. O.; (2010). *Geometria Euclidiana Plana: um estudo com o software GeoGebra*. Maringá: EDUEM.
- Greenberg, M. J. (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company.
- Lovis, K. A. (2009). *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores*. (Tese inédita de mestre). Universidade Estadual de Maringá, Maringá/PR.

VISUALIZAR, CONJETURAR Y DEMOSTRAR UTILIZANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA

Margot Madama – Mary Curbelo
margot.madama@hotmail.com marycur5771@hotmail.com
Liceo "José Alonso y Trelles" de la ciudad de Tala, Uruguay.

Uso informático.
T (Taller)
Medio (de 11 a 17 años)
Visualizar, conjeturar y demostrar utilizando el software GEOGEBRA

Resumen:
La interpretación geométrica en sala de informática permite al estudiante reinterpretar, afianzar y elaborar los conceptos dados en clase sobre el tema y descubrir características o propiedades de los mismos, ya que el alumno cuenta con un número mayor de casos a observar pues moviendo puntos, descubre propiedades, conjetura en torno a ellas, para luego demostrarlas utilizando el software Geogebra. La misma tiene la ventaja de otorgar mayor significado a las situaciones algebraicas presentadas, creando un fuerte vínculo entre álgebra y geometría. En el taller se presentarán distintos trabajos que hemos propuesto en primer y segundo ciclo de Enseñanza Secundaria para que los participantes realicen dichas actividades y así crear un ambiente de opinión y discusión que enriquezca los trabajos entusiasmando a los participantes en el uso de esta herramienta. Luego se propondrá crear una actividad en Geogebra que permita visualizar e inferir propiedades para luego demostrarlas utilizando el software

Introducción

La interpretación geométrica en sala de informática permite al estudiante, además de desarrollar habilidades de visualización, reinterpretar, afianzar, y elaborar los conceptos dados en clase sobre el tema y descubrir características o propiedades de los mismos, ya que el alumno cuenta con un número mayor de casos a observar pues moviendo puntos, descubre propiedades, conjetura en torno a ellas, para luego demostrarlas utilizando el software Geogebra. La misma tiene la ventaja de otorgar mayor significado a las situaciones algebraicas presentadas, creando un fuerte vínculo entre álgebra y geometría.

La utilización del programa permite agilidad, ya que se aumenta la cantidad de casos que se pueden observar, además de generar mayor certeza con que se puede trabajar el tema. De esta forma la observación de imágenes implica un trabajo no rutinario, lo cual no significa que no se realice un trabajo manual, pues éste también es importante y necesario.

La exploración informal de relaciones geométricas por construcción y medición con lápiz y papel, consumen demasiado tiempo (y son relativamente inexactas), esas figuras construidas son " estáticas " y uno tiene que redibujar la figura o ser capaz de visualizar cómo podría cambiar de forma. El dinamismo de las figuras que se construyen con el software Geogebra, facilita la visión global de un problema, el desarrollo de conceptos ya que en la visualización experimentan y descubren regularidades que, con el trabajo manual, requeriría mucho más tiempo y esfuerzo. Con éste tipo de programa las figuras geométricas pueden construirse por medio de acciones y en un lenguaje que son muy próximos al que se usa en el universo del " lápiz y papel", con la ventaja de poder realizar construcciones complejas para luego modificarlas. Una vez creadas, estas figuras pueden redibujarse moviendo sus elementos básicos directamente mientras se mantienen las propiedades que se les han dado explícitamente.

De esta forma el trabajo en geogebra permite estimular la observación, la experimentación y la generalización, así como la elaboración de conjeturas, su verificación experimental, permitiendo que el alumno no se pierda en construcciones intermedias y su posterior demostración.

Actividades creadas para trabajar con GeoGebra

ACTIVIDAD 1:

Unidad: Geometría: Método de los lugares geométricos.

Tema: Ángulo inscripto en una circunferencia. Ángulo al centro

Curso: 4° año

Objetivos: * Observar que los puntos del plano que ven a un segmento bajo un ángulo constante es un arco capaz. * Definir ángulo inscripto en una circunferencia y ángulo al centro a partir de su construcción. * Deducir y justificar la propiedad que relaciona ángulo inscripto y ángulo al centro que abarca el mismo arco.

Actividad previa: Antes del siguiente trabajo, se les presenta a los alumnos un problema y una actividad en Geogebra dónde, a partir de ellas, deducen la definición de arco capaz y justifican que es un lugar geométrico.

Ficha de trabajo: Ángulo inscripto y ángulo al centro: una relación particular

PRIMERA PARTE: En busca de una propiedad

*Eliminar ejes (vista-ejes)

1.- Construir una circunferencia de centro O y dos puntos A y B en ella (Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos . Para llamar O a su centro: señala el punto A y con el secundario elige: renombra. Para hallar otro punto A en la cfa selecciona: punto en objeto y señala la cfa)

2.- Construir el ángulo ACB con C en uno de los arcos de la cfa anterior, medirlo y comprobar que el ángulo ACB siempre mide igual cuando C varía en un mismo arco AB (para ello busca punto en objeto y señala la cfa para encontrar C, traza las semirrectas CA y CB con: semirrecta por dos puntos y mide el ángulo convexo que esas dos semirrectas determinan con: ángulo , si te da la medida del ángulo no convexo ACB señala las semirrectas en orden contrario, luego mueve el punto C con: elige y mueve).

3.- Podemos afirmar entonces que**:**

EL _____ DE LOS PUNTOS DE UNO DE LOS SEMIPLANOS DE BORDE [A,B] QUE SON VÉRTICES DE ÁNGULOS QUE MIDEN α Y CUYOS LADOS PASAN POR A Y B ES _____ DE SEGMENTO AB Y ÁNGULO α

4.- ¿Qué nombre recibe un ángulo convexo cuyo vértice pertenece a una circunferencia y sus lados son secantes a ella? _____

(Puede servirte de ayuda el libro con el que trabajamos en clase: Matemática 4)

5.- Construir el ángulo AOB y medirlo (si el punto C elegido está en el mayor arco de cuerda AB debes medir el ángulo AOB convexo, pero si C pertenece al menor arco de cuerda AB, el ángulo AOB es el no convexo)

6.- ¿Qué nombre recibe un ángulo cuyo vértice es el centro de una cfa? _____

7.- ¿Cómo es el ángulo AOB con respecto al ACB? _____

Puede servirte de ayuda calcular el doble de α.

8.- Podemos decir entonces que:

LA MEDIDA DE UN ÁNGULO _____ EN UNA CIRCUNFERENCIA ES IGUAL A LA _____ DE LA MEDIDA DEL ÁNGULO _____ QUE ABARCA EL MISMO ARCO.

SEGUNDA PARTE: Demostración de la propiedad

* Archivo-nuevo-no guardar

1.- Construir una circunferencia de centro O, los puntos A, B y C en ella (elige C en el arco mayor AB), las semirrectas CA, CO y CB, OA y OB.

2.- Definir el punto E, intersección de la semirrecta CO y la cfa (intersección de dos objetos y señalar ambas). Observa que el punto C aparece como D en la vista gráfica, para que vuelva a aparecer como C: en vista algebraica dar un clic sobre D.

3.- Medir los ángulos convexos $A\hat{C}O$, $O\hat{C}B$, $A\hat{O}E$ y $E\hat{O}B$. Observa que el tercer ángulo es el doble del primero y que el cuarto el doble del segundo.

4.- Medir los ángulos convexos $O\hat{A}C$ y $C\hat{B}O$.

5.- ¿Por qué miden lo mismo los ángulos $A\hat{C}O$ y $O\hat{A}C$? _____

¿Y los ángulos $C\hat{B}O$ y $O\hat{C}B$? _____

6.- ¿Por qué el ángulo $A\hat{O}E$ es igual a la suma de $A\hat{C}O$ y $O\hat{A}C$?_____

¿Por qué el ángulo $E\hat{O}B$ es igual a la suma de $C\hat{B}O$ y $O\hat{C}B$?_____

7.- De la parte 5 y la 6 podemos concluir que: $A\hat{O}E$ = __ $A\hat{C}E$ y que $E\hat{O}B$ = __ $E\hat{C}B$

Por lo tanto: **AOB = __ ACB** Lo que comprueba la propiedad de la primera parte

8.- Comprobar que la propiedad es válida cualquiera sea la posición de D.

(En la ficha de los alumnos aparece la guía para realizarlo)

ACTIVIDAD 2:

Unidad: Álgebra-Funciones

Tema: Funciones racionales

Curso: 4° año

Objetivos: *Retomar y aplicar a una función racional dada por su gráfico los conceptos de: función, raíz y signo. *Explicar el concepto de dominio de una función y cómo se encuentra el mismo a partir de su gráfico, además cómo obtener la raíz y el dominio a partir de la expresión de la función racional dada. *Observar, conjeturar y fundamentar cómo hallar: dominio, raíz, signo, corte con Oy y asíntotas de una función racional a partir de su gráfico.

Ficha de trabajo: Estudio de la función racional

PRIMERA PARTE: Analizando un gráfico realizado en Geogebra

1.- En la barra de entrada escribe la función: f(x) = (3x - 6)/(x + 1) y presiona enter

2.- Observando el gráfico obtenido: i) explicar por qué corresponde al de una función, ii) indicar cuál es el dominio de la misma, la raíz y el signo. iii) Observando la

expresión analítica de la función, ¿cómo crees que puedes hallar el dominio de la función? ¿y la raíz? iv) Traza las rectas: y = 3, x = -1 y observa que ninguna de la "ramas" del gráfico las cortan.

SEGUNDA PARTE: Trabajo en Geogebra

1.- Crear los deslizadores: a, b, c y d (Deslizador y hacer clic en la vista gráfica donde irá el deslizador, selecciona un rango entre -10 y 10 en cada uno de los cuatro deslizadores y "aplica".

2.- En la barra de entrada escribe la función: f(x) = (a x + b)/(c x + d) y presiona enter

3.- Mueve los deslizadores para: a=4, b=-8, c=1 y d=-1 con: elige y mueve.

4.- Traza las rectas y = 4, x = 1 (en barra de entrada escribe: y = 4 y presiona enter, luego x = 1 y enter. Puedes volver a desplazar el gráfico, alejarlo o acercarlo)

5.- Señala un punto sobre la hipérbola que quedo dibujada (Nuevo punto y señalar la hipérbola)

6.- OBSERVACIONES:

Observando el gráfico de la función f / f (x) = $\frac{4x-8}{x-1}$ que dibujaste contesta:

a) ¿Todos los valores de x tienen imagen? _____ Mueve el punto A y observa sus coordenadas en la vista algebraica, ¿es posible que A tenga abscisa 1? _____

¿Cómo puedes hallar ese valor teniendo la expresión de f? _____

Decimos que el dominio de la función f es: _____ y escribimos: **D (f) = R – { 1 }**

b) ¿Cuál es la raíz de la función? _____ Mueve el punto A hasta que coincida con el punto de corte de la hipérbola con el eje x, ¿cuáles son sus coordenadas? _____

¿Cómo puedes hallar ese valor teniendo la expresión de f? _____

c) Escribe el signo de f según el gráfico _____

d) ¿Cuál es el corte con el eje Oy? _____ ¿Cómo puedes hallar ese valor teniendo la expresión de f? _____

e) ¿Qué sucede con el comportamiento de la función cuando x toma valores muy grandes en valor absoluto? _____

Escribimos: $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow}$ y se lee: f de x tiende a ___ cuando x tiende a mas o menos infinito

Decimos que la recta y = 4 es una asíntota horizontal (A.H.: y = 4)

f) ¿Qué sucede con el comportamiento de la función en las cercanías de la recta x = 1?

_____

Escribimos: * $f(x) \longrightarrow$ y se lee: f de x tiende a _____ cuando x tiende a

$x \to 1^+$ 1 por derecha

* $f(x) \to$ y se lee: f de x tiende a _____ cuando x tiende

$x \to 1^-$ a 1 por izquierda

Decimos que la recta x = 1 es una asíntota vertical (A.V.: x = 1)

10.- Realiza el estudio efectuado en la parte anterior con la función $f / f(x) = \frac{3x-6}{x+1}$

ACTIVIDAD 3:

Unidad: Geometría analítica del espacio.

Tema: Ecuación cartesiana de planos en distintas posiciones.

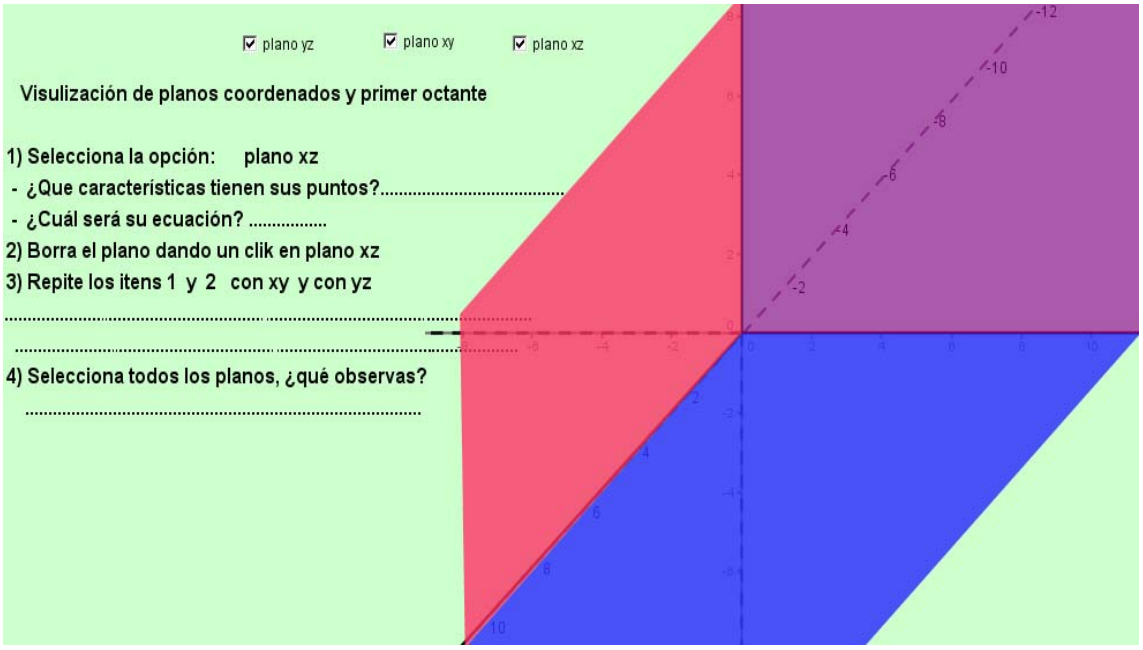
Curso: 5° año, Matemática 1, Núcleo Común.

Objetivos: *Visualizar e inducir ecuación del plano en diferentes posiciones en el espacio y aplicarlo luego a cuerpos cuyas caras son planas.

Representación de planos. Ecuación cartesiana de un plano según su ubicación en el plano

Visualización de planos coordenados, primer octante y planos paralelos a los coordenados. Ecuaciones de cada plano.

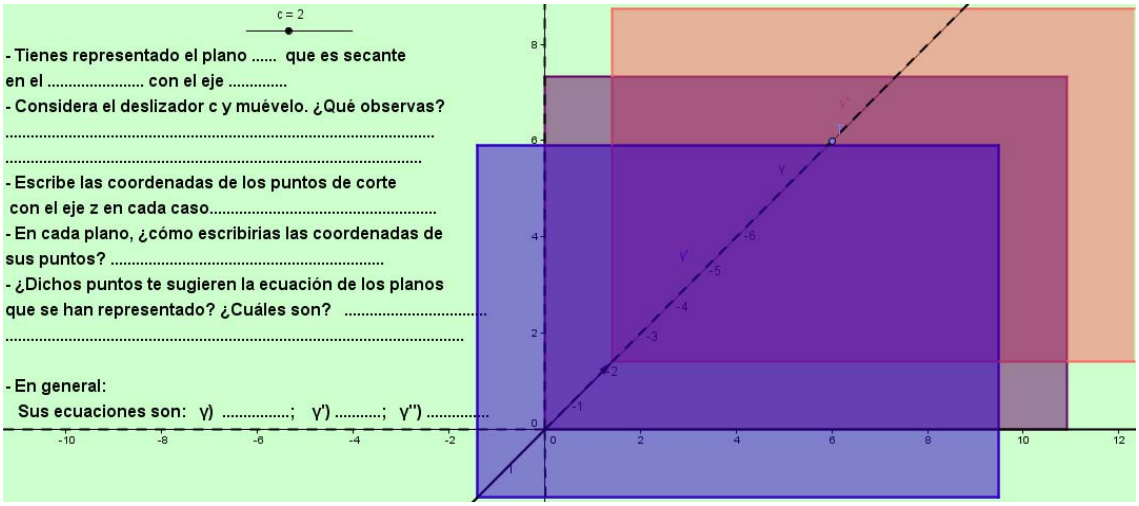
Para ello busca la actividad: 1) realizada en geogebra:



Visualización de los planos paralelos a los coordenados y deducción de ecuación:

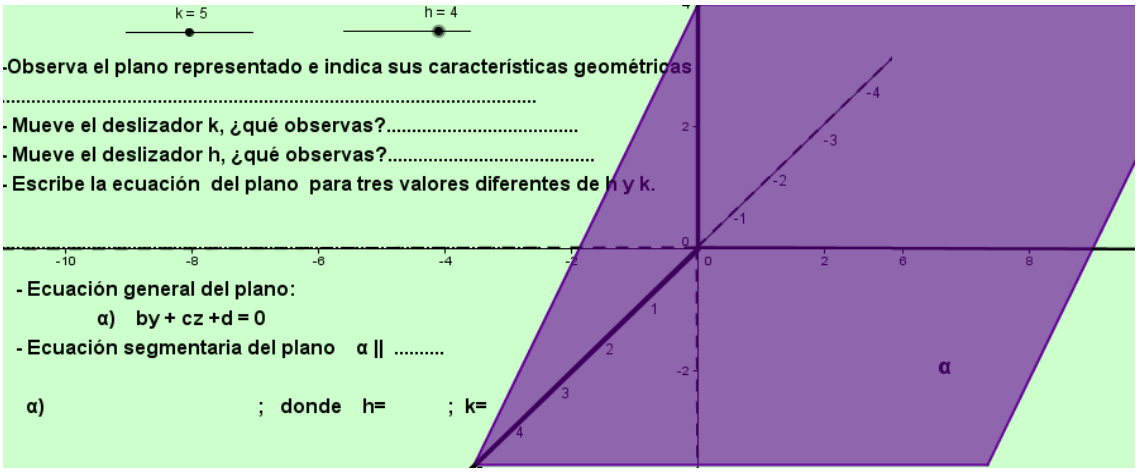
Para ello busca las actividades: 2); 3); 4); 5) creadas con el software Geogebra.

A modo de ejemplo se muestra la ficha 3:

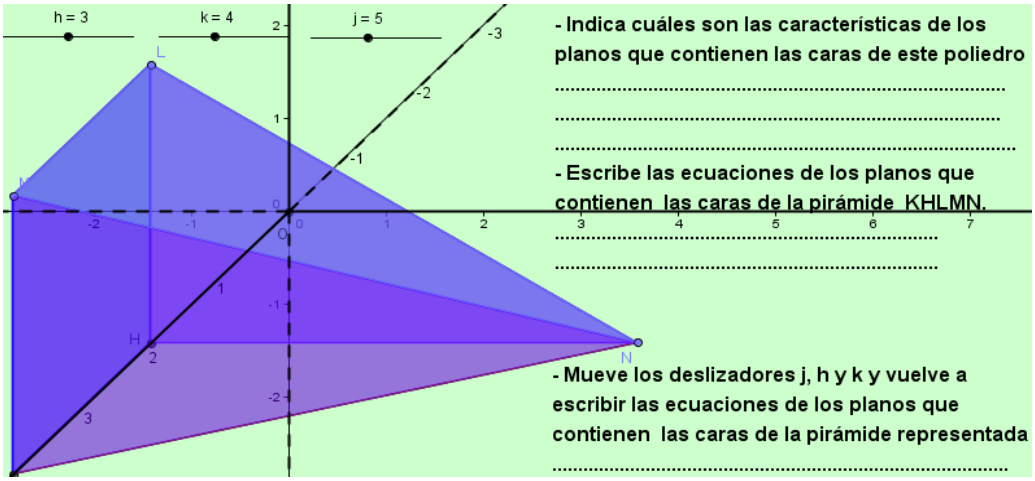


Visualización de los planos secantes a dos o tres ejes coordenados: Deducción de su ecuación. (Para ello busca las fichas: 6); 7); 8); 9) creadas en geogebra).

A modo de ejemplo se muestra la ficha 6:



Ejercicios: (fichas 10 y 11) (A modo de ejemplo ficha 11)



ACTIVIDAD 4:

Unidad: Geometría del triángulo.

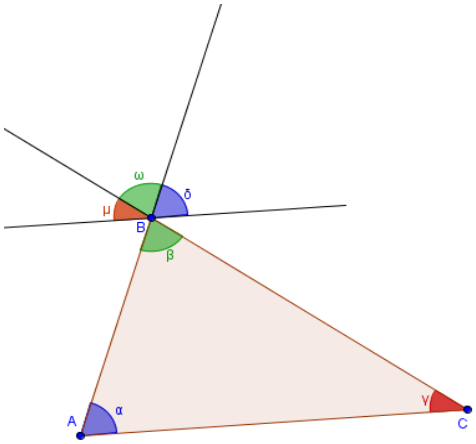
Tema: Propiedades relativas a ángulos de un triángulo

Curso: 2° año

Objetivos: *Observar, deducir y demostrar propiedades sobre suma de ángulos internos de un triángulo, relación entre ángulo interno y su correspondiente ángulo externo y teorema del ángulo externo.

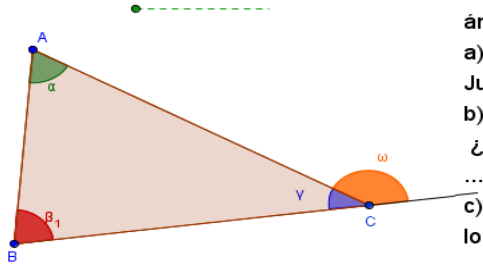
Suma de los ángulos internos de un triángulo.

- Primero se trabaja con una ficha donde se deduce la propiedad a través de mediciones y sumas de ángulos internos del triángulo.
- Luego se trabaja con la ficha 3 para su demostración apoyándonos en el software Geogebra.



Se ha representado un triángulo ABC y se han indicado sus ángulos interiores.
Mueve el deslizador que tienes en la parte superior.
¿Qué se ha representado?.....
.....
.....
¿Qué relación encuentras entre los ángulos azules? justifica
.....
¿Y los marrones?Justifica .....
¿Y los verdes? Justifica.....
¿Cuánto es μ + ω + δ? Justifica .....
¿Qué puedes decir acerca de la suma de los ángulos interiores de un triángulo? .....

Relación entre ángulo internos y sus correspondientes ángulos externos. (ficha 4)



Se ha representado un triángulo ABC, se han indicado sus ángulos internos y uno de los ángulos externos del mismo.
a) ¿Cuál es la suma del ángulo azul con el ángulo anaranjado? Justifica. .....
b) Mueve el deslizador que encuentras en la parte superior.
¿Qué observas?.....
.....
c) Busca alguna relación entre el ángulo externo indicado y los ángulos internos del triángulo no adyacentes a él
. .....,
d) Conclusión:.....
e) Vamos a demostrarlo:
α+β+γ= .....
γ+ω=.....
Como γ es el mismo en ambos casos, se concluye que: ω=α+β

AVALIAÇÃO DO USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE GEOMETRIA: REFLEXÃO DA PRÁTICA NA ESCOLA

Eimard Gomes Antunes do Nascimento
eimard@yahoo.com
Mestre em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará (UFC)

Modalidade: Comunicação
Nível educativo: Todos
Palavras-chaves: novas tecnologias para educação; informática na educação; educação matemática e tecnológicas

RESUMO
Uma das questões mais polêmica no contexto do sistema de ensino brasileiro diz respeito aos problemas de aprendizagem em geometria, esse tema toma uma dimensão mais significativa quando diz respeito ao ensino das ciências exatas e as avaliações realizadas pelo MEC; Onde este artigo descreve uma proposta de utilização de nova tecnologia para auxiliar o assunto da matemática onde é pouco explorado em escolas publicas principalmente (por motivos diversos: desde falta de material, professor não qualificado até calendário letivo sem espaço para geometria e nem laboratório apropriado). A metodologia foi de pesquisa experimental, onde foram apresentados aos alunos e professores de matemática os recursos e a potencialidade do GeoGebra para auxiliar no ensino e no aprendizado onde pode mostrar uma nova forma de ensino aprendizagem e criando uma nova. Na aplicação houve uma grande aceitação dos alunos e professores que refletiu num agendamento para outras 5(cinco) escolas para aplicação e ideias para oficinas e cursos de formação para os professores.

1 INTRODUÇÃO

O uso de recursos tecnológicos digitais no contexto escolar constitui uma linha de trabalho que necessita se fortalecer na medida em que há uma considerável distância entre os avanços tecnológicos na produção de softwares educacionais livres ou proprietários e a aceitação, compreensão e utilização desses recursos nas aulas pelos professores.

Primeiramente, muitos professores não estão preparados para usar as tecnologias computadores, lousa digital, muitos não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas, de forma que, para tais professores, o dilema é tentar ensinar geometria sem conhecê-la, ou então não ensiná-la. Um terceiro fator que pode ser apontado deve-se à exagerada importância que é dada ao livro didático tradicional, em detrimento de outras possibilidades pedagógicas. Nele, a geometria é apresentada simplesmente como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, aplicada só no papel, desconectada de quaisquer aplicações de natureza histórica, lógica, concreta ou quotidiana.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) já enfatizam a importância dos recursos tecnológicos para a educação, visando a melhoria da qualidade do ensino aprendizagem. Afirmam que a informática na educação "permite criar ambientes de aprendizagem que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender" (p. 147).

Conforme Santos (2007), apesar do fato das tecnologias digitais se mostrarem influenciadores no âmbito educacional, sua utilização nas aulas de matemática não corresponde ao que se espera, sendo assim, a escola se ver diante da necessidade de redescobrir o seu papel social como unidade significativa no processo de crescimento e desenvolvimento da concepção de mundo dos indivíduos que estão integrados a mesma.

Não se pode negar que o sistema educacional brasileiro se encontra em meio a uma expressiva crise, no entanto, também não se pode deixar de considerar que, em meio a todo esse panorama de crise e problemas que tanto vem sendo observado no âmbito do sistema educacional do Brasil, o avanço das tecnologias da informação constitui um fato visível.

As escolas públicas atuais têm sido colocadas em estudo, sendo analisadas quanto a sua atuação frente às perspectivas e projetos de integração ao avanço tecnológico educacional, não se pode negar que elas têm de acordo com suas possibilidades, elas têm se integrado às inovações e transformações que o sistema educacional tem passado.

2 USO DAS NOVAS TÉCNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

O fato de que o avanço tecnológico hoje é uma realidade presente no contexto do sistema educacional brasileiro, isso não se pode negar, no entanto, saber se o público alvo, ou seja, professores, alunos e demais membros da comunidade escolar estão preparados para se fazerem elementos desta esfera de avanço é uma outra questão que merece uma avaliação aprimorada.

A utilização das novas tecnologias, principalmente as de comunicação e de interação (TCI), vem causando a reestruturação do método tradicional de ensino, denominado por

(Freire, 1987) de “concepção bancária da educação”. Nesta concepção, o professor é a figura central do aprendizado, cabendo ao aluno assimilar, de forma passiva e sem considerar o seu ritmo de aprendizagem, todo o conteúdo exposto no quadro-negro.

A realidade com que a educação pública brasileira se mostra inserida, na atualidade, denuncia a efetivação de certa falta de condições e um despreparo seja por parte do educador como do educando para se inserir no âmbito de uma política educacional em que o avanço tecnológico constitui um fator evidente, ou seja, as transformações que a esfera tecnológica tem processado, nos últimos tempos, deixam os educadores e educandos brasileiros numa certa desvantagem, visto que, a velocidade com que se processam as mudanças é bem maior do que a capacidade que o indivíduo dispõe para acompanhá-las.

A falta de preparação de muitos profissionais da área da educação, entre estes se destaca o professor não estão preparados para atuarem como representantes das inovações tecnológicas, uma vez que, em grande maioria não sabem fazer uso desses recursos para proveito em suas aulas. Neste sentido pergunta-se: como fazer para que o professor possa receber uma preparação para colocar em prática as habilidades que os recursos tecnológicos precisam? Como fazer uso dos recursos tecnológicos no ensino da matemática, mais precisamente o uso da geogebra?

3 USO DA GEOMETRIA DINÂMICA E INTERATIVA (GDI)

A proposta do uso de softwares de geometria dinâmica, no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica. A habilidade de visualizar pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo. Segundo Montenegro (2005), no ensino fundamental e médio, os alunos devem trabalhar com modelos sólidos e com material visual.

D´Ambrosio (1986) chama atenção para o fato de que em muitas situações o aluno se mostra mais confortável com o uso de tecnologias como o uso do computador e softwares do que o próprio professor, visto que nos últimos tempos as crianças e jovens fazem uso dessa tecnologia em jogos e brincadeiras que são dispostos aos mesmos por meio da tecnologia.

Softwares educativos podem representar possibilidades de simulação deste material concretas e sólidas, já que proporcionam situações virtuais que adquirem aspectos com grande proximidade à realidade apresentando inclusive possibilidades de colaboração. Desta maneira, o presente artigo apresenta uma análise experimental do *software* desenvolvido para o estudo da Geometria e Desenho Geométrico, dando ênfase ao uso de software livre Geogebra numa aplicação prática em sala de aula.

4 O QUE É O GEOGEBRA ?

A avaliação do software Geogebra como ferramenta pscicopedagogica, que vamos chamar de Geometria Dinâmica e interativa (GDI) almeja uma nova metodologia para auxiliar a tecnologia já habitualmente utilizada (quadro Negro e papel), possibilitando que o docente inteire e tenha outra forma de ensino e um novo ambiente de caráter laboratorial, onde possibilitará na prática estudada. Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para criar se ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS.

O GeoGebra está rapidamente ganhando popularidade no ensino e aprendizagem da matemática em todo o mundo. Atualmente, o GeoGebra é traduzido para 58 idiomas, utilizado em 190 países e baixado por aproximadamente 300.000 usuários em cada mês. Esta utilização crescente obrigou o estabelecimento do Internacionais GeoGebra Insitute (GII), que serve como uma organização virtual para apoiar GeoGebra locais iniciativas e institutos.

5 USO DO GDI NA SALA DE AULA

A definição de Geometria Dinâmica e Interativa (GDI) é a implementação computacional da “geometria tradicional”, aquela usando as tecnologias régua, compasso e esquadro

(TRCE). O termo “Dinâmico” do nome pode ser mais bem entendido como oposição à estrutura “estática” das construções da geometria tradicional. E o termo “Interativo” é que após o aluno realizar uma construção, ele pode alterar as posições dos objetos iniciais e o programa redesenha a construção, preservando as propriedades originais.

Em função desta possibilidade de alterar objetos preservando-se a construção, podemos dizer que a GDI é uma geometria do tipo: uma construção por N testes, enquanto a tradicional TRCE é do tipo uma construção por um teste, desta forma torna um laboratório dentro do computador, onde possibilita, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes, o que seria praticamente impossível com a TRCE.

Um exemplo simples apresentado em sala, que pode ilustrar o “dinamismo” desta geometria é a construção de um triangulo retângulo. Para construir basta colocar os ter pontos no plano cartesiano. Constrói o triangulo ABC, sendo e o torna polígono, onde o próprio Geogebra colocará todos as medidas e nomes automaticamente, no nosso caso os pontos são A(1,5), B(1,1) e C(5,1) (figura 1:exemplo 1.1). Uma vez efetuada a construção podemos mover os pontos A ou B ou C pela área de desenho e o programa que implementa a GDI, automaticamente, redesenhará todos os objetos preservando suas propriedades.

No nosso exemplo se o discente for solicitado para mover o ponto A para outra coordenada (3,5) qual figura vai formar (figura 2: exemplo 1.2)? Como a definição de triangulo já foi mostrada pelo docente o aluno verá que os dois ângulos da base são iguais e poderá concluir que se trata de um triangulo isósceles (por definição: triangulo isósceles tem dois ângulos iguais da base e dois lados iguais, diferente da base). Caso o discente não consiga ainda saber qual figura ele pode observar o quadro algébrico do lado e verá as medidas dos ângulos e lados (figura 2 a:exemplo 1.3) e concluirá com certeza.

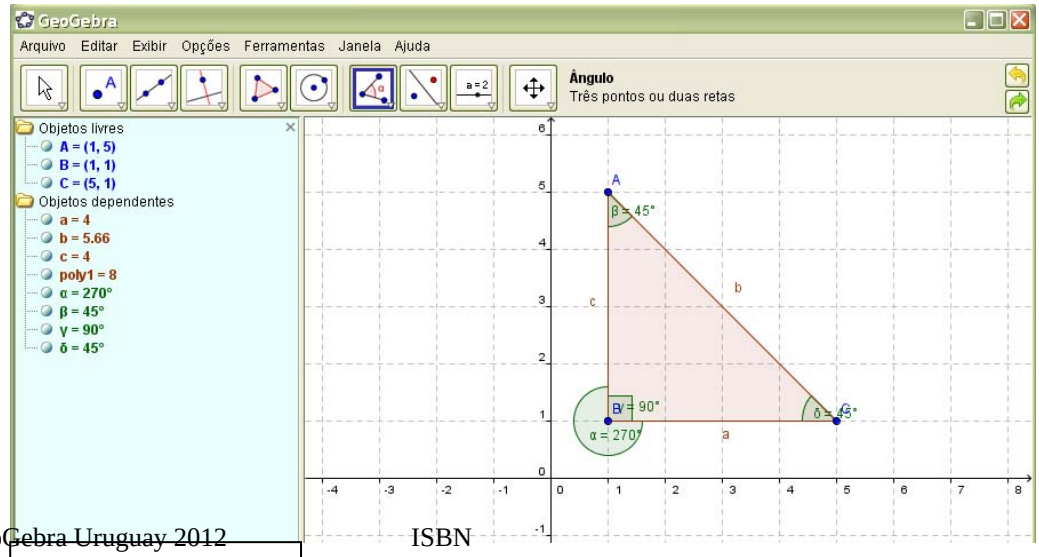


Figura 1: Exemplo

ISBN

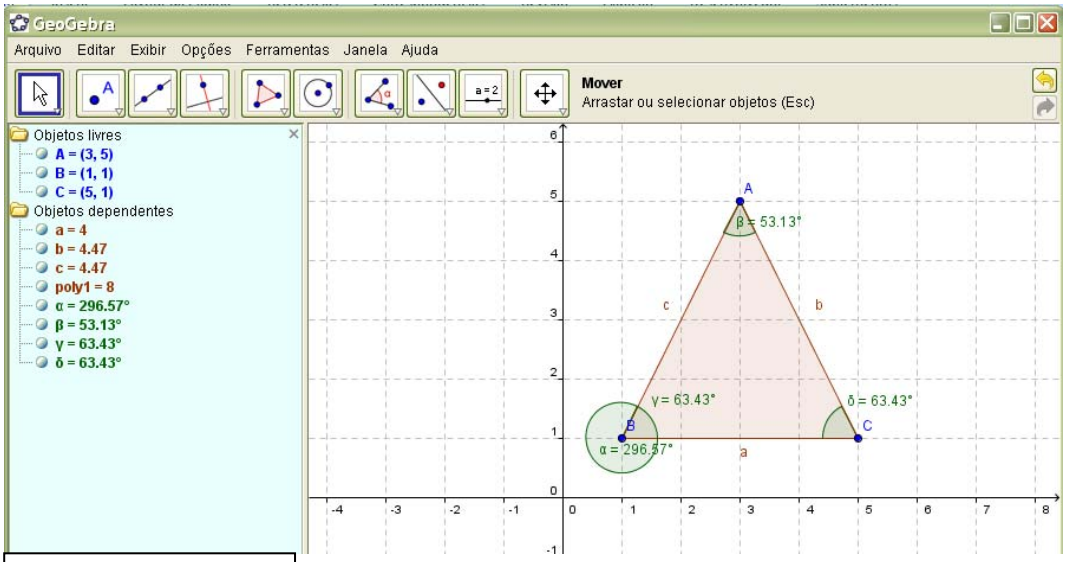


Figura 2: Exemplo

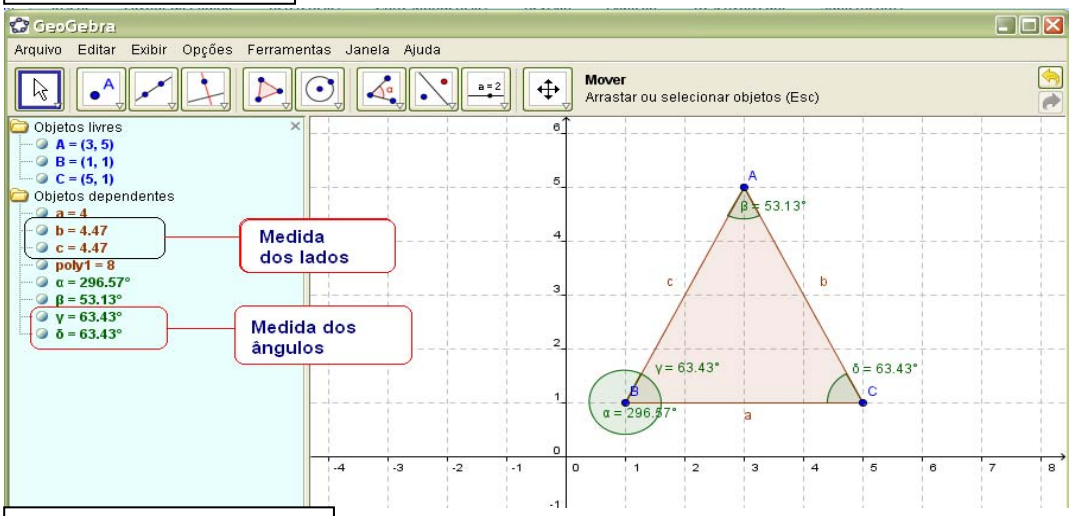


Figura 2a: Exemplo 1.3

6 BENEFICIO DO GEOGEBRA (COMO GDI)

De maneira geral, a utilização do software foi considerada pelos alunos como sendo de fácil compreensão e assimilação. Isso é corroborado pelo fato que os assuntos escolhidos são geralmente feitos com certa facilidade pelos alunos.

Segundo Gravina (1996) e Arcavi e Hadas (2000), o GDI evidencia uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos geométricos. Deste modo, se pode introduzir o conceito matemático dos

objetos a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa Geogebra, surgindo naturalmente daí o processo de questionamento, argumentação e dedução.

Foi questionado: Qual a vantagem de utilizar o software Geogebra em relação ao assunto escolhido e que fizessem uma comparação do que seria aplicado em sala de aula.

O Resultado foi uma surpresa agradável, pois a maioria dos alunos relatou a grande facilidade do programa, de sua usabilidade e eficiência, alguns acharam mais fácil de entender pelo software do que na sala de aula, pois não necessitaria de cálculos, lhe mostra uma resposta rápida e correta, o que facilita na criação e soluções através de poucos cliques do mouse.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Uso de softwares educacionais tem se tornado uma realidade nos últimos anos e se titulando como uma real importância para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. De maneira geral, a utilização do software foi considerada pelos alunos como sendo de fácil compreensão e assimilação. Isso é corroborado pelo fato que os assuntos escolhidos são geralmente feitos com certa facilidade pelos alunos.

A utilização de recursos tecnológicos no âmbito da educação brasileira, mais precisamente, no contexto da educação pública tem sido centro de atenção, no entanto, este vem se articulando em meio a um conjunto de dificuldades, uma vez que, as unidades de ensino público não se dispõem em sua grande maioria de profissionais qualificados para o bom desempenho de atividades que garanta o bom desempenho das funções.

Sem contar que as Escolas públicas não estão preparadas para se ter um bom desempenho em educação técnica, não possui profissionais técnicos para auxilio dos professores, livros didáticos e técnicos na área, bem como cursos de formação e capacitação dos professores e propostas que os recursos possuem.

O Software Geogebra é um programa de acesso livre, onde é permitido utilizar, copiar e distribuir o aplicativo para fins não comercias, podemos usar tanto no ambiente do WINDOWS (produzido pela microsoft) como nas distribuições LINUX. A utilização do Software Geogebra como recurso didático no ensino da geometria constitui um caminho que o professor pode seguir na perspectiva de chegar a uma maior satisfação em relação à

aprendizagem e, por conseguinte o uso dessa aprendizagem no contexto de sua vida. Bem como a recepção dos alunos nesta nova forma de aprendizagem num contexto atual e moderno.

A questão ora referida motivou o desenvolvimento da pesquisa de campo, onde se expõe considerações sobre como se desenvolve o ressaltado programa de computador no seio da escola de ensino médio e seu impacto no contexto. Certamente, há muita coisa a entender, aprender a fazer e refazer nesta área tão vasta e delicada.

REFERÊNCIAS

BRASIL. MEC. SEMTEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 1998.

D´AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2 ed., Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

_____. **Educação Matemática: da teoria à Prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996.

FREIRE, P. (1987). **Pedagogia do Oprimido**, Volume 21. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. *A* **Aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados.** IV Congresso RIBIE. Brasília, 1998.

MONTENEGRO, Gildo A.. **Inteligência visual e 3-D**. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

SANTOS, V.P. **Interdisciplinaridade na sala de aula**. São Paulo: Loyola, 2007.

COLETANÊA LABGG PARA ESCOLAS E UNIVERSIDADES: NF2.601 - POSSIBILIDADES DE ESTUDO PARA O POLÍGONO TRIÂNGULO

Eimard Gomes Antunes do Nascimento
eimard@yahoo.com
Mestre em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará (UFC)-Brasil.

Modalidade: Comunicação

Nível educativo: Formação de Professores

Palavras-chaves: Tecnologias. Informática. Educação Matemática e Tecnológica. LABGG.

RESUMO

O uso de computadores nas escolas e universidades tem se mostrado muito importante. Usado como recurso didático, o computador torna-se cada vez mais presente no ensino aprendizagem. Assim, o presente artigo faz parte de uma coletânea de assuntos matemáticos em forma de módulos aplicados no Laboratório GeoGebra (LABGG)[1], segundo Nascimento (2012) é o produto designado pela análise e aplicação do software livre de geometria dinâmica GeoGebra sob uma abordagem construtivista no processo de possibilidades de estudo e aprendizagem da matemática e estatística. Ressalta-se, porém, que o trabalho dinâmico de estudo e pesquisa provoca a manifestação e a participação dos professores e coordenadores, sensibilizando-os para o uso adequado do computador como ferramenta de mediação e de auxílio no processo de ensino e aprendizagem. O estudo do artigo denominado módulo NF2.601 trata-se de uma avaliação de possibilidades de estudo para o polígono triangulo, usando e explorando os recursos do LABGG, sendo por escrita (comandos) ou/e graficamente.

1 INTRODUÇÃO

O uso de recursos tecnológicos digitais ou tecnologias digitais interativas (TDI) no contexto escolar constitui uma linha de trabalho que necessita se fortalecer na medida

[1] Termo criado por Nascimento, Eimard G. A., no artigo: proposta de uma nova aplicação como instrumento psicopedagogica na escola: o LABGG (laboratório geogebra), Registro em cartório

em que há uma considerável distância entre os avanços tecnológicos na produção de softwares educacionais livres ou proprietários e a aceitação, compreensão e utilização desses recursos nas aulas pelos professores.

Santos (2007) afirma que apesar das tecnologias digitais se mostrarem influenciadoras às mudanças e transformações em âmbito educacional, suas utilizações nas aulas não correspondem ao que se espera. Em face da assertiva, a escola se ver diante da necessidade de redescobrir o seu papel social e pedagógico como unidade significativa no processo de crescimento e desenvolvimento da concepção de competência para a formação dos indivíduos que estão integrados a si. Omitir que o sistema educacional brasileiro se encontra em meio a uma expressiva crise torna-se impossível em face dos indicadores de rendimento escolar expresso pelo MEC/Inep (BRASIL, 2010). Convém ressaltar que em meio ao panorama de crise e problemas por que passa o sistema educacional brasileiro existe o avanço das tecnologias da informação. O crescimento das tecnologias educativas se constitui um fato visível.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN para o Ensino Fundamental e Médio expressam a importância dos recursos tecnológicos para a educação com vistas à melhoria da qualidade do ensino aprendizagem. Destacam que a informática na educação "permite criar ambientes de aprendizagem que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender" (BRASIL, 1998, p. 147).

O *link* entre a teoria e a prática quando implantado de forma agradável e estimulante causa ao aluno o senso de curiosidade e, por via de consequência, o senso de pesquisa. Segundo Nascimento (2012), as ideias básicas do pesquisador Dewey (2007) sobre a educação estão centradas no desenvolvimento da capacidade de raciocínio e espírito crítico do aluno. Dewey defendia a democracia e a liberdade de pensamento como instrumentos para a maturação emocional e intelectual dos alunos. Afirma, outrossim, que o processo educativo consiste na adequação e interação do aluno com o programa da escola e das disciplinas, pois a concepção das relações entre um e o outro, tende a tornar a aprendizagem fácil, livre e completa.

As ideias de Dewey apregoam o princípio de que os alunos aprendem melhor realizando tarefas práticas associadas aos conteúdos estudados, fato que causa grandes estímulos e maior aprimoramento e memorização em vez de decorá-los. (NASCIMENTO, 2012).

Gravina (1998); Arcavi e Hadas (2000) explicam que a Geometria Dinâmica (GD) evidencia uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos geométricos. Deste modo, se pode introduzir o conceito matemático dos objetos a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa GeoGebra, surgindo daí o processo de questionamento, argumentação e dedução.

Desta forma, criou-se esta coletânea denominada possibilidades para o estudo em matemática e estatística para nortear o professor na aplicação prática dos assuntos abordados. O *link* da teoria e a prática tende ser de uma forma agradável e estimulante onde causa no aluno o censo de curiosidade e consequentemente o censo de pesquisa. Segundo Nascimento (2012), as ideias básicas do pesquisador Dewey sobre a educação estão centradas no desenvolvimento da capacidade de raciocínio e espírito crítico do aluno. Dewey defendia a democracia e a liberdade de pensamento como instrumentos para a maturação emocional e intelectual dos alunos. E mais, o processo educativo consiste na adequação e interação do aluno com o programa da escola e das disciplinas, pois a concepção das relações entre um e o outro, tende a tornar fácil, livre e completa.

A Coletânea do LABGG funcionará como ferramenta psicopedagógico junto com o *software* GeoGebra, aqui nominada de Geometria Dinâmica e Interativa (GDI), para auxiliar as tecnologias, habitualmente utilizadas, tais como: quadro de demonstração da matéria, aulas expositivas e papel. Possibilitará ao docente interagir e ter outra forma de ensino e um ambiente de caráter laboratorial, onde possibilitará a prática pretendida.

2 APLICAÇÃO LABORATORIAL: POLÍGONO TRIÂNGULO

A proposta deste módulo denominado de NF2.601 (significa o primeiro experimento do currículo do sexto ano do ensino fundamental dois) é avaliar as possibilidades de estudo para o polígono triângulo.

Do latim - *triangulu*, é um polígono de três lados e três ângulos.

Os três ângulos de um triângulo são designados por três letras maiúsculas A, B e C e os lados opostos a eles, pelas mesmas três letras, minúsculas a, b e c. Vejamos as etapas no LABGG:

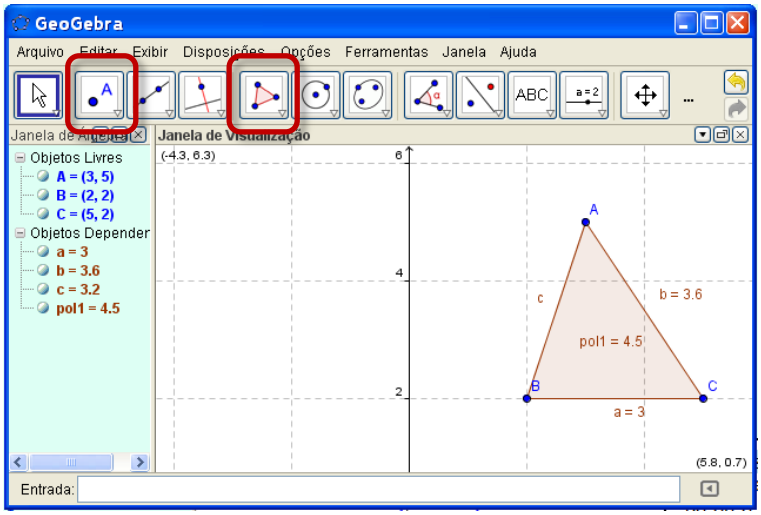


Figura 1- Mostrando a definição de Triângulo.

Os Vértices são representados tanto na área algébrica (janela de álgebra - JAL), podendo ser digitado no campo Entrada de comando (teclado), ou escolhendo o botão (mouse), e clicando na janela de Visualização. No LABGG segue-se as mesmas normas matemáticas, isto é, os vértices são codificados por letras maiúsculas, as retas por letras minúsculas e os ângulos por letras do alfabeto grego.

Podemos mostrar o valor de cada lado ou não (figura 1 e 2), como mostrar os ângulos internos e externos (figura 2), o nome para área do polígono é a palavra pol1 que se pode renomear para o nome "Área" (figura 2).

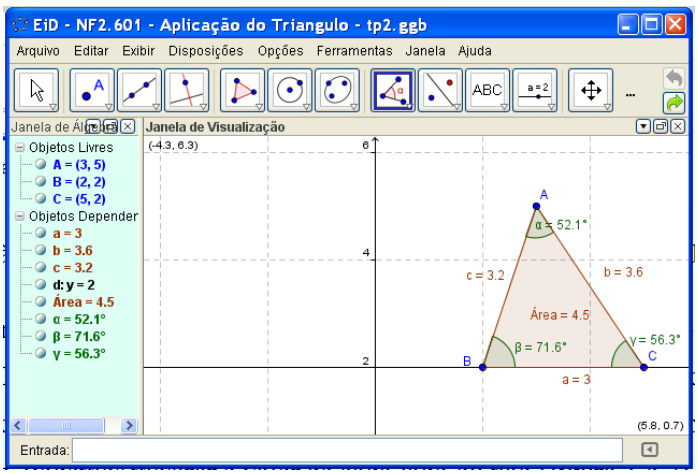


Figura 2- Mostrando os elementos do triangulo.

Assim o LABGG tem mais de uma possibilidade para inserir as variáveis, em que o usuário vai aprendendo e posteriormente escolherá a melhor opção de utilização. Observe que na figura 2 já é mostrado na JAL as coordenadas dos vértices (plano cartesiano), os valores dos lados, dos ângulos internos e da área do polígono.

Observa-se que temos o triangulo com seus elementos na janela de visualização (Geometria) e JAL temos a descrição algébrica destes elementos.

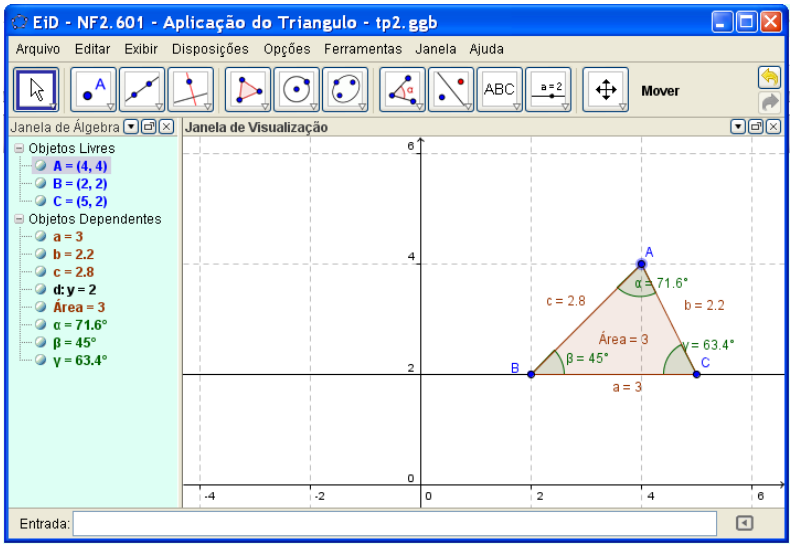


Figura 3- Mudando de posição o vértice A (Mostrando os elementos do triangulo).

Outro ponto de estudo do triangulo é a sua classificação:

1- Acutângulo - é o triângulo que tem todos os ângulos agudos.
2- Equiângulo - é o triângulo que possui os seus três ângulos congruentes. Um triângulo equiângulo também é um triângulo equilátero.
3- Obtusângulo - é o triângulo que possui um ângulo obtuso.
4- Retângulo é o triângulo que possui um ângulo reto.

São nomes que o aluno não compreenderá bem quando for ler. Com a visualização no LABGG começará a entender esta classificação, e movimentando um dos vértices conseguirá obter tal visualização e assim apropriar o conceito.

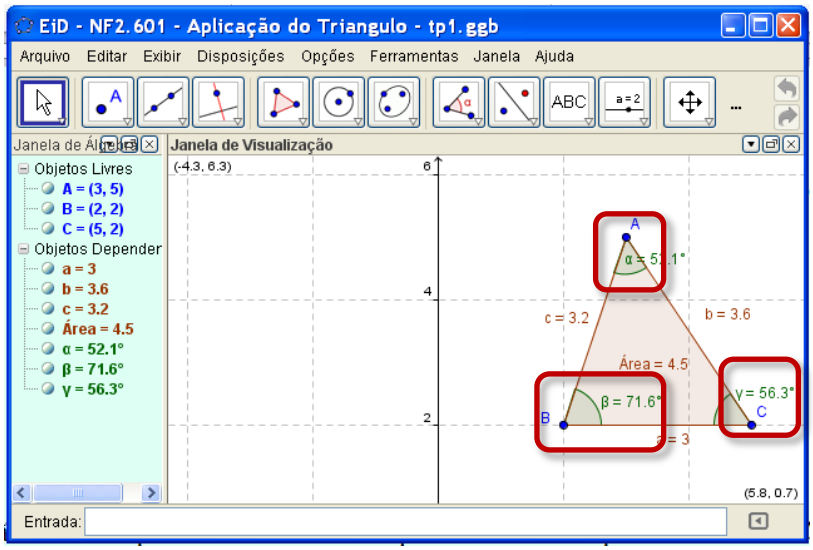


Figura 4- Triangulo Acutângulo (os ângulos são menores do que 90º)

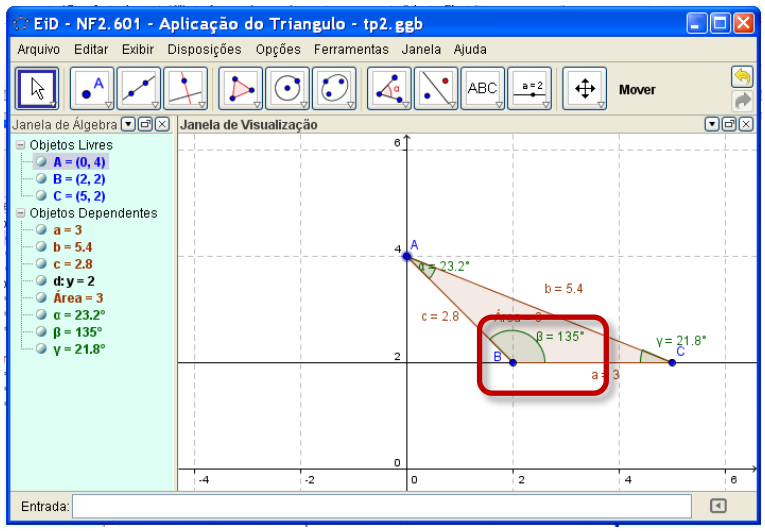


Figura 5 - Triangulo Obtusângulo (existe um ângulo maior do que 90º).

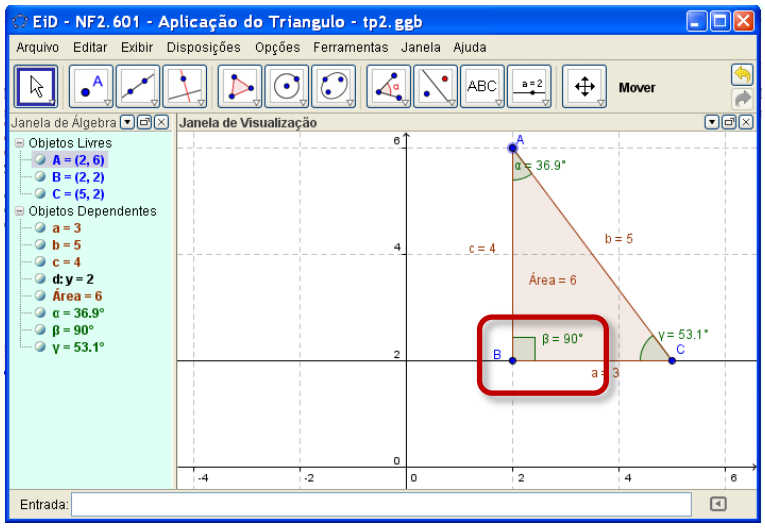


Figura 6 - Triângulo Retângulo (existe um ângulo igual a 90º).

Outra possibilidade para determinar variáveis, funções e fórmulas é usar o campo de entrada, onde se pode digitar fórmulas ou funções (estudos avançados).

A vantagem do LABGG é que a qualquer momento voce poderá alterar as formulas, funções ou variaveis, bastando clicar nos objetos que deseja mudar. Os comandos e funções são níveis mais avançados, onde o usuário estudurá e aplicará posteriormente.

Veja que na JAL o professor encontrará vários objetos (variáveis) que poderá aplicar para ensinar este conteúdo de uma forma agradável e estimulante.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em face do exposto, têm-se a convicção que o LABGG se fundamenta na perspectiva didática proativa e interativa, vivenciada em duas representações diferentes do mesmo objeto que interagem entre si: no caso, a representação geométrica e sua representação algébrica. A utilização do *software* como recurso didático no ensino da Matemática se constitui um caminho para o professor vivenciar com os alunos o processo ensino-aprendizagem a satisfação, motivação, competência e habilidade em relação à aprendizagem preconizada pelo Plano de Desenvolvimento da Educação do Brasil, com vistas ao desenvolvimento científico, tecnológico, social e humanístico da Nação e com qualidade de vida sustentável.

A aplicação do LABGG no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange a manipulação geométrica. A habilidade de manipular pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo.

A coletânea tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica. A utilização como recurso didático no ensino da geometria constitui um caminho que o professor pode seguir na perspectiva de chegar a uma maior satisfação em relação à aprendizagem de seus alunos e, por conseguinte, o uso dessa aprendizagem no contexto de sua vida.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. & N. HADAS (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers ofr Mathematical Learning 5*(1), 25–45.

BRASIL. MEC. SEMTEC. (1998) *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* Brasília.

_____. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.* Brasília.

D´AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática.* 2 ed., Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

DEWEY, J. (2007) *Democracia e educação*: *capítulos essenciais*. São Paulo: Ática.

FREIRE, P. (1987). *Pedagogia do Oprimido,* Volume 21. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. (1998) *A Aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados.* IV Congresso RIBIE. Brasília.

MONTENEGRO, Gildo A. (2005) *Inteligência visual e 3-D.* São Paulo: Edgard Blücher.

NASCIMENTO, Eimard G. A. do. (2012) *Avaliação do software GeoGebra como instrumento psicopedagógico de ensino em geometria.* 234f. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza.

_____. (2012) *Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola*. Em: XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN 1808-8457, 2012, XII Encontro de iniciação à docência, ISSN 2175-5396, 2012 e IV Encontro de Práticas Docentes, ISSN 2179-4332, Unifor, Fortaleza-CE.

NASCIMENTO, Eimard. G. A., SILVA, A. B. (2012) *Avaliando as ideias de John Dewey introduzidas na educação brasileira* Em: I Encontro Nacional do Núcleo de História e Memória da Educação (ENHIME) e XI Encontro Cearense de História da Educação (ECHE), 2012, Fortaleza-CE. **História da educação: real e virtual em debate**. Fortaleza-CE: Imprece, ISBN: 978-85-7282-509-2, p.633 – 646.

SANTOS, V.P. (2007) *Interdisciplinaridade na sala de aula.* São Paulo: Loyola.

COLETANÊA LABGG PARA ESCOLAS E UNIVERSIDADES: NF2.901 - POSSIBILIDADES DE ESTUDO PARA A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Eimard Gomes Antunes do Nascimento
eimard@yahoo.com
Mestre em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará (UFC)-Brasil.

Modalidade: Comunicação

Nível educativo: Formação de Professores

Palavras-chaves: Tecnologias. Informática. Educação Matemática e Tecnológica. LABGG.

RESUMO

O uso de computadores nas escolas e universidades tem se mostrado muito importante. Usado como recurso didático, o computador torna-se cada vez mais presente no ensino aprendizagem. Assim, o presente artigo faz parte de uma coletânea de assuntos matemáticos em forma de módulos aplicados no Laboratório GeoGebra (LABGG)[1], segundo Nascimento (2012a, 2012b) é o produto designado pela análise e aplicação do software livre de geometria dinâmica GeoGebra sob uma abordagem construtivista no processo de possibilidades de estudo e aprendizagem da matemática e estatística. Ressalta-se, porém, que o trabalho dinâmico de estudo e pesquisa provoca a manifestação e a participação dos professores e coordenadores, sensibilizando-os para o uso adequado do computador como ferramenta de mediação e de auxílio no processo de ensino e aprendizagem. O estudo do artigo denominado módulo NF2.901 trata-se de uma avaliação de possibilidades de estudo para a função de segundo grau ou função quadrática, usando e explorando os recursos do LABGG, sendo por escrita (comandos) ou/e graficamente.

1 INTRODUÇÃO

O uso de recursos tecnológicos digitais ou tecnologias digitais interativas (TDI) no

[1] Termo criado por Nascimento, Eimard G. A., no artigo: proposta de uma nova aplicação como instrumento psicopedagogica na escola: o LABGG (laboratório geogebra), Conferência Latinoamericana de GeoGebra, Uruguay, 2012.

contexto escolar constitui uma linha de trabalho que necessita se fortalecer na medida em que há uma considerável distância entre os avanços tecnológicos na produção de softwares educacionais livres ou proprietários e a aceitação, compreensão e utilização desses recursos nas aulas pelos professores.

Santos (2007) afirma que apesar das tecnologias digitais se mostrarem influenciadoras às mudanças e transformações em âmbito educacional, suas utilizações nas aulas não correspondem ao que se espera. Em face da assertiva, a escola se ver diante da necessidade de redescobrir o seu papel social e pedagógico como unidade significativa no processo de crescimento e desenvolvimento da concepção de competência para a formação dos indivíduos que estão integrados a si. Omitir que o sistema educacional brasileiro se encontra em meio a uma expressiva crise torna-se impossível em face dos indicadores de rendimento escolar expresso pelo MEC/Inep (BRASIL, 2010). Convém ressaltar que em meio ao panorama de crise e problemas por que passa o sistema educacional brasileiro existe o avanço das tecnologias da informação. O crescimento das tecnologias educativas se constitui um fato visível.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN para o Ensino Fundamental e Médio expressam a importância dos recursos tecnológicos para a educação com vistas à melhoria da qualidade do ensino aprendizagem. Destacam que a informática na educação "permite criar ambientes de aprendizagem que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender" (BRASIL, 1998, p. 147).

O *link* entre a teoria e a prática quando implantado de forma agradável e estimulante causa ao aluno o senso de curiosidade e, por via de consequência, o senso de pesquisa. Segundo Nascimento e Silva (2012), as ideias básicas do pesquisador Dewey (2007) sobre a educação estão centradas no desenvolvimento da capacidade de raciocínio e espírito crítico do aluno. Dewey defendia a democracia e a liberdade de pensamento como instrumentos para a maturação emocional e intelectual dos alunos. Afirma, outrossim, que o processo educativo consiste na adequação e interação do aluno com o programa da escola e das disciplinas, pois a concepção das relações entre um e o outro, tende a tornar a aprendizagem fácil, livre e completa.

As ideias de Dewey apregoam o princípio de que os alunos aprendem melhor realizando tarefas práticas associadas aos conteúdos estudados, fato que causa grandes estímulos e maior aprimoramento e memorização em vez de decorá-los. (NASCIMENTO, 2012a, 2012b).

Gravina (1998); Arcavi e Hadas (2000) explicam que a Geometria Dinâmica (GD) evidencia uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos geométricos. Deste modo, se pode introduzir o conceito matemático dos objetos a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa GeoGebra, surgindo daí o processo de questionamento, argumentação e dedução.

Desta forma, criou-se esta coletânea denominada possibilidades para o estudo em matemática e estatística para nortear o professor na aplicação prática dos assuntos abordados. O *link* da teoria e a prática tende ser de uma forma agradável e estimulante onde causa no aluno o censo de curiosidade e consequentemente o censo de pesquisa.

A Coletânea do LABGG funcionará como ferramenta pscicopedagógica junto com o *software* GeoGebra, aqui nominada de Geometria Dinâmica e Interativa (GDI), para auxiliar as tecnologias, habitualmente utilizadas, tais como: quadro de demonstração da matéria, aulas expositivas e papel. Possibilitará ao docente interagir e ter outra forma de ensino e um ambiente de caráter laboratorial, onde possibilitará a prática pretendida.

2 APLICAÇÃO LABORATORIAL: FUNÇÃO QUADRÁTICA

A proposta deste módulo denominado de NF2.901 (onde significa o primeiro experimento do currículo do nono ano do ensino fundamental dois) é avaliar as possibilidades de estudo para a função quadrática.

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais (chamadas de coeficientes) e $a \neq 0$. O gráfico é uma curva chamada parábola. Vejamos um exemplo: $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde a = 3, b = - 4 e c = 1, vejamos na prática:

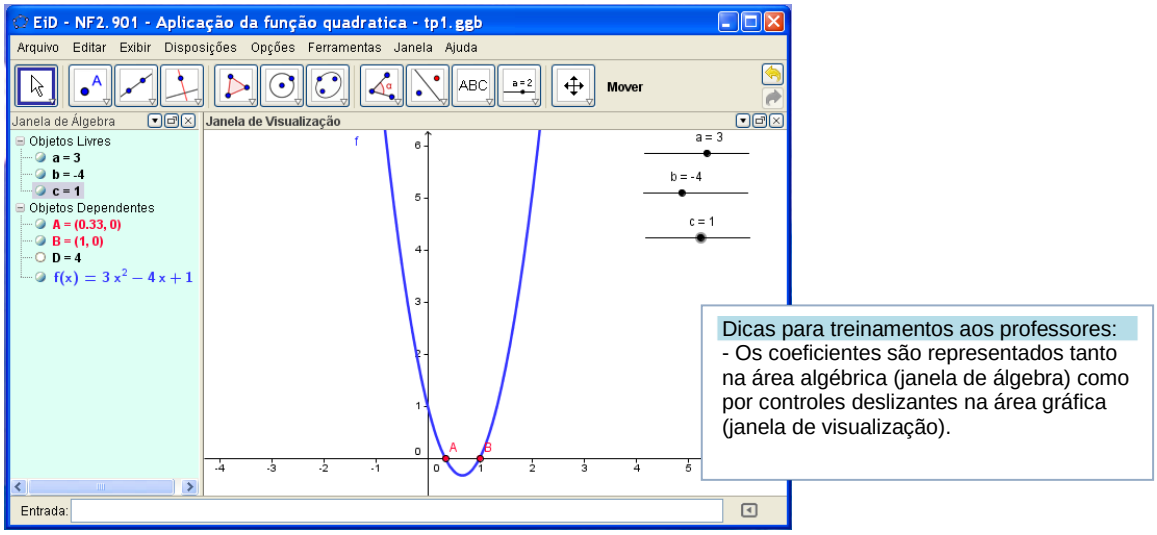


Figura 1- Mostrando a função quadrática $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

Os coeficientes são representados tanto na área algébrica (janela de álgebra - JAL), podendo ser digitado no campo Entrada de comando (teclado), como escolhendo o botão (mouse), como por controles deslizantes na área gráfica (janela de visualização - JVI) . Assim o LABGG tem mais de uma possibilidade para inserir as variáveis, em que o usuário vai aprendendo e posteriormente escolherá a melhor opção de utilização. Observe que na tela 1 já é mostrado na JAL os coeficientes a, b e c. veja que temos os pontos A e B que são as raízes e D que é denominado "Delta" bem como a função desejada. Caso queira mudar a função, por exemplo, $f(x) = x^2 - 1$, onde a = 1, b = 0 e c = -1. Ficará desta forma:

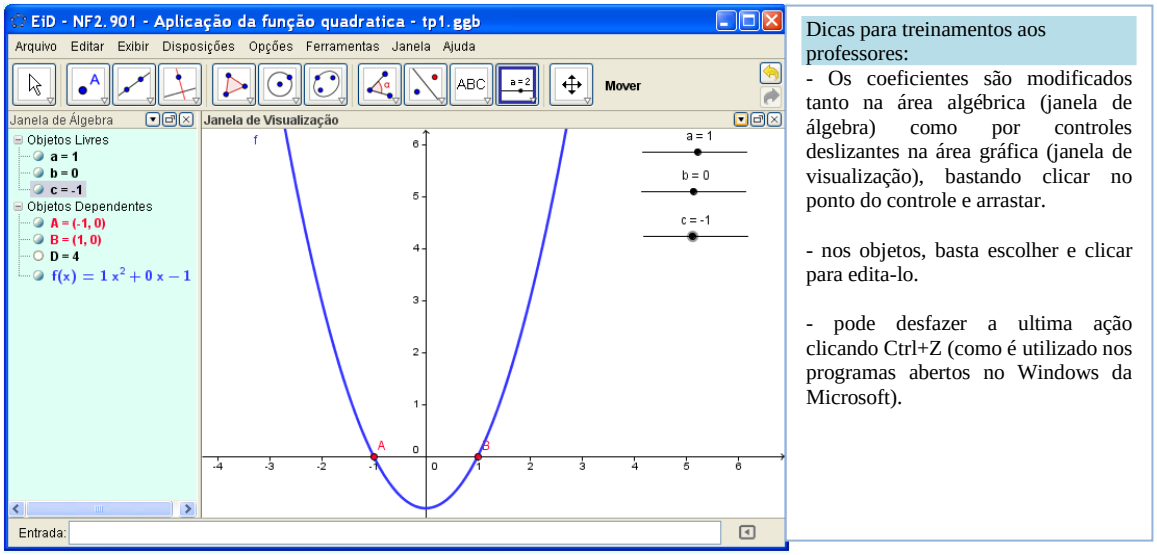


Figura 2- Mostrando a função quadrática $f(x) = x^2 - 1$

Outra possibilidade para determinar variáveis, funções e fórmulas é usar o campo de entrada, onde se pode digitar fórmulas ou funções. Na nossa aplicação, podemos descobrir

as raízes da função, que para encontrar usamos o descriminante chamado Delta (Δ) no nosso exemplo usamos a letra D que é igual a 4 (figura 2), onde a fórmula é $D = b^2 - 4ac$. No LABGG podemos digitar a fórmula no campo Entrada D=b^2-4*a*c (^ = expoente de b, * = multiplicação) ou usar a função que já está armazenada no LABGG chamada Raiz[f]. Assim mostrará os pontos A e B (figura 1 e 2), vejamos as 2 formas:

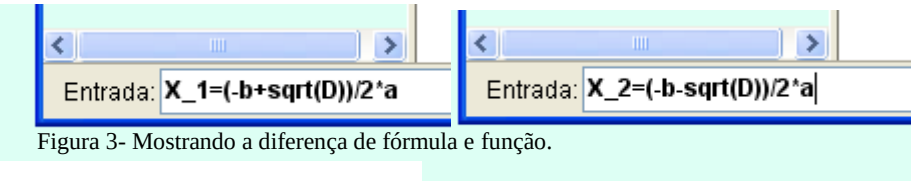


Figura 3- Mostrando a diferença de fórmula e função.

A vantagem do LABGG é que a qualquer momento voce poderá alterar as formulas, funções ou variaveis, bastando clicar nos objetos que deseja mudar. Os comandos e funções são níveis mais avançados, onde o usuário estudará e aplicará posteriormente.

Continuando nossa aplicação, podemos saber tambem pelo campo entrada as fórmulas das raizes da função que chamamos de $X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, no LABGG será da seguinte forma:

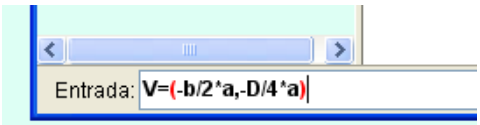


Figura 4- Mostrando a digitação das fórmulas X_1 e X_2.

E podemos ainda mais, encontrar outro ponto trivial, que é o vértice da prabola, que é determinado pelo ponto V(Vx,Vy), onde a fórmula para Vx = (-b/2a) e Vy = (-Δ/4a). vejamos no LABGG:

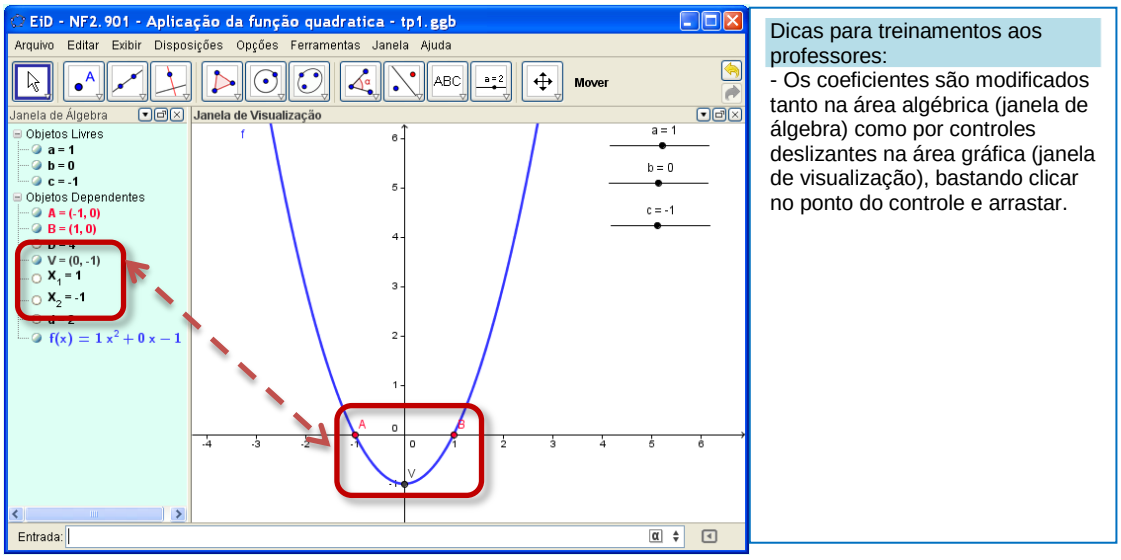


Figura 5- Mostrando o vértice da função.

Assim, aparecerá a coordenada do ponto V = (0,1) na área de álgebra e o ponto V na área de visualização. Pode-se também estudar as coordenadas Vx e Vy separadamente. Bem como traçar retas pontilhas passando pelo vértice, onde o aluno visualiza melhor.

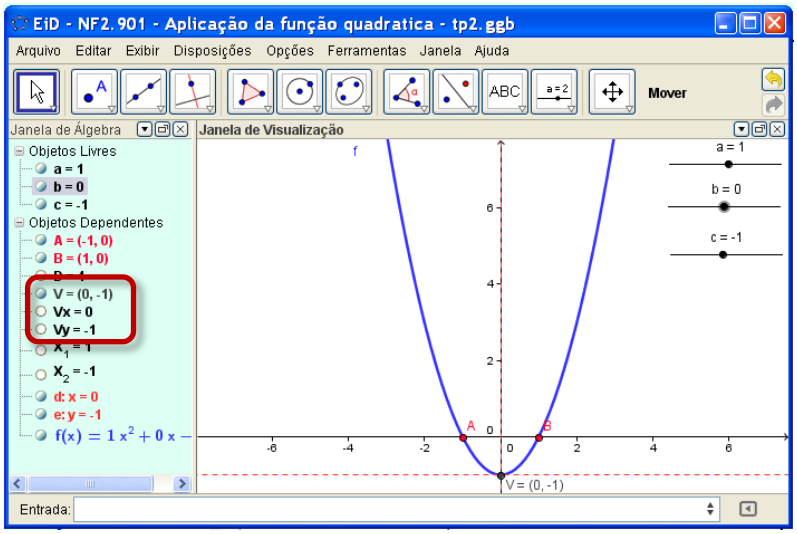


Figura 6- Mostrando o vértice da função e sua coordenada.

Se o professor, caso queira, pode incrementar mais o estudo, por exemplo, quando estudamos pelos livros o descriminante Delta, usa-se o símbolo Δ (do alfabeto grego), no LABGG você pode mudar também.

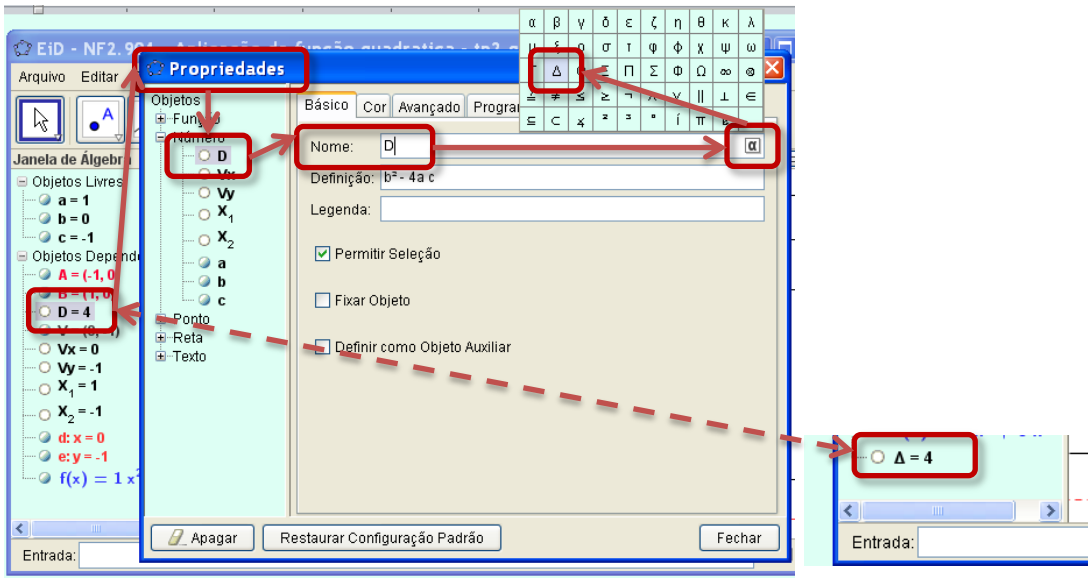


Figura 7- Mostrando como renomear a Letra D (Delta) por Δ.

Veja, que na JAL o professor encontrará vários objetos (variáveis) que poderá aplicar para ensinar este conteúdo de uma forma agradável e estimulante.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em face do exposto, têm-se a convicção que o LABGG se fundamenta na perspectiva didática proativa e interativa, vivenciada em duas representações diferentes do mesmo objeto que interagem entre si: no caso, a representação geométrica e sua representação algébrica. A utilização do *software* como recurso didático no ensino da Matemática se constitui um caminho para o professor vivenciar com os alunos o processo ensino-aprendizagem a satisfação, motivação, competência e habilidade em relação à aprendizagem preconizada pelo Plano de Desenvolvimento da Educação do Brasil, com vistas ao desenvolvimento científico, tecnológico, social e humanístico da Nação e com qualidade de vida sustentável.

A aplicação do LABGG no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange a manipulação geométrica. A habilidade de manipular pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo.

A coletânea tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica. A utilização como recurso didático no ensino da geometria constitui um caminho que o professor pode seguir na perspectiva de chegar a uma maior satisfação em relação à aprendizagem de seus alunos e, por conseguinte, o uso dessa aprendizagem no contexto de sua vida.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. & N. HADAS (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 5*(1), 25–45.

BRASIL. MEC. SEMTEC. (1998) *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* Brasília.

_____. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental*. Brasília,.

D´AMBROSIO, Ubiratan. (1986) *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. 2 ed., Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas.

DEWEY, J. (2007) *Democracia e educação*: *capítulos essenciais*. São Paulo, Ática.

FREIRE, P. (1987). *Pedagogia do Oprimido*, Volume 21. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. (1998) *A Aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados.* IV Congresso RIBIE. Brasília.

MONTENEGRO, Gildo A. (2005) *Inteligência visual e 3-D*. São Paulo: Edgard Blücher.

NASCIMENTO, Eimard G. A. do. (2012a) *Avaliação do software GeoGebra como instrumento psicopedagógico de ensino em geometria.* 234f. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza.

_____. (2012b) *Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola.* Em: XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN 1808-8457, 2012, XII Encontro de iniciação à docência, ISSN 2175-5396, 2012 e IV Encontro de Práticas Docentes, ISSN 2179-4332, Unifor, Fortaleza-CE.

NASCIMENTO, Eimard. G. A., SILVA, A. B. (2012) *Avaliando as ideias de John Dewey introduzidas na educação brasileira* Em: I Encontro Nacional do Núcleo de História e Memória da Educação (ENHIME) e XI Encontro Cearense de História da Educação (ECHE), 2012, Fortaleza-CE. *História da educação: real e virtual em debate*. Fortaleza-CE: Imprece, ISBN: 978-85-7282-509-2, p.633 – 646.

SANTOS, V.P. (2007) *Interdisciplinaridade na sala de aula.* São Paulo: Loyola.

COMPARANDO ÁREAS - LA EQUIVALENCIA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Daniela Pagés
danielapages@gmail.com
Consejo de Formación en Educación - Uruguay

Resumen
Se presenta una secuencia de clase pensada para el curso Matemática I de primer año de magisterio, referida a la equivalencia de figuras como concepto clave para el cálculo de áreas. En la misma, se plantea que los estudiantes manipulen ciertas figuras, con ayuda del software, y de forma libre, para obtener otras cuyas áreas tengan alguna relación planteada. Asimismo, que utilicen esto para deducir expresiones para el área de algunas figuras. Se utiliza la potencia de GeoGebra para la manipulación dinámica de parte de los estudiantes, en busca de conjeturas y conclusiones, y que la propia actividad sugiera una forma de demostración de la conjetura. También se aprovecha la posibilidad de poner en escena, en este caso la equivalencia, en forma de animación.

La secuencia de actividades que se presenta se realizó como trabajo final en el curso a distancia "GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas. Profundización". Fue diseñada para el curso de Matemática I del primer año de la carrera de magisterio que se realiza en Uruguay, de acuerdo al Plan 2008. En el programa de esta asignatura se incluye el estudio del área de los polígonos, y el particular la deducción de las fórmulas de áreas.

La secuencia consta de tres actividades, realizadas en forma de applet en GeoGebra. La primera de ellas plantea un trabajo que pretende ser geométrico, procurando introducir la noción de área como magnitud, utilizando transformaciones de una figura, para obtener la otra, sin recurrir a las fórmulas, utilizando la congruencia estudiada antes. En la segunda actividad, se pretende deducir las fórmulas para el cálculo del área de un triángulo y un paralelogramo, apoyados en las transformaciones anteriores, y tomando como axioma la fórmula para calcular el área de un rectángulo. Se intenta que los estudiantes logren comprender la idea de área a través de la experiencia de invariancia de la misma por transformaciones, para luego llegar a las fórmulas para las diferentes figuras.

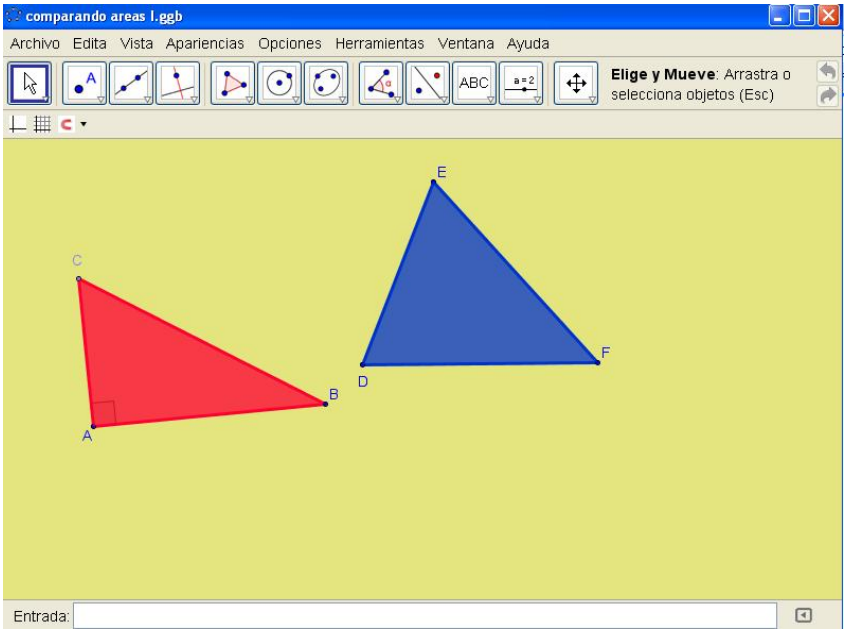
"Los conocimientos implicados en el reconocimiento de la equivalencia de superficies son muchos e importantes, de ahí que su construcción deba constituir un objeto de enseñanza. Por otra parte, el trabajo con la noción de equivalencia y la constitución de cantidades de superficie, es una manera de asegurar una mejor apreciación de la magnitud, así como su mejor decantación del perímetro… Cuando los alumnos

identifican una superficie lo hacen en primer lugar a través de la forma, de ahí que cualquier cambio de esta, lleve aparejada la idea de que se ha obtenido otra superficie diferente que no guarda con la primera relación alguna, por lo que si el cambio de forma ha sido relevante, el alumno niega la conservación de la superficie." (Chamorro, M, 2001).

Las actividades:

Comparando áreas I: Transforma cada triángulo dado en un rectángulo de igual área que la del triángulo.

(Se muestra la vista que aparece en el archivo de GeoGebra en el applet).

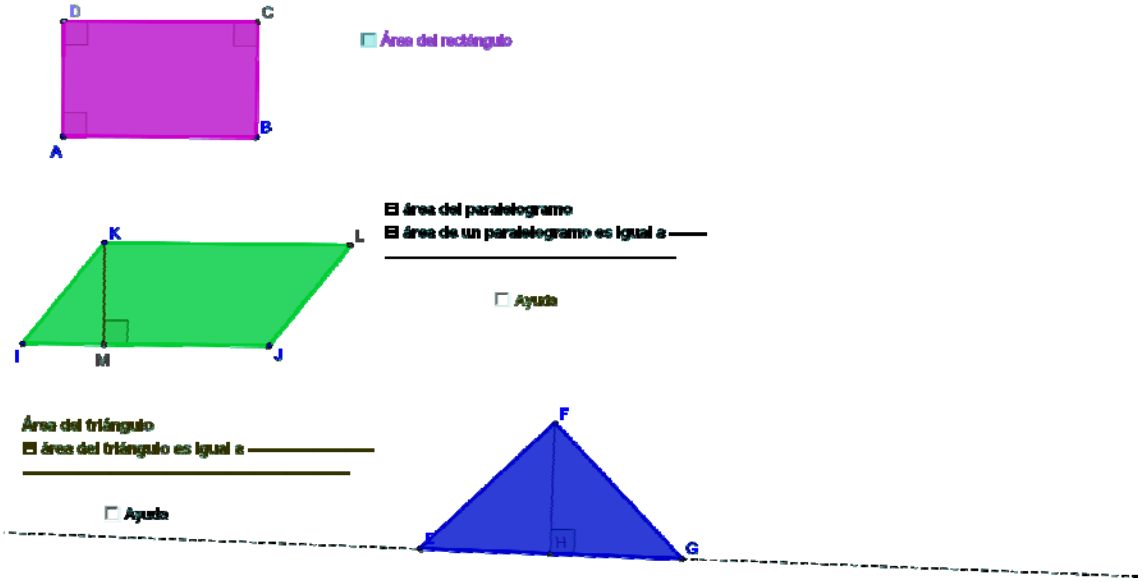


Indica qué transformaciones efectuaste al triángulo, y por qué el área de la figura no varía en esas transformaciones (la transformación puede ser realizada en varios pasos).

Esta actividad tiene la intención, en primer lugar, de recabar información acerca del concepto de área que manejan los estudiantes, en particular si asocian el mismo de forma principalmente geométrica o aritmética. Se han dejado disponibles todas las herramientas de GeoGebra, de modo que los estudiantes puedan optar libremente (usando transformaciones geométricas, usando herramientas como paralela media, perpendiculares; o construyendo un cuadrilátero y arrastrándolo, teniendo a la vista su área).

Comparando áreas II:

A partir de lo visto en la actividad I, y partiendo de que el área de un rectángulo se calcula multiplicando la medida del largo por la medida del ancho, expresa cómo se puede calcular el área de un paralelogramo y el área de un triángulo. Justifica las expresiones a las que llegaste.

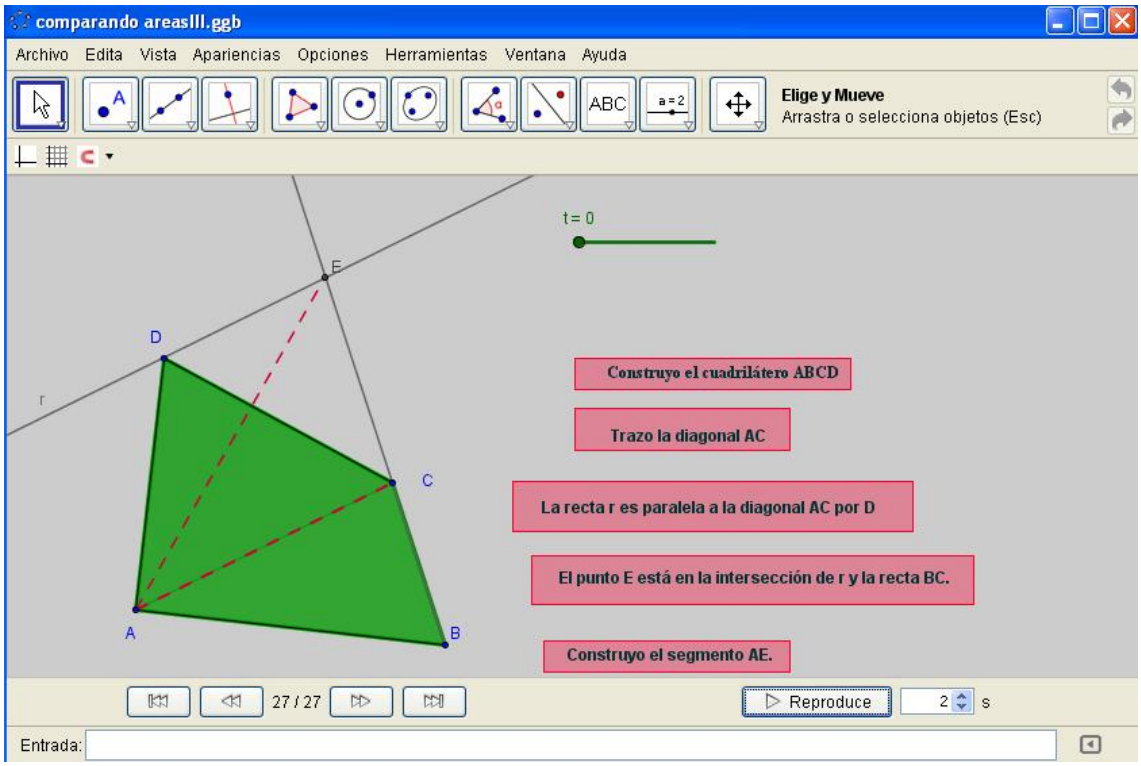


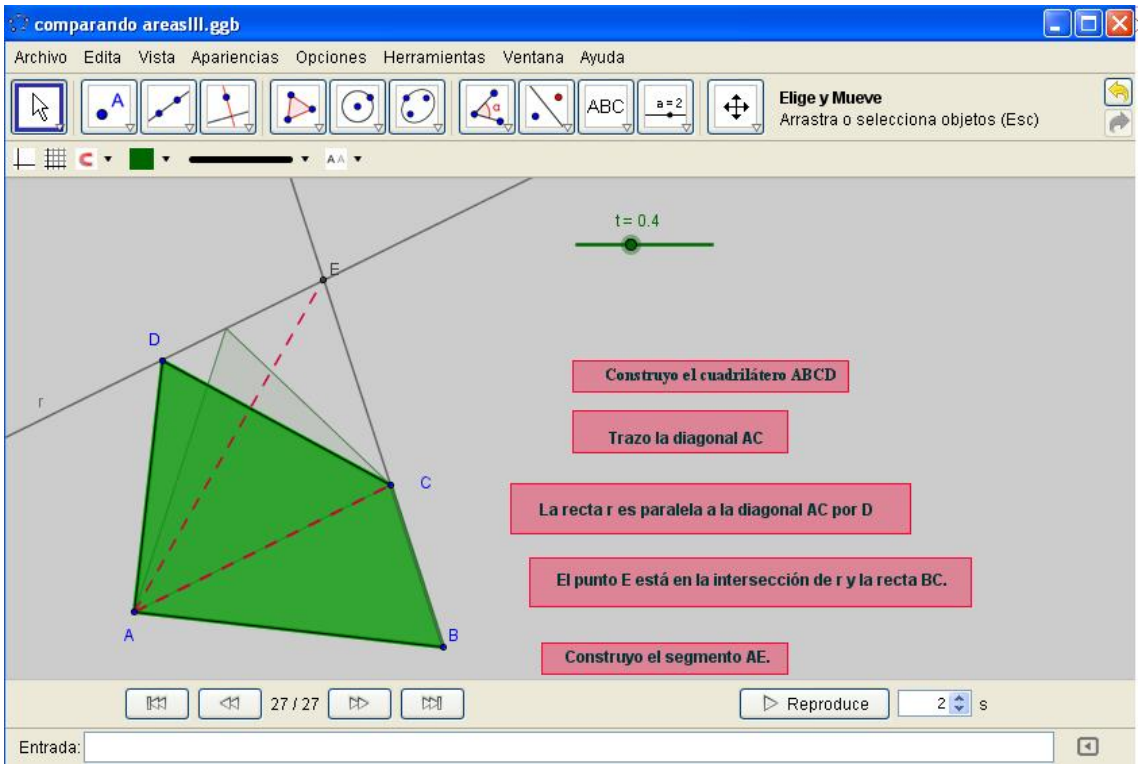
Registra en tu cuaderno las expresiones obtenidas. Reúnete con un compañero y comparen sus resultados. Si lo entienden necesario, corrijan lo que han hecho.

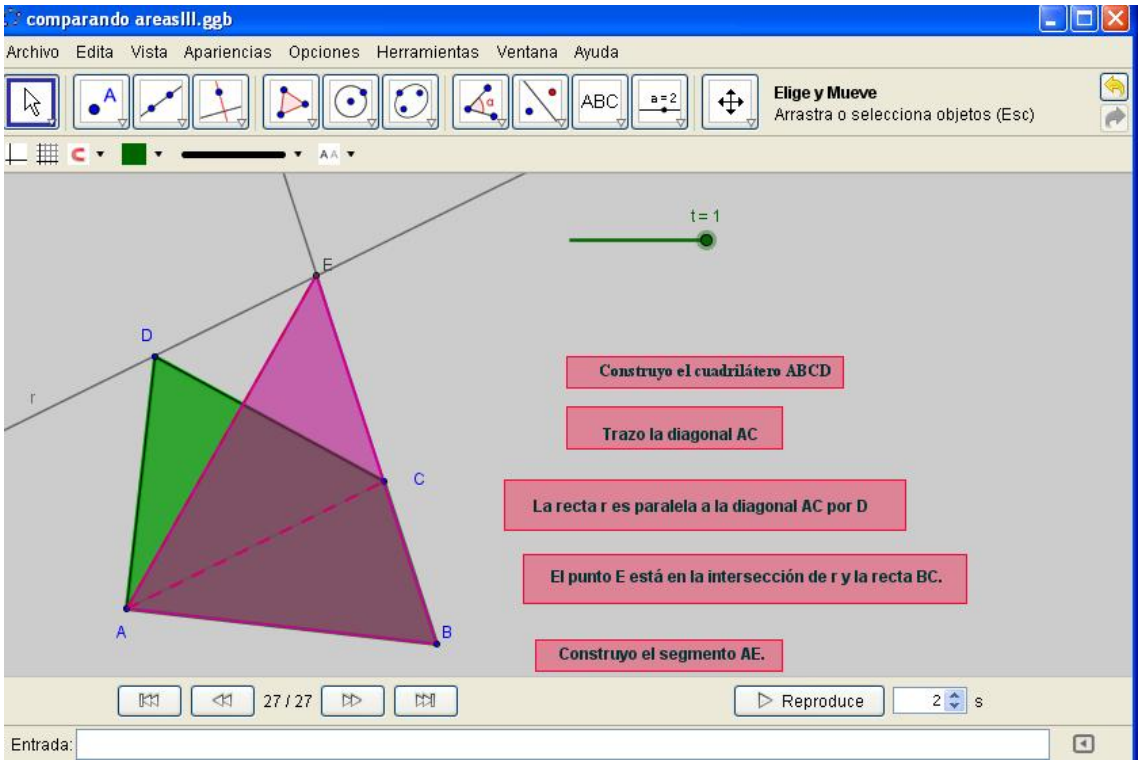
Con esta actividad se pretende que los estudiantes, a partir de las transformaciones realizadas antes a los triángulos, y de la discusión posterior a la actividad, transformen (ya sea de forma experimental o mental), el paralelogramo y el triángulo, poniendo en escena rectángulos, de forma de obtener las expresiones pedidas. Se espera que los estudiantes, además, interactúen con sus conocimientos previos acerca de estas expresiones (sobre todo la que permite obtener el área de un triángulo), y es de esperar que esto pueda ser un obstáculo para algunos de ellos, en cuanto a comprender el sentido de la actividad.

Comparando áreas III:

Reproduce la siguiente construcción, pulsando el botón “Reproduce”.







Sugerencia para realizar lo que se pide: Compara las áreas de los triángulos ACD y ACE, usando lo aprendido en las actividades anteriores.

Esta actividad tiene como objetivo que los estudiantes visualicen “en movimiento” la equivalencia geométrica entre un cuadrilátero y un triángulo, mediante la construcción animada de la transformación del primero en el segundo. La intención final es sugerir, a través del mismo movimiento, una forma de justificación de la equivalencia de estas dos figuras.

Referencias bibliográficas

Programa de Matemática I Magisterio Plan 2008.- En http://www.cfe.edu.uy/index.php?option=com_content&view=article&id=118%3Aplan-2008-para-magisterio&catid=142&Itemid=87 (Consultado 20/10/2012).

Ministerio de Educación. Subsecretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula. (2007).- *Matemática Geometría.* Aportes para la enseñanza. Nivel Medio. Documento 5.- En http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/docum/matematica.php Consultado 20/10/2012.

CHAMORRO, M.C (2001). *Las dificultades en la enseñanza aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaria y E.S.O.* En CHAMORRO, M.C. (dir): Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas, 79-122 Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

COMPARANDO RESULTADOS UTILIZANDO O GEOGEBRA COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO E ALUNOS INGRESSANTES EM MATEMÁTICA

Naiane Gajo Silva – André Krindges – Sérgio A. Wielewski
naiane_gajo@yahoo.com.br – krindges@ufmt.br – sergioaw@ufmt.br
Universidade Federal de Mato Grosso – Brasil

Modalidade: Comunicação.
Nível de escolaridade: Graduação
Palavras chaves: Geometria Dinâmica, Geogebra, *Software*.

Resumo
Atualmente os alunos ingressantes dos Cursos de Graduação, estão com um nível de conhecimento matemático abaixo do esperado. Observamos também o absoluto desconhecimento de softwares matemáticos que deveriam, desde o ensino fundamental e médio, ter sido usado nas aulas, tendo em vista o grande investimento feito pelo governo brasileiro em equipar escolas com computadores.
Como segunda experiência, no inicio de 2012 foi realizada uma Oficina sobre o Geogebra com alguns alunos do curso de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso. Esses alunos, também sem experiências em nenhum software para o ensino da matemática, não tinham noção que a utilização das TIC's (Tecnologia da Informação e Comunicação) deveria ser um recurso adicional a ser aplicado na educação. Comparando os resultados do artigo "Geometria dinâmica Geogebra – uma nova maneira de ensinar" com o resultado dos alunos ingressantes no curso de Matemática, esses últimos conseguiram resolver os exercícios como um todo. Já os alunos que estavam terminando o 1º ano do Ensino Médio não concluíram a mesma quantidade de atividades. Em ambos os experimentos os alunos tiveram dificuldades na compreensão e na resolução. Houve vários problemas de interpretação das questões e uso de conceitos matemáticos para a resolução dos exercícios. Houve interesse por parte dos alunos em saber cada vez mais sobre o Geogebra e continuar explorando a ferramenta, mesmo após a realização das Oficinas.

INTODUÇÃO

Hoje os alunos que estão entrando na graduação, estão com um nível de conhecimento muito abaixo do esperado.

Os alunos ingressantes na graduação, principalmente os de escola pública, contam com "professores desestimulados, não estão muito dispostos a trabalhar e que na maioria das vezes não se qualificam e nem buscam novos métodos de ensino" (SILVA, N. G.; KRINDGES, A.).

Em (Laborde, 2003, p. 26) podemos ler que "executar tarefas matemáticas em um ambiente informatizado, requer dois tipos de conhecimento: o matemático e o instrumental".

Pensando na formação dos futuros professores de matemática e como parte das atividades do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência) foi

realizado uma oficina com o Geogebra, como parte da programação do "Projeto Calourada".

O objetivo deste trabalho é mostrar um comparativo entre os resultados obtidos com os alunos do 1º ano do ensino médio, da Escola Estadual André Avelino Ribeiro – EAAR, e os alunos do curso de matemática, na maioria por alunos ingressantes, da Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT.

O intuito deste trabalho é mostrar que a utilização das TIC's (Tecnologia da Informação e Comunicação) no ensino da matemática pode melhorar e muito o ensino dos nossos alunos, mas ainda está longe do ideal.

1. MOTIVO DA OFICINA

Como parte das atividades do PIBID, durante a "Calourada" são realizadas atividades e varias oficinas durante a sua programação.

Antes do início das aulas do 2012/1 (ano letivo/semestre) foi planejado o que poderíamos fazer nas oficinas, nesse momento houve a ideia de oferta uma oficina utilizando o Geogebra.

Durante o planejamento da oficina, foi pensado em diversas atividades que poderiam ser aplicadas com os alunos. Então, por que não utilizar o mesmo material e atividades realizadas com os alunos da EAAR, posteriormente comparar os resultados.

2. PROJETO CALOURADA

A Calourada visa à integração dos alunos ingressantes no ensino superior com os alunos veteranos, para que não haja os trotes violentos.

O "Projeto Calourada" é um projeto idealizado pelos professores Dr.ª Luzia Aparecida Palaro e Dr. Edinaldo Castro e Silva.

A realização do Calourada é realizado todos os semestres, sempre no inicio do semestre, mais precisamente na primeira semana de aula.

A sua primeira edição foi feita em 2011/1. A principio para os alunos vinculados ao Instituto de Ciências Exatas e da Terra – ICET, mas parte da sua programação conta com a participação dos alunos de outros institutos.

3. OFICINA DE GEOGEBRA

A oficina foi realizada nos dias 06, 07 e 08 de março de 2012, com carga horária de 09 (nove) horas. Os alunos, na sua maioria de ingressantes, nunca ouviram falar em Geogebra e nenhum outro *software* utilizado no ensino da matemática.

A utilização das TIC's é um recurso adicional na educação, mas pouco conhecida e utilizada.

Primeiramente foi dito o que era Geogebra e o que poderia ser feito com a ferramenta. Após essa primeira explanação, foram explicados todos os itens do *software* e suas funcionalidades, com alguns exemplos para facilitar a sua compreensão.

4. MÉTODOS

Nos computadores do laboratório já tínhamos instalado o Geogebra, mas com versão diferente, para padronizar, inclusive por causa da diferença entre versões, foram atualizadas para a versão 4.2, as máquinas que não tinham o *software* instalado, a ferramenta foi instalada.

O Laboratório de Ensino, do curso de Licenciatura Plena em Matemática, conta com computadores com as seguintes especificações:

- HP Compaq 6005 Pro, Processador AMD Phenon II X3B73 781 MHz, 2 Gb de memoria RAM, 250Gb de HD e sistema operacional Windows XP SP3.
- AMD Atum 64 Processador 3800+ 2.40GHz, 1 Gb de memoria RAM, 80 Gb de HD, sistema operacional Windows 7 Home Premium 32 bits.

A oficina iniciou-se dizendo o que era Geogebra, um *software* de geometria dinâmica utilizado principalmente no ensino de geometria e álgebra. Logo em seguida, foi explicado à funcionalidade do programa, o que pode ser feito nele, mostrando cada item do menu.

Como era uma oficina rápida, foi feito mais um trabalho de introdução, para que esses alunos tenham um recurso a mais no seu aprendizado.

Para que pudesse haver um comparativo, o material utilizado na oficina é o mesmo utilizado numa experiência anterior, cujo resultado foi apresentado na Conferência Latino-Americana de Geogebra, em São Paulo no ano de 2011.

As atividades trabalhadas com os alunos durante a oficina são conceitos básicos de geometria, trigonometria, conceitos de paralelismo, congruência, semelhança de triângulos, esperando que os alunos cheguem à graduação sabendo do conteúdo.

A ideia principal do trabalho é suavizar a inserção de conceitos tradicionalmente difíceis em geometria plana, usando a ferramenta computacional descrita. Pode ser notado, dos alunos, que esses conceitos não foram bem fixados.

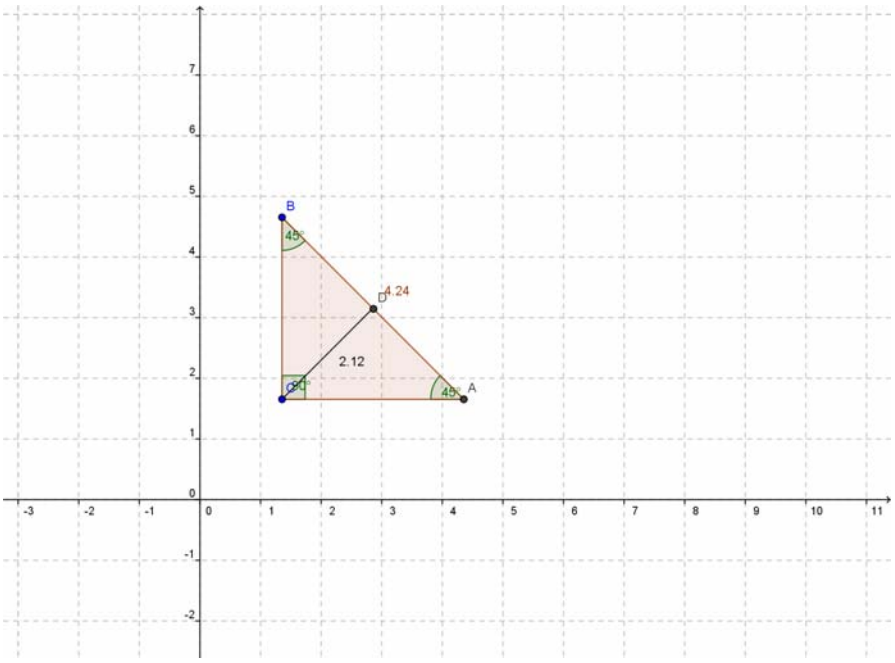


Figura 1: Atividade realiza por um dos alunos.

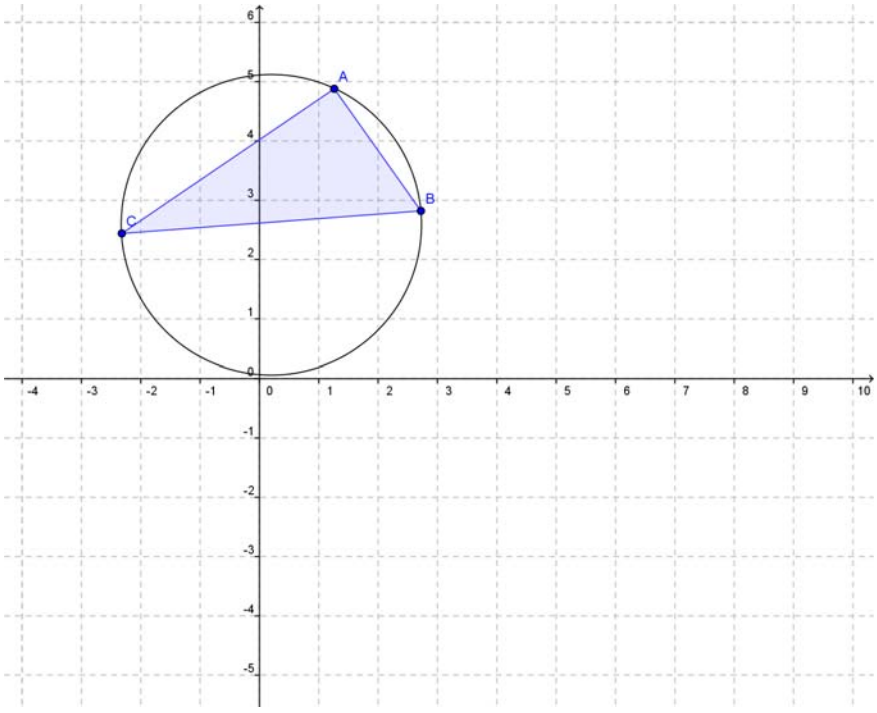


Figura 2: Atividade sobre triângulo inscrito na circunferência.

5. ATIVIDADES DESEMPENHADAS

No primeiro dia de oficina foi proposto que os alunos fizessem como trabalho para casa, um exemplo de semelhança de triângulo, ficando livre qual triângulo eles iriam utilizar, desde que se atende à exigência da semelhança de triângulo.

Utilizamos também um roteiro de atividades que consta no material: *Geometria Dinâmica utilizando o Software Geogebra*, de Gilmara Teixeira Barcelos e Silvia Cristina Freitas Batista (Barcelos e Batista, 2009). Esse material é um excelente guia para o aprendizado autodidata. Na prática pudemos observar que depois de um estímulo inicial, os alunos seguiram as atividades do material quase de forma independente.

Com essas atividades, utilizando o Geogebra, os alunos puderam compreender melhor a matemática, tirando as dúvidas que antes eles não conseguiam compreender apenas com a explicação no quadro.

A seguir, veremos a opinião de alguns alunos a respeito do contato deles com o Geogebra:

> *Rodrigo Vedeschi – Devido às ótimas demonstrações e as explicações sobre os comandos, no qual, facilitaram a resolução de exercícios e no entendimento do processo de criação de desenhos geométricos e sua formação algébrica.*
>
> *Douglas de Almeida – Com a oficina de geogebra pude aprender muito sobre um programa utilizado para fazer cálculos e figuras na área de geometria voltada para o ensino estudantil. Pois através desse programa acompanhado em animações torna mais fácil a compreensão de assuntos não compreendidos anteriormente durante o ensino médio e fundamental.*
>
> *Douglas Rodrigues – Tivemos orientação de uma apostila para o auxilio dos exercícios. Foram trabalhados bem dinâmicos com pouca teoria e muita prática, fazendo com que o aluno tenha maior absorção das funções do programa.*
>
> *A oficina estimula o aluno que está começando o curso de Licenciatura Plena em Matemática a se interessar por alguns módulos que terá que estudar mais a frente como Geometria Plana e Geometria Espacial.*
>
> *Lucas Braga - A primeira vista, é fácil mexer no programa, mas quanto mais vai aprofundando mais complexo fica, mas por causa do programa*

será uma boa ajuda. Esse programa é recomendado para todos que se interesse por Geometria.

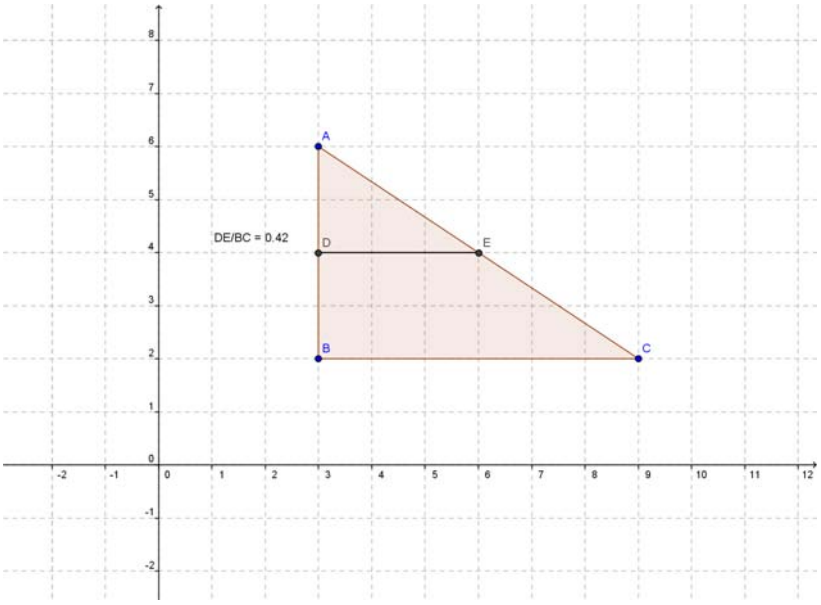


FIGURA 3: Exercício realizado por um dos alunos.

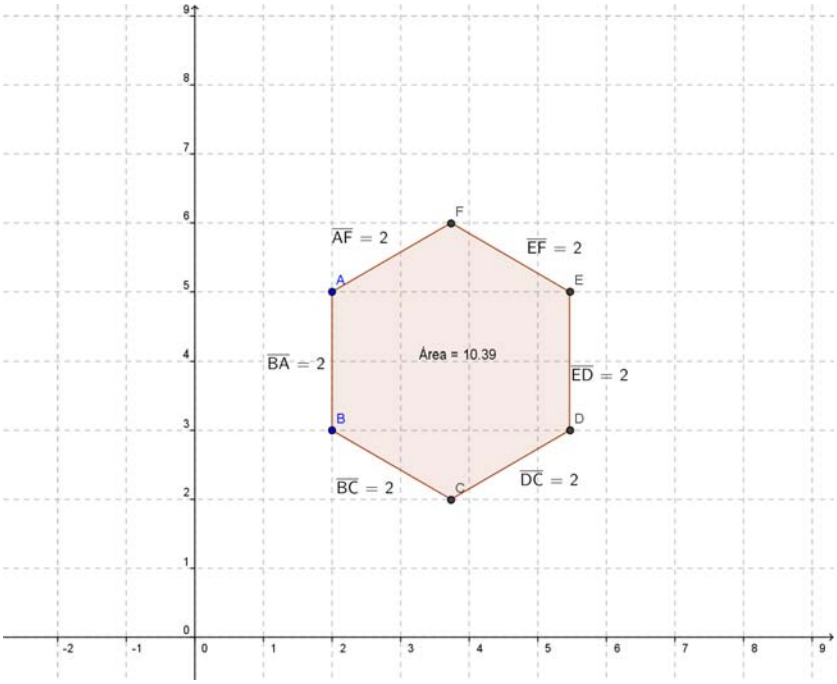


Figura 4: Atividade feita por um dos alunos.

6. RESULTADOS

Como são alunos ingressantes na graduação, esperava-se que o rendimento e o conhecimento matemático estivessem num bom nível, mas durante a oficina pode-se

detectar, logo no inicio, que o conhecimento dos alunos encontrava-se bem deficiente, com muitas dúvidas e problemas de interpretação.

A oficina era algo introdutório sobre o Geogebra, imaginando que os assuntos que iriam ser trabalhado os alunos já tivessem visto no ensino médio.

Durante a oficina foi explicado os exercícios, até mesmo de como deveria ser feito, juntamente com o conceito, para que os alunos pudessem desenvolver os exercícios.

Pela carga horária e a quantidade de exercícios, apesar do nível baixo, o rendimento até que foi bom, conseguindo, com dificuldade, resolver todos os exercícios aplicados durante a oficina.

Comparando com a pesquisa realizada com alunos de 1º ano do Ensino Médio da EAAR, e o curso oferecido para os alunos de Matemática, foram excelentes os resultados, até porque os alunos do 1º ano não haviam visto todos os conceitos exigidos pelos exercícios, já os alunos ingressantes eram para ter visto.

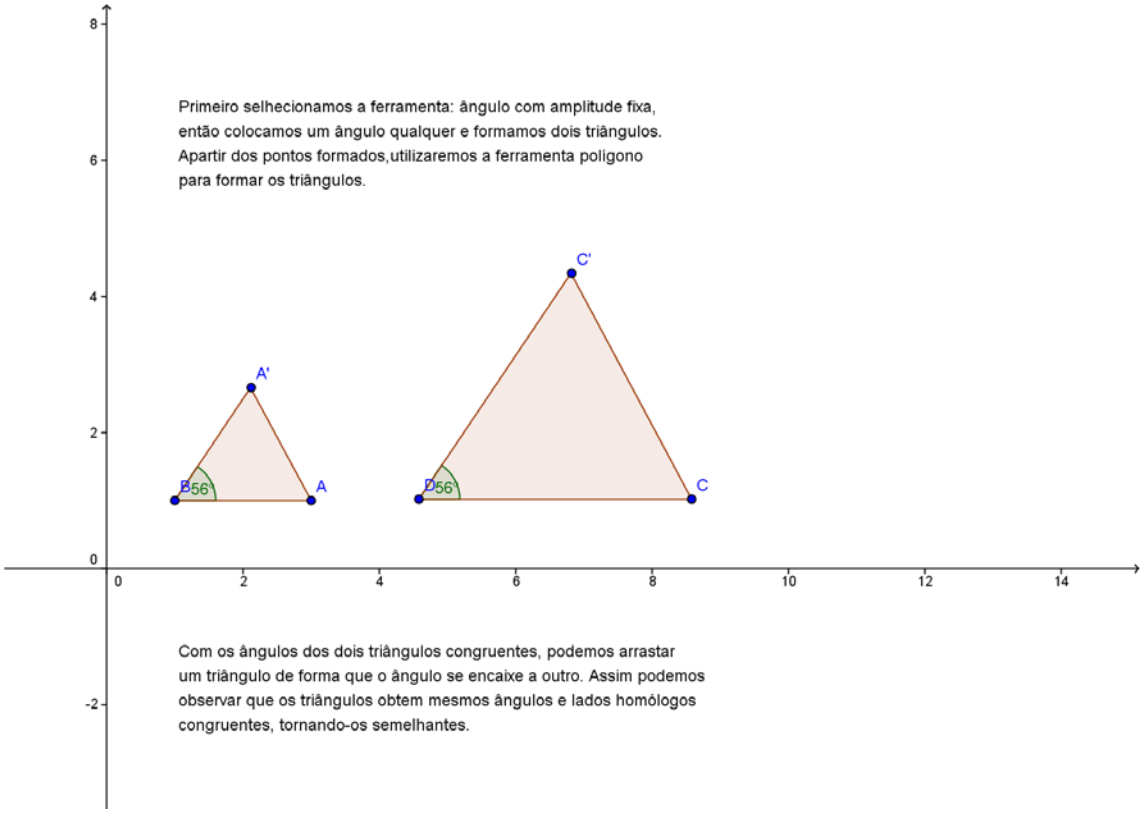


Figura 5: Atividade para casa, sobre semelhança de triângulos, feito por um dos alunos.

CONCLUSÃO

Apesar da total falta de experiência dos alunos com TIC's, percebemos o encantamento dos alunos com essa ferramenta o que produziu a compreensão de alguns conceitos antes negligenciados.

Como os alunos que ingressam no curso de Matemática da UFMT, estão tendo um alto índice de reprovação na disciplina de Matemática Elementar (disciplina do 1º semestre composta de uma revisão de toda matemática do ensino médio), espera-se que estes alunos que realizaram a oficina saiam bem nessa disciplina e que utilizem o *software* como apoio nos seus estudos.

Observamos também que apesar dos recursos tecnológicos tornarem-se cada vez mais comuns, muitos professores desconhecem esse tipo de recurso.

Mesmo não comentando com os alunos que os professores deveriam utilizar *softwares* matemáticos, a exemplo do Geogebra que é gratuito, os mesmos alunos disseram que se o professor de matemática tivesse utilizado esses recursos na escola, a visão e o conhecimento dos conceitos matemáticos estariam melhor e muitas das dúvidas que eles tinham poderia ter sido sanada.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- Laborde, C. (2003). Technology used as a Tool for Mediating Knowledge in the Teaching of Mathematics: the Case of Cabri-geometry. *Proceedings of the 8th ATCM*, Chung Hua University, Hsinchu, Taiwan, R.O.C.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- SILVA, N. G.. KRINDGES, A. (2012) Geometria dinâmica Geogebra – Uma nova maneira de ensinar. *Revista do Instituo GeoGebra Internacional de São Paulo* volume 1, CCCXLVII-CCCLX.
- BARCELOS, G.T.; BATISTA, S.C.F. (2009). Geometria Dinâmica utilizando o *Software* Geogebra. Campos, CEFET. http://www.es.iff.edu.br/softmat/projetotic/download/atividades1/apostilageogebra.pdf Consultado 21/08/2011

CONJETURAS SOBRE TRIÁNGULOS DETERMINADOS POR MEDIATRICES, BISECTRICES Y ALTURAS DE UN TRIÁNGULO

Mario Dalcín
mdalcin00@gmail.com
Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática de Formación Docente, Montevideo-Uruguay

Modalidad: C
Nivel educativo: Terciario, Formación y actualización docente
Palabras clave: Conjetura, geometría empírica.

Resumen
Trabajando en un ambiente dinámico se formulan conjeturas en torno a triángulos determinados por mediatrices y bisectrices de un triángulo y también por sus mediatrices y alturas. Se propone la inclusión en la enseñanza de la formulación de conjeturas como proceso de la actividad matemática en el ámbito de la Geometría Euclidiana.

Introducción

La existencia de la Geometría Dinámica desde hace pocas décadas ha posibilitado la exploración de conjeturas en el ámbito de la Geometría Euclidiana. A su vez, en el ámbito de la Didáctica de la Matemática se ha dado cabida a la geometría empírica, como es el caso de Houdement y Kuzniak (1999a, 1999b, 2000) que plantean tres geometrías:

Geometría I. La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

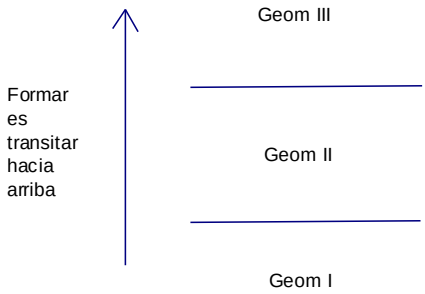
Geometría II. La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.

Geometría III. La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

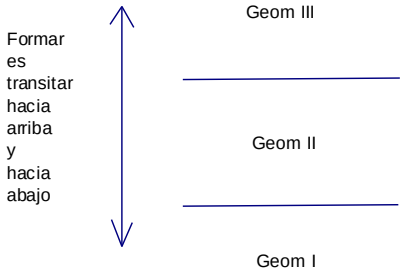
Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cual dar cuenta de toda la geometría, desde la que se trabaja en la enseñanza primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático.

Estas Geometría I, Geometría II y Geometría III podrían pensarse en un primer momento como niveles a través de los cuales una persona estudiando geometría debería transitar; concebirlas como una jerarquía, la Geometría II mejor que la Geometría I, la

Geometría III mejor que la Geometría II. Así es como ha sido concebida tradicionalmente la enseñaza de la geometría, un camino unidireccional, siempre ascendente.



Sin embargo, no se trata de dirimir cuál de estas geometrías es mejor, no es eso lo que está planteado: los autores postulan tres geometrías posibles, tres enfoques distintos de un mismo hecho, pero donde ninguno niega a los otros. Las prácticas permiten ver en cuál se está trabajando en cada momento, son tres dimensiones distintas, el camino deductivo es uno de esos caminos (Geometría II), pero el camino puede ser el de constatar mediante mediciones (Geometría I), o validar al interior de un sistema axiomático formal (Geometría III). Cada una de estas dimensiones no niega a la otra. Esto permite concebir la formación de un estudiante en el ámbito de la geometría como un tránsito continuo entre estas tres dimensiones.



Por otro lado, Kuzniak (2006) plantea un vínculo entre su modelo de las Geometrías I, II, III y los niveles de van Hiele, lo cual facilita establecer conexiones entre un modelo medianamente difundido y manejado por los docentes como es el de van Hiele y este nuevo modelo.

Consideramos que la amplitud del modelo de Houdement y Kuzniak (1999a, 1999b, 2000) de las Geometrías I, II, III, puede ser de utilidad para entender el trabajo geométrico de nuestros estudiantes y así poder contribuir a su desarrollo.

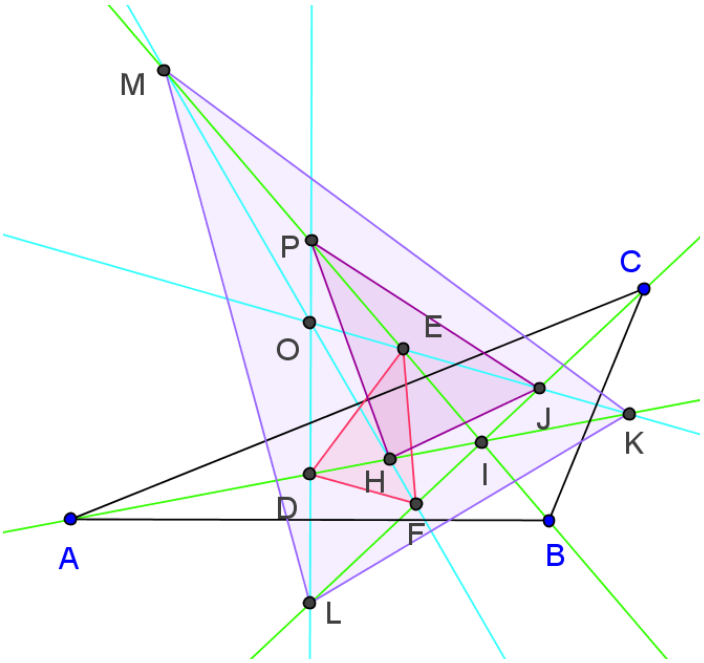
Conjeturas en torno a triángulos determinados por mediatrices y bisectrices de un triángulo

ABC triángulo de circuncentro O e incentro I.

Se consideran los triángulos DEF, HPJ, KLM según el cuadro siguiente.

∩	Mediatriz AB	Mediatriz BC	Mediatriz CA
Bisectriz A	D	K	H
Bisectriz B	P	E	L
Bisectriz C	M	J	F

Una figura correspondiente a dicha situación se presenta de la siguiente manera:



1

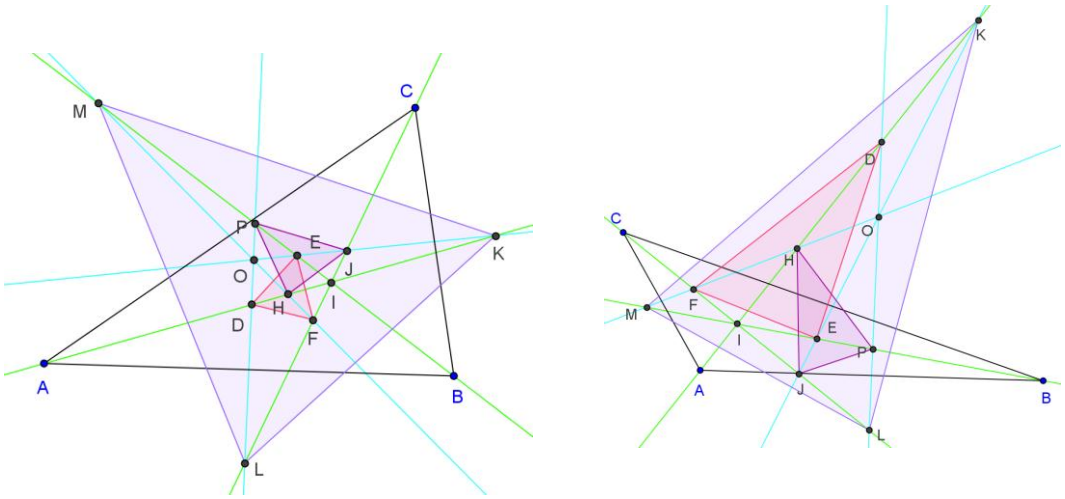
En una primera observación se puede apreciar cierta similitud entre los tres triángulos considerados. De dicha observación surge natural la pregunta en torno a si dichos triángulos serán semejantes.

Midiendo sus ángulos tenemos:

m∠FDE = 78,70°	m∠PHJ = 78,70°	m∠MKL = 78,70°
m∠DEF = 62,96°	m∠HJP = 62,96°	m∠KLM = 62,96°
m∠EFD = 38,34°	m∠JPH = 38,34°	m∠LMK = 38,34°

2

Arrastrando la figura dinámica se observa que no es posible conseguir que los triángulos DEF, HJP y KLM (después de lo verificado empíricamente en 1, alcanza con observar uno solo de estos triángulos) sean rectángulos u obtusángulos.



3

Tanto a partir de 1, como de 2, podría surgir la pregunta acerca de si es posible vincular la medida de los ángulos de los triángulos DEF, HJP, KLM con la medida de los ángulos del triángulo ABC.

$m\angle FDE = 79{,}28°$ $m\angle PHJ = 79{,}28°$ $m\angle MKL = 79{,}28°$
$m\angle DEF = 72{,}28°$ $m\angle HJP = 72{,}28°$ $m\angle KLM = 72{,}28°$
$m\angle EFD = 28{,}44°$ $m\angle JPH = 28{,}44°$ $m\angle LMK = 28{,}44°$

$m\angle CAB = 21{,}44°$
$m\angle ABC = 123{,}13°$
$m\angle BCA = 35{,}43°$

$$\frac{m\angle ABC + m\angle BCA}{2} = 79{,}28°$$

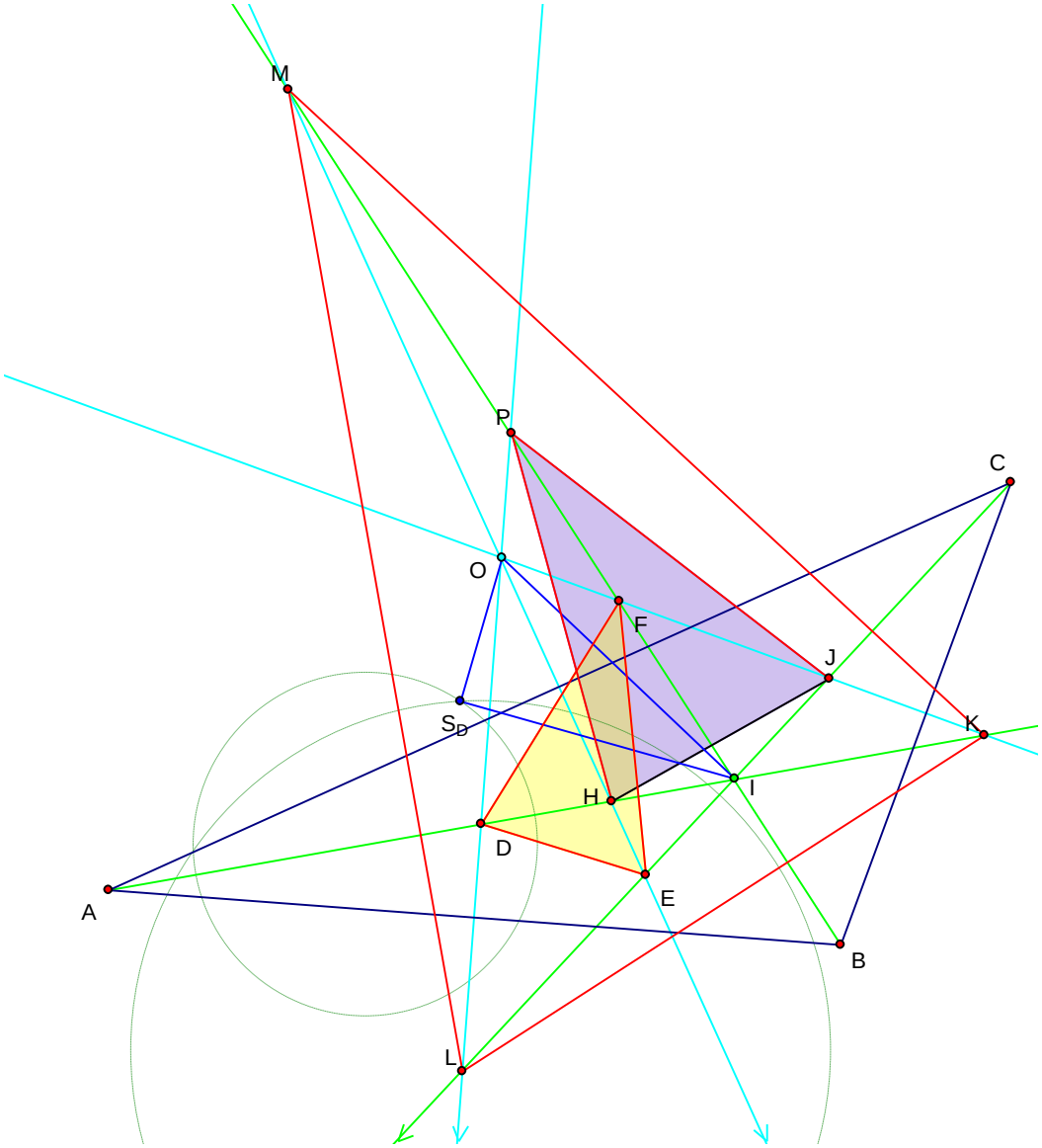
$$\frac{m\angle CAB + m\angle ABC}{2} = 72{,}28°$$

$$\frac{m\angle BCA + m\angle CAB}{2} = 28{,}44°$$

4

También a partir de lo observado en 1 podría surgir la pregunta sobre qué semejanzas hacen corresponder un triángulo en otro.

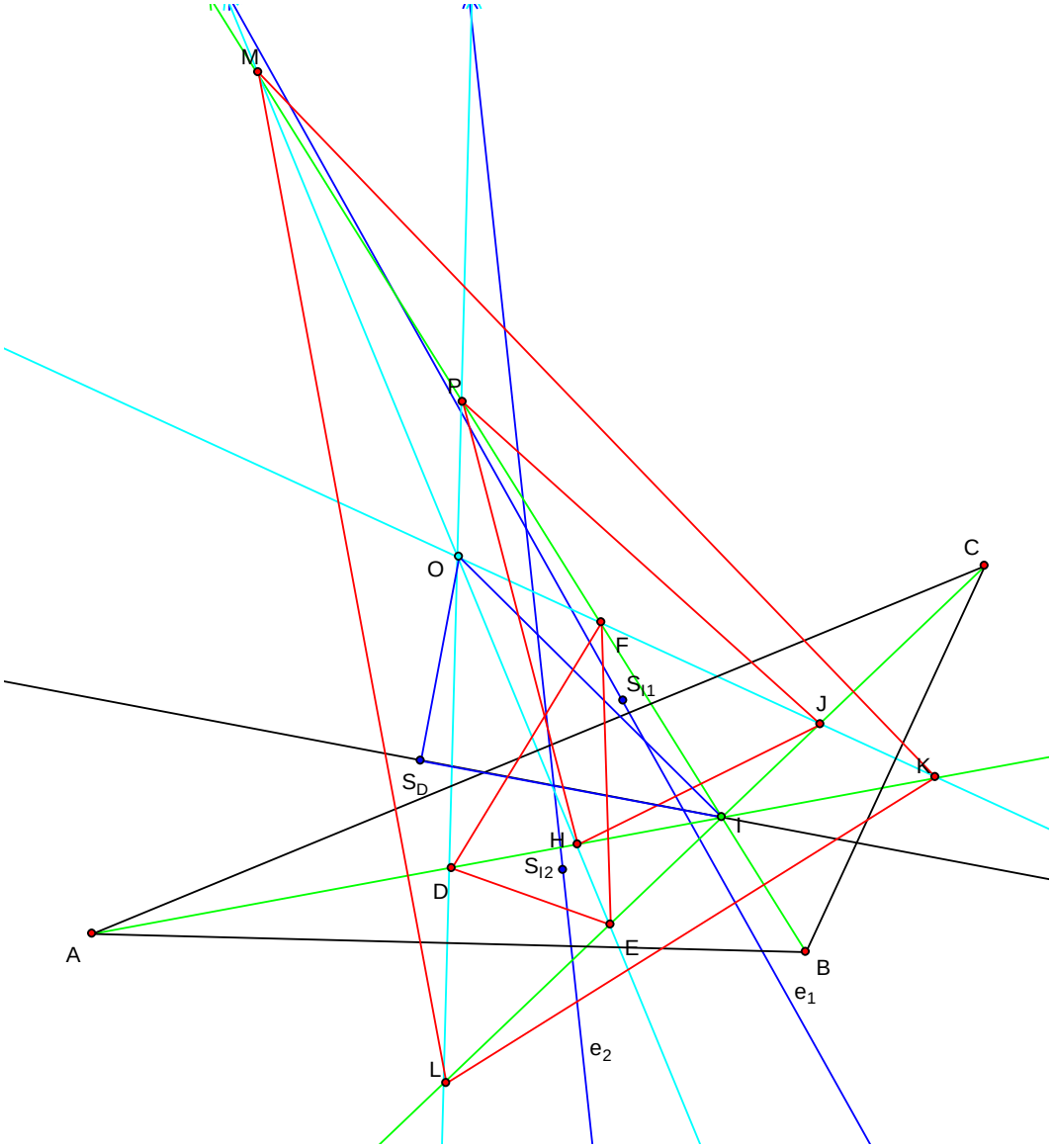
Veamos la semejanza que transforma DEF en HJP.



Es una semejanza directa de centro S_D, y donde el punto S_D cumple que $OS_DI = 90º$.

5

HJP y KLM se corresponden en semejanza indirecta de centro S_{I1} y eje e_1.
KLM y DEF se corresponden en semejanza indirecta de centro S_{I2} y eje e_2.



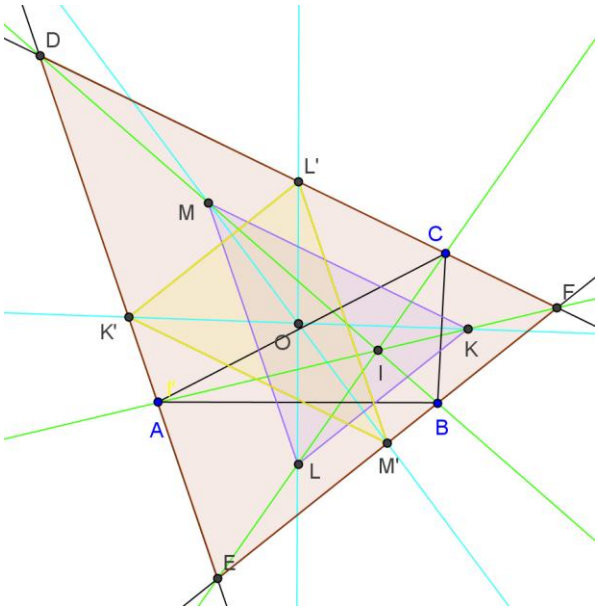
Se cumple que la recta S_DI es bisectriz del ángulo $S_{I1}S_DS_{I2}$.

6

Suponiendo una analogía entre el comportamiento de los triángulos determinados por mediatrices y bisectrices puede habilitar la intriga acerca del comportamiento de los triángulos determinados por mediatrices y bisectrices exteriores.

Se consideran los triángulos D'E'F', H'J'P', K'L'M' según el cuadro siguiente.

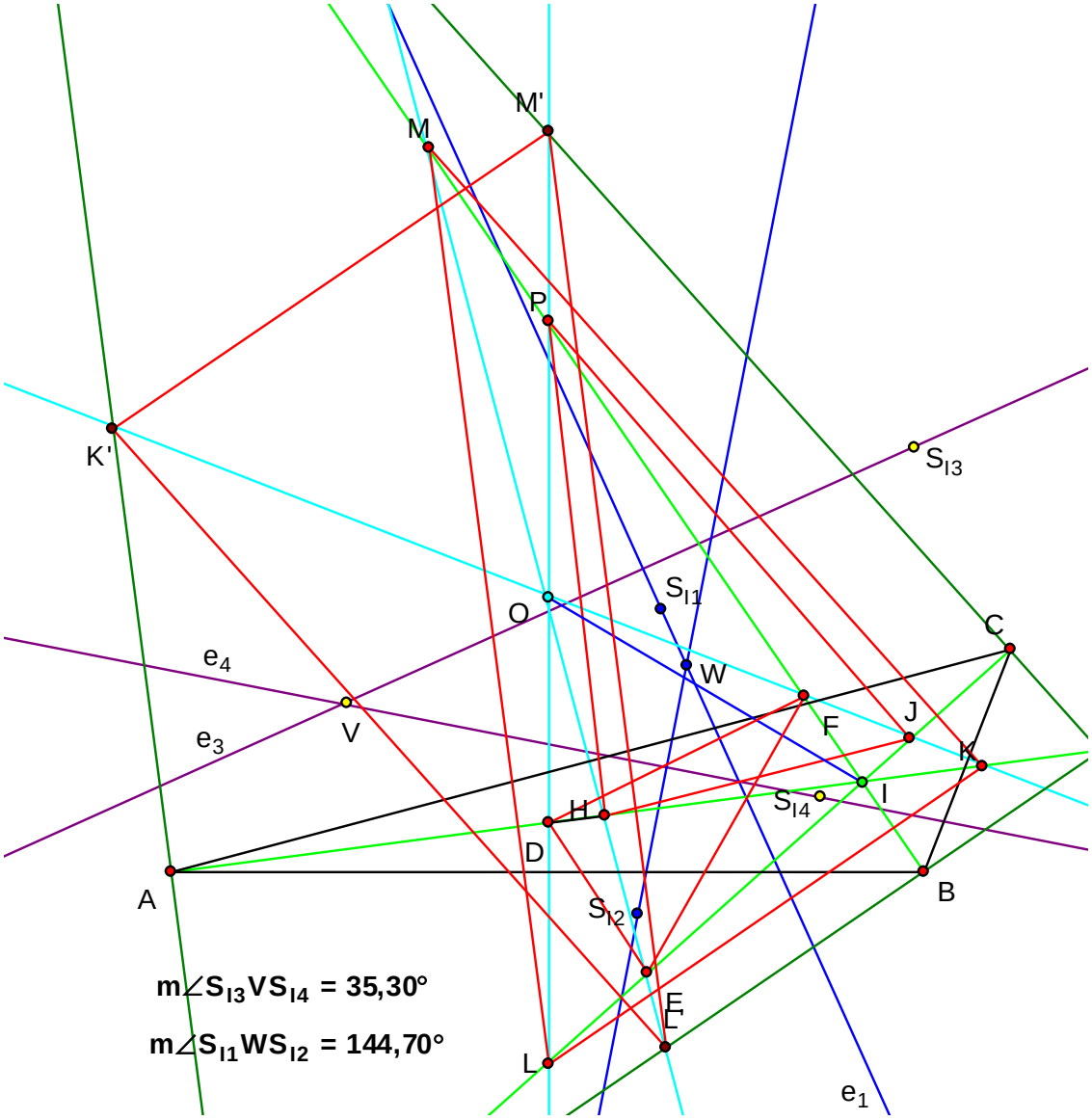
∩	Mediatriz AB	Mediatriz BC	Mediatriz CA
Bisectriz ext A	D'	K'	H'
Bisectriz ext B	P'	E'	L'
Bisectriz ext C	M'	J'	F'



- Los triángulos K'M'L' y KLM se corresponden en simetría de centro el circuncentro O de ABC.
- Los triángulos DEF -determinado por las bisectrices exteriores- y KLM se corresponden en homotecia de centro el incentro I de ABC y razón 2.

7

Prestemos ahora atención a los triángulos K'M'L' y DEF, así como a K'M'L' y HJP.



Los triángulos K'M'L' y DEF se corresponden en semejanza indirecta de centro S_{I4} y eje e_4,
Los triángulos K'M'L' y HJP se corresponden en semejanza indirecta de centro S_{I3} y eje e_3.

Se cumple además que el ángulo entre los ejes e_1e_2 es igual al ángulo entre los ejes e_3e_4.

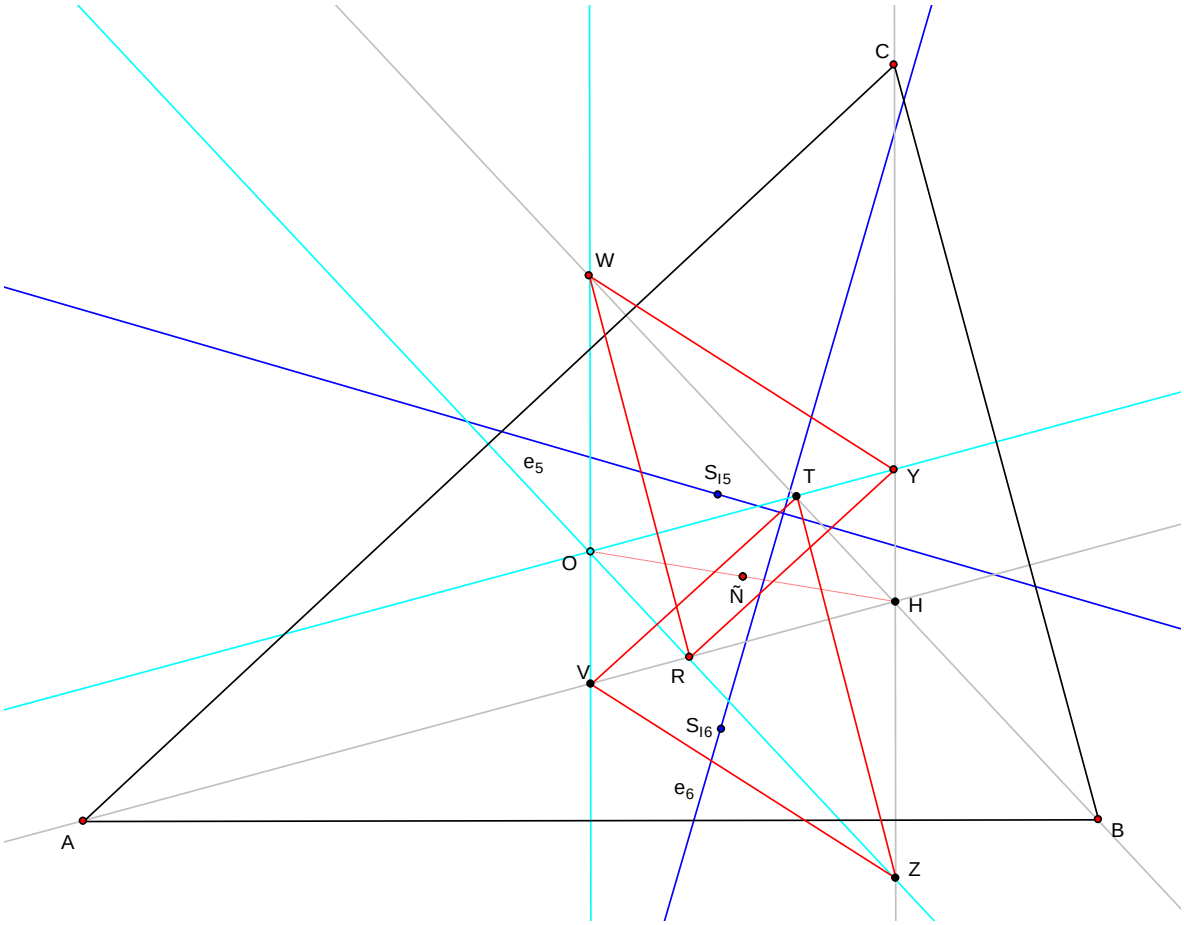
Conjeturas en torno a triángulos determinados por mediatrices y alturas de un triángulo

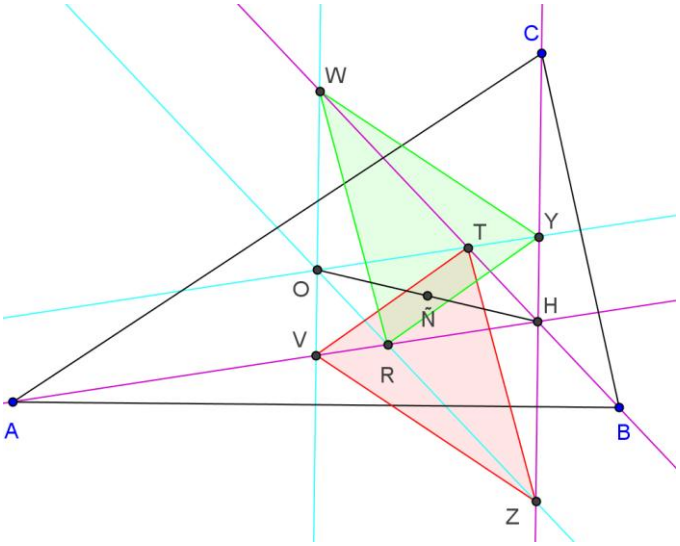
ABC triángulo de circuncentro O y ortoncentro H.

Se consideran los triángulos ZVT y WYR según el cuadro siguiente.

∩	Mediatriz AB	Mediatriz BC	Mediatriz CA
Altura A	V	-	R
Altura B	W	T	-
Altura C	-	Y	Z

8
Si observamos los triángulos ABC, ZVT, WYR...





… vemos que ABC, ZVT, WYR son semejantes.

9

Los triángulos ZVT y WYR se corresponden en simetría central de centro Ñ, punto medio de OH.

10

Los triángulos ABC y WYR se corresponden en semejanza indirecta de centro S_{I5} y eje e_5, ABC y ZVT se corresponden en semejanza indirecta de centro S_{I6} y eje e_6.
¿Se cumple que los ejes e_5 y e_6 son perpendiculares?

Aclaración

Las observaciones anteriores no las he visto en los libros de Geometría Euclidiana que tengo a disposición. Tampoco he recibido respuesta a consultas vía correo electrónico hechas a especialistas en Geometría Euclidiana acerca de si dichas observaciones son cosa ya sabida. Mientras tanto me entretengo buscando elaborar explicaciones deductivas para lo hallado. Agradezco a quien pueda ofrecer alguna pista sobre estas cuestiones vistas en algún libro o artículo. Y bienvenido quien quiera hacer correcciones, reformulaciones, agregar nuevas conjeturas, o pensar demostraciones para estas observaciones.

Reflexión final

Según el diccionario de la RAE conjetura es "Juicio que se forma de las cosas o acaecimientos por indicios y observaciones". En el caso de las conjeturas antes expuestas hay más que indicios sobre su veracidad dado que las mismas están basadas en observaciones hechas en base a una figura dinámica que habilita la consideración de infinitos casos. En as figuras dinámicas se hicieron mediciones (básicamente de ángulos) y se hicieron cálculos con dichas mediciones, también se hicieron construcciones y verificaciones en base a dichas mediciones. Con esto sostenemos que en el ámbito de la Geometría I estas conjeturas son teoremas, en el ámbito de la Geometría II estas conjeturas siguen siendo conjeturas ya que no tienen una demostración, una deducción de su validez a partir de afirmaciones más básicas.

Consideramos que a la hora de enseñar Geometría Euclidiana, ya se en enseñanza primaria, media o terciaria, sería deseable incluir actividades donde la formulación de conjeturas esté presente. En algunos casos es factible que los estudiantes estén en condiciones de elaborar pruebas deductivas, en otro es posible que sin elaborar una prueba deductiva puedan validad empíricamente algunas propiedades mediante el uso de Geometría Dinámica. Sobre la demostración de estas propiedades se podrá volver o no en años siguientes, en ambos casos el trabajo ya hecho amplía el mundo geométrico de los estudiantes y contribuye a desarrollar la capacidad de hacerse preguntas geométricas, a desarrollar un ojo geométrico, a concebir la Geometría Euclidiana no como un territorio ya explorado y agotado, sino también como un mundo a construir.

Referencias

- Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999a). Geometríe et paradigmenes geometriques. *Petit x*, 51, 5-21.
- Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999b). Sur un cadre conceptuel inspire de Gonseth et destine a etudier lenseignement de la geometrie en formation des maitres. *Educational Studies in Mathematics,* 40 (3), 283-312.
- Houdement, C. y Kuzniak. A. (2000). Formation des maitres et paradigmes geometriques. *Recherches en didactique des mathematiques*, 2, 89-116.

CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO DE LOS PROFESORES Y RESOLUCIÓN DE TAREAS DE CONSTRUCCIÓN DE PARALELOGRAMOS CON GEOGEBRA

Leonela M. Rubio – Juan L. Prieto G.
leonela1193@hotmail.com– juanl.prietog@gmail.com
Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

Modalidad: CB.
Nivel Educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Conocimiento geométrico, profesores, paralelogramos, GeoGebra.

Resumen
Frecuentemente se cree que la capacidad que tienen los profesores de memorizar una definición matemática, que luego será verbalizada durante la instrucción, garantiza que éstos sean competentes para ejercer la práctica docente. Nuestra experiencia en la formación de profesores de Matemática nos dice que el conocimiento memorístico es insuficiente para resolver algunos problemas geométricos, especialmente aquellos ubicados en un entorno dinámico como el ofrecido por GeoGebra, colocando a los profesores en desventaja frente a las exigencias que supone analizar el potencial de las tareas matemáticas que se proponen a los alumnos. En este trabajo se describen dos casos de profesores que participaron en un taller de formación ofrecido por el Grupo TEM en 2012, donde debían resolver tareas de construcción de paralelogramos con GeoGebra, usando su conocimiento sobre los elementos y propiedades esenciales de los objetos geométricos involucrados y decidiendo la manera de vincular las primitivas geométricas del programa para obtener dibujos acordes con lo exigido. La secuencia de pasos definida por cada profesor revela la influencia del conocimiento que éstos tienen del objeto representado al momento de construir el dibujo, y cómo este saber obstaculiza el logro de una imagen consistente con los datos iniciales y la teoría geométrica.

INTRODUCCIÓN

Es curioso y también preocupante ver que un profesor de Matemática, capaz de mencionar sin complicaciones algunas características propias de un objeto geométrico (p.e., de un rectángulo),presenta dificultades para construir un dibujo alusivo al objeto en cuestión, dadas unas condiciones iniciales y haciendo uso de recursos tecnológicos. Para algunos, la capacidad que tienen los profesores de caracterizar con precisión los objetos geométricos según una teoría es suficiente para enseñar tales contenidos.

Sin embargo, nuestra experiencia en la formación del profesorado nos dice que éstos, al enfrentar tareas de construcción de figuras planascon GeoGebra, elaboran secuencias de construcción que no siempre les conducen a una solución correcta de lo propuesto, muy a pesar del conocimiento conceptual que tienen sobre los objetos representados.Bajo estas condiciones, las soluciones incorrectas de los profesores se caracterizan por ser

algunas veces“inconsistentes”, cuando el dibujo elaborado no representa al objeto geométrico evocado, otras veces “incompletas”, si el profesor se da por vencido en el trabajo o, en el peor de los casos, “ausentes”, ya que los obstáculos imposibilitan la construcción.

En todos estos casos, el uso del GeoGebra pone de manifiestolas dificultades que tienen los profesores para explicar y predecir el comportamiento dinámico de los dibujos geométricos que ellos mismos elaboran, a la luz de la teoría vinculada a los objetos representados (Laborde, 1997). Consideramos que una manera de ayudar a superar estas dificultades es mediante el diseño, puesta en práctica y mejora progresiva de propuestas de formación permanente, apoyados en el uso del GeoGebra, que permitan a los profesores de Matemática aprender a establecer relaciones necesarias entre el conocimiento teórico y los dibujos que evocan a los objetos geométricos escolares, colocándoles en mejores condiciones para llevar a cabo la enseñanza. Sin embargo, las acciones emprendidasrequieren de la comprensión de las formas de aprender a vincular lo visual y lo teórico en un entorno de GeoGebra por parte de los profesores, incluyendo las dificultades que se les presentan.

En atención a esto último, el presente trabajo describe las dificultades que tienen dos profesores de Matemática para elaborar una secuencia de pasos de construcción de paralelogramos con GeoGebra que conduzcan a dibujos consistentes con unos datos iniciales, a partir del análisis de las relaciones el conocimiento de los profesores referido a los cuadriláteros y las representaciones mentales asociadas. Esta información se considera relevante en tanto aportan información para el diseño de las propuestas formativas en pro del desarrollo de conocimiento, destrezas y métodos de enseñanza de contenidos geométricos en entornos de GeoGebra.

OBJETIVO

Explicar la influencia del conocimiento geométrico que tienen los profesores sobre los paralelogramos en los procesos de construcción de dibujos alusivos a estas figurasutilizando el GeoGebra.

MARCO TEÓRICO

Según Vinner (citado por Gutiérrez y Jaime, 1996), aprender correctamente un objeto geométrico determinado supone identificar: (i) el concepto matemático asociado, (ii) la imagen del concepto que la persona crea en su mente, y (iii) la definición del concepto que se maneja. Por lo general, cuando pensamos en un objeto geométrico nuestra mente

evoca su imagen, es decir,el conjunto de dibujos que asociamos con el objeto y que nos ayudan a recordar la definición del mismo, sus características y propiedades. Si una persona cuenta con una gran variedad de imágenes mentales que reflejan las cualidades más importantes del objeto que representan, entonces se dice que tiene una imagen del concepto completa, lo cual le permite una amplia comprensión del contenido y la capacita para realizar construcciones consistentes. Por tanto, el elemento que causa más impacto en el sujeto es la imagen mental que posea del concepto, llegando a utilizarla de apoyo al momento de resolver tareas referidas al objeto sin atender necesariamente a la definición formal del mismo.

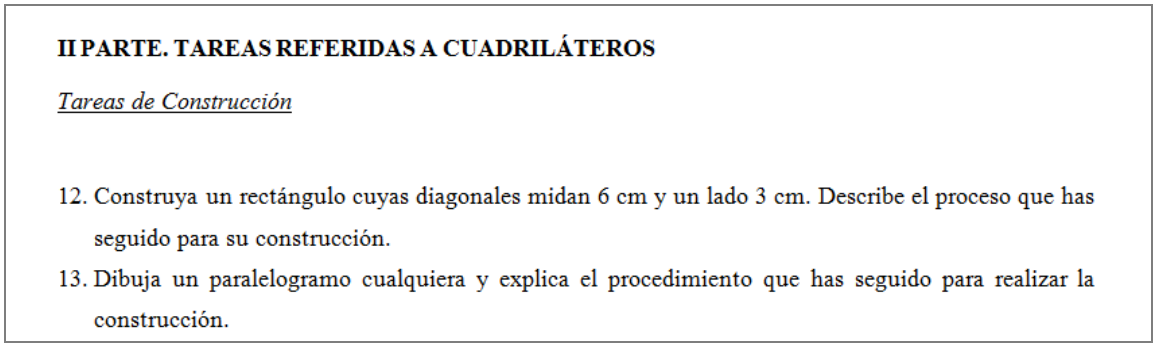
Por otra ladoFischbein (1993) distingue sólo categorías determinadas por la naturaleza, tanto conceptual como figural, de los objetos geométricos, así se introduce la idea de "concepto figural". Desde esta manera, un objeto geométrico visto desde la parte conceptual se considera una entidad totalmente abstracta, semejante a la definición del concepto que distingue Vinner. Visto desde la parte figural, el objeto muestra propiedades espacialesque se rigen siempre por las limitantes establecidas en la componente conceptual. Al momento de realizar alguna tarea geométrica, normalmente la parte conceptual es dejada a un lado, predominando las características espaciales asociadas al concepto, pero esto no es lo apropiado para tener una buena comprensión del mismo. Lo ideal es que el aprendiz sea capaz de integrar lo conceptual y lo espacial, con predominio de lo primero, así se desarrollaría el concepto figural derivado de vincular la definición formal con las características espaciales de un objeto.

Estos referentes teóricos permiten identificar las causas por las cuales los profesores de Matemática realizan construcciones inconsistentes de dibujos alusivos a los cuadriláteros en un entorno de GeoGebra. Dado que la construcción de un dibujo con GeoGebra requiere del establecimiento de una secuencia de acciones manifestadas en el uso de primitivas del programa, consideramos la inconsistencia de un dibujo como una consecuencia del predominio de la componente figural del objeto representado sobre la componente conceptual en la conformación del concepto tratado por parte del aprendiz.

METODOLOGÍA

En esta investigación participaron 15 profesores de Matemática activos y 12 estudiantes para profesores de Matemática, organizados en dos grupos heterogéneos que cursaron separadamente un taller de formación en la enseñanza de la Geometría utilizando GeoGebra, ofrecido por el Grupo TEM en el primer semestre de 2012. El taller tuvo el

propósito de mejorar la comprensión de los participantes en cuanto a las características, propiedades y relaciones de los triángulos y cuadriláteros. Durante el desarrollo del taller los participantes debían utilizar el GeoGebra para resolver un conjunto de tareas de construcción referidas a los contenidos mencionados (ver Figura 1).



II PARTE. TAREAS REFERIDAS A CUADRILÁTEROS

Tareas de Construcción

12. Construya un rectángulo cuyas diagonales midan 6 cm y un lado 3 cm. Describe el proceso que has seguido para su construcción.
13. Dibuja un paralelogramo cualquiera y explica el procedimiento que has seguido para realizar la construcción.

Figura 1. Ejemplo de tareas de construcción de paralelogramos GeoGebra

Resolver una tarea de construcción como los mostrados en la figura 1 suponía que los participantes explicaran al resto del grupo la secuencia de pasos elaborada con el GeoGebra para realizar un dibujo que cumpliera con las condiciones iniciales. Las explicaciones dadas por los participantes al respecto fueron grabadas en video con la intención de capturar el desarrollo del momento. Los datos de la investigación proceden de las respuestas de los participantes al momento de las explicaciones. Consideramos que una respuesta del profesor está compuesta del archivo GeoGebra (extensión. ggb) con el dibujo elaborado y de la explicación correspondiente a su construcción. Específicamente se analizaron las respuestas de dos profesores, uno de cada grupo, que generaron dibujos inconsistentes. Para conservar el anonimato de los participantes seleccionados, nos referiremos a ellos como Pedro y Julia.

El procedimiento de análisis de los datos se realizó en dos fases. En la primera fase se analizaron las construcciones mostradas en los archivos GeoGebra con el propósito de (i) determinar el número de pasos de la secuencia, las primitivas de construcción utilizadas y las relaciones entre estas primitivas para la construcción, e (ii) identificar aquellos pasos donde se aprecian decisiones incorrectas del profesor que añaden al dibujo características espaciales impropias en relación a la teoría geométrica.En la segunda fase se analizaron las explicaciones de los profesores, centrando la atención en las razones de los pasos incorrectos detectados en la fase anterior, con el fin de identificar el atributo espacial añadido al objeto geométrico que no corresponde con éste y determinar las implicaciones del conocimiento del profesor sobre la construcción.

RESULTADOS

El caso de Pedro

En el primer caso, Pedro se dispuso a construir un rectángulo con GeoGebra cuyas diagonales tuvieran una longitud de 6 cm y lo lados más cortos midieran 3 cm. En su construcción, Pedro procede de siguiente manera (ver Cuadro 1):

Cuadro 1: Secuencia de pasos asociada a la tarea propuesta a Pedro

Paso N°	Primitiva del GeoGebra usada	Descripción del uso
1	Segmento de Longitud Fija	Dibuja el segmento $\overline{AB}$ de 3 cm de longitud.
2	Ángulo dada su Amplitud	Dibuja un ángulo de 45°, con vértice en *A* y lado $\overline{AB}$.
3	Semirrecta que pasa por Dos Puntos	Dibuja el lado $\overline{AB'}$ del ángulo anterior.
4	Circunferencia dados su Centro y Radio	Dibuja una circunferencia centrada en *A* y de radio igual a 6 cm.
5	Intersección de Dos Objetos	Determina el punto *C* de intersección de la semirrecta $\overline{AB'}$ y la circunferencia.
6	Recta que pasa por Dos Puntos	Traza la semirrecta $\overline{DC}$.
7	Recta Paralela	Traza la recta paralela al segmento $\overline{AB}$ que pasa por *C*.
8	Recta Paralela	Traza la recta paralela a la semirrecta $\overline{BC}$ que pase por *A*.
9	Intersección de Dos Objetos	Determina el punto *D* de intersección de las rectas paralelas.
10	Polígono	Dibuja el cuadrilátero *ABCD*.

Para Pedro, este procedimiento le condujo aun dibujo representativo de un rectángulo con las condiciones dadas (ver Figura 2). Sin embargo, al someter el dibujo a la prueba del arrastre, éstese deformó de tal manera que su apariencia resulto en un cuadrilátero evidente no rectángulo, mostrándose así la inconsistencia de la construcción. El análisis de la secuencia permitió identificar una decisión de construcción incorrecta de Pedro, situada en el paso 2.

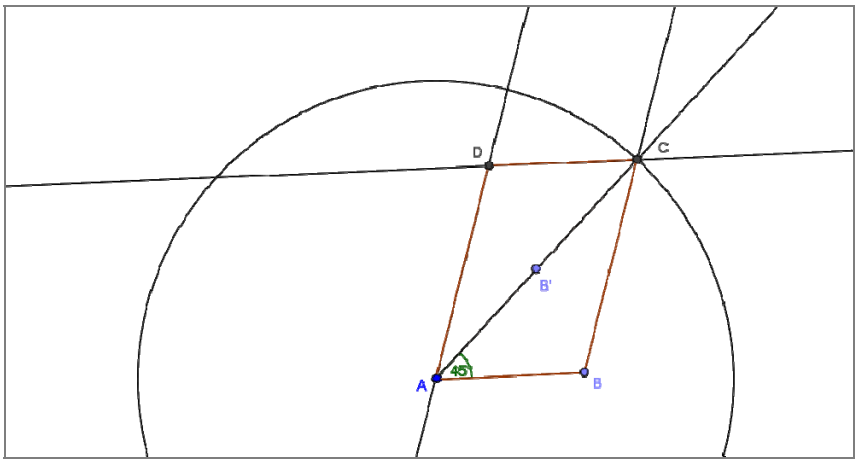


Figura 2. Dibujo de un rectángulo elaborado por Pedro

La explicación dada por éste al respecto permite inferir que el profesor basó su construcción en la idea de que las diagonales del rectángulo bisecan a los ángulos interiores, idea que tiene validez sólo para un tipo de rectángulo especial: el cuadrado. Específicamente, Pedro sostuvo que “en los rectángulos, las diagonales tienen una inclinación de 45° con respecto a cualquiera de los lados contiguos”.

El caso de Julia

En el segundo caso se pedía construir un paralelogramo con cualesquiera medidas posibles para sus lados utilizando el GeoGebra. En su intento, Julia produjo la siguiente secuencia de pasos de construcción (ver Cuadro 2):

Cuadro 2: Secuencia de pasos asociada a la tarea propuesta a Julia

Paso N°	Primitiva del GeoGebra usada	Descripción del uso
1	Recta que pasa por Dos Puntos	Traza la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
2	Nuevo Punto	Determina un punto *C* fuera de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
3	Recta Paralela	Construye la recta que pasa por *C*, paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

Al observar tanto el dibujo (ver Figura 3) como la secuencia de pasos se evidenció que Julia había producido una construcción incompleta,puesto queésta no concluyó conel paralelogramo esperado. La figura 3 muestraúnicamente dos rectas paralelas que evocan la idea de Julia de “lados paralelos”, característica de todo paralelogramo.

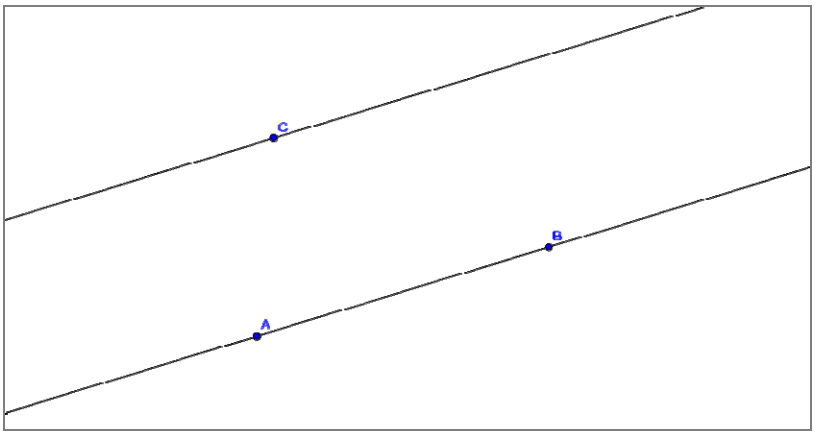


Figura 3. Construcción incompleta de un paralelogramo elaborada por Julia

Sin embargo, esta profesora se declara incapaz de terminar la construcción y desiste de su empeño. En su explicación, Juliareconoce la relación entre las dos rectas paralelas trazadas y un par de lados opuestos del cuadrilátero: “las rectas paralelas contienen a dos de los lados del paralelogramo”. A su vez, ella afirma desconocer cómo continuar su construcción, esto es, seleccionar primitivas del programa que le permitan determinar el par de lados restantes.

DISCUSIÓN

En ambos casos, los profesores ponen de manifiesto el uso de su conocimiento sobre los rectángulos (caso de Pedro) y los paralelogramos (caso de Julia) al momento de establecer la secuencia de pasos de construcción con GeoGebra. Tal conocimiento se muestra vinculado a las imágenes mentales de los profesores sobre los objetos evocados, imágenes que a su vez parecen estar soportados más por las cualidades espaciales de los dibujos asociados que por las propiedades geométricas que le son inherentes. En el caso de Pedro, se evidencia una comprensión errada de las características de las diagonales de todo rectángulo. Esto pudo ser debido a que todas las imágenes mentales que venían a la mente de Pedro cuando éste pensaba en un rectángulo con sus diagonales trazadas pertenecían al tipo de rectángulo denominado “cuadrado”. Vale destacar que las diagonales de un cuadrado están contenidas en las bisectrices de los ángulos rectos que lo componen. La sola interacción con esta clase de dibujos prototípicos pudo llevar a Pedroa considerarla característica de “bisección” de los ángulos opuestos que poseen las diagonales de un cuadrado como propia de todorectángulo. Esto concuerda con los resultados obtenidos por Gutiérrez y Jaime. (1996) y Moriena y Scaglia (2003), quienes concluyeron que estudiantes para maestros y alumnos de educación media poseen imágenes mentales de los objetos basadas sólo en algunos dibujos prototípicos.

En el segundo caso ocurre algo muy parecido, ya que Julia cuenta con una imagen mental del objeto “paralelogramo” con pocas características relevantes como para ser consideradas en su construcción. Al respecto, Julia parece no haber asociado al dibujo la característica del paralelismo de los lados opuestos del cuadrilátero independientemente de la posición que éstas ocupen en el plano. Esta dependencia a las características espaciales del dibujo y la poca capacidad de establecer relaciones entre varios objetos geométricos es reflejada también por Carreño y Climent(2010),en su investigación con estudiantes para profesores de Matemática. Las autoras concluyen en su trabajo que el conocimiento geométrico de los estudiantes es limitado conceptualmente, por lo tanto no poseen redes matemáticas complejas. En ellos la apariencia de las figuras predomina sobre la definición, semejante a lo ocurrido con Julia.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A través de ésta investigación pudimos concluir que el éxito de un proceso de construcción con GeoGebra yace en el hecho de poseer una imagen mental completa del

objeto geométrico que se trate. En este sentido, no basta sólo con la memorización de una definición formal del objeto, sino además se necesita transferir esa información a un contexto más "visual" y transformarla en una herramienta útil para tomar decisiones sobre la secuencia de pasos que permitan elaborar una construcción consistente con los datos iniciales. Lamentablemente, muchos de los profesores que participan en nuestros talleres llegan con imágenes del concepto muy precarias que le imposibilitan la tarea de realizar construcciones en GeoGebra que soporten la prueba del arrastre.

Sería recomendable entoncesinsistir en una mayor interacción con las posibles imágenes de los objetos geométricos que deben ser enseñados, en la que se pueda reconocer las características y propiedades verdaderamente pertinentes para el estudio que se realice, y con el propósito de enriquecer cada vez más las imágenes mentales que se tengan. Esto supone que los profesores sean sometidos a experiencias formativas en las cuales deban reflexionar sobre las características esenciales de los objetos geométricos escolares, como una forma de ampliar su comprensión de estos objetos y garantizar una enseñanza mucho más eficaz con sus alumnos. Éste es uno de los aspectos donde la tecnología aventaja considerablemente al clásico entorno de regla y compás, puesto que con sólo arrastrar alguna construcción por uno de sus puntos es posible, no sólo estudiar la consistencia del dibujo obtenido con la teoría geométrica, sino también mostrar al aprendiz cientos de dibujos del objeto en un corto tiempo y de una manera muy sencilla. Quizás de esto se derive la idea de que mientras más representaciones poseamos de un objeto geométrico, más conocemos al objeto en sí.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Carreño, E. y Climent, N. (2010). Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemática. *PNA*, 5(1), pp. 11-23.
- Fishbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), pp. 139-162.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de magisterio. En J. Giménez y otros (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria*, pp.143-170. Granada: Comares.
- Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática*, pp. 33-48. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Moriena, S. y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15, pp. 5-19.

CONSTRUÇÕES DE MACRO FERRAMENTAS NO GEOGEBRA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Guilherme Fernando Ribeiro - Luciano Ferreira - Talita Secorun dos Santos
guilherme.ribeiro91@hotmail.com - lulindao66@hotmail.com - tsecorun@hotmail.com
Universidade Estadual do Paraná Campus de Campo Mourão - Universidade Estadual de Maringá - Universidade Estadual do Paraná Campus de Campo Mourão - Brasil

Modalidade: Painéis
Nível: Médio
Palavras chave: Geometria, Geometria Euclidiana, Geometria não-euclidiana, Modelo de Poincaré.

Resumo
Este trabalho tem como objetivo elaborar macro ferramentas para a construção da reta hiperbólica, do segmento hiperbólico e para medir a distância hiperbólica bem como seus respectivos testes de funcionamento a fim de colaborar para o ensino e aprendizagem do conteúdo de geometria hiperbólica, uma das geometrias não-euclidianas no software GeoGebra. Estas macro-ferramentas serão necessárias para a construção do modelo de Poincaré. A construção dessas ferramentas é necessária, pois o software é para trabalhar com a geometria euclidiana e a métrica utilizada no modelo não é euclidiano.

GeoGebra, as macro ferramentas e o Modelo de Poincaré

No ano de 2006 foram divulgadas as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná (DCE). As DCE abrangem, no Conteúdo Estruturante Geometrias, a inclusão do tópico geometrias não-euclidianas (PARANÁ, 2008). Segundo Lovis (2009), Bonete (2000), Cabariti (2004), e Santos (2009) parte significativa dos professores de matemática que atuam na Rede Estadual de Ensino do Paraná não possuem o conhecimento necessário para trabalhar com a geometria não-euclidiana. Esses pesquisadores afirmam que as dificuldades do professor em ensinar/trabalhar com a geometria não-euclidiana acontece devido a falta de conhecimento do assunto e de formação necessária.

Considerando essa problemática surgiu a ideia desta pesquisa. Baseado na pesquisa de Ferreira (2011), elaboramos atividades sobre Geometria Hiperbólica, utilizando o *software* GeoGebra. E para realizar essas atividades foi necessária realizar a construção de macro ferramentas.

Utilizamos o GeoGegra por ser um *software* gratuito de matemática dinâmica bem como estar instalado na maioria dos laboratórios de informática das escolas da rede estadual do Estado do Paraná - Brasil, ou seja, acessível à maioria dos alunos. É um

software que reúne geometria, álgebra e cálculo, permitindo construir vários objetos. O GeoGebra permite auxiliar o professor no processo de ensino da geometria.

Diante disso, este trabalho teve como objetivo elaborar macro ferramentas para o ensino e aprendizagem do contéudo de geometria hiperbólica no *software* GeoGebra. As macro ferramentas elaboradas são: reta hiperbólica, segmento hiperbólica e distância hiperbólica.

Com essas macro ferramentas, é possível trabalhar com o modelo de Poincaré, modelo este escolhido entre os vários modelos da geometria hiperbólica pois facilita a visualização de resultados como, por exemplo, a diferença entre a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano e um triângulo hiperbólico, quadrilátero euclidiano e quadrilátero hiperbólico bem como verificar que o disco de Poincaré satistaz todos os postulados da geometria hiperbólica.

No que diz respeito a utilização desse modelo em sala de aula Ferreira (2011), coloca que a utilização do Modelo de Poincaré em sala de aula traz potenciais obstáculos à aprendizagem, já que é um modelo de um espaço ilimitado desenhado numa região limitada. Como os alunos estão acostumados a utilizar a única métrica que conheceram em seus estudos escolares – a métrica euclidiana – isso poderá acarretar um obstáculo à compreensão de que medidas de distância realizadas próximas ao horizonte sejam maiores que as realizadas em regiões próximas ao centro do plano de Poincaré.

Diante disso, como o GeoGebra é um *software* que trabalha com a geometria euclidiana, é necessário criar as macro ferramentas para trabalhar com a geometria não-euclidiana, nesse caso a geometria hiperbólica (modelo de Poincaré).

Antes de iniciar a construção das ferramentas no GeoGebra é importante saber que a base da construção das ferramentas hiperbólicas será uma circunferência de raio 5 unidade. Vale lembrar que se posteriormente for desenhado um plano hiperbólico diferente de raio de 5 unidades as ferramentas hiperbólicas não traçarão a H_Reta, o H_Segmento e a H_Distância.

Construção da macro ferramenta H_Reta e seu teste de funcionamento

Para iniciar utilizando a ferramenta “Círculo dados Centro e Raio” (Figura 1) trace uma circunferência “c” de centro A e raio 5 unidades. Todas as ferramentas serão construídas a partir da circunferência de raio 5 unidades.

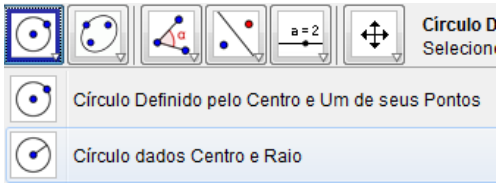


Figura 1 – Ferramenta círculo dados centro e raio

Após construir a circunferência de raio 5 unidade, marque pontos B e C dentro do círculo e utilizando a ferramenta "Inversão" (Figura 2), clique no ponto B e depois na circunferência. Será criado o ponto B', que é o inverso de B em relação a circunferência. Ainda com a ferramenta "Inversão", clique em C e depois na circunferência. Será criado o ponto C', inverso de C em relação a circunferência.

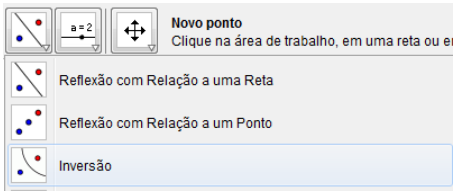


Figura 2 – Ferramenta inversão

Use a ferramenta "Mediatriz" (Figura 3) e trace a mediatriz do segmento BB'. Para fazer isso tome a ferramenta "Mediatriz" clique sobre B e depois sobre B'. A mediatriz será traçada e por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como "a". Trace a mediatriz de CC´. Por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como "b".

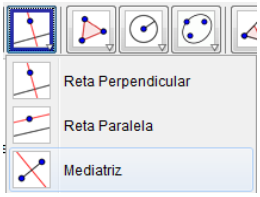


Figura 3 – Ferramenta mediatriz

Use a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" (Figura 4), clique em "a" e depois em "b". O *software* GeoGebra determinará o ponto D de interseção das duas mediatrizes. Use a ferramenta "Círculo Definido pelo Centro e Um de seus Pontos", clique em D e depois em B. Será traçada a circunferência "d" que também passa por B', C e C'. Marque os pontos F e E de interseção das circunferências "c" e "d". Para fazer isso use a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" e clique no "Círculo c" depois no "Círculo d".

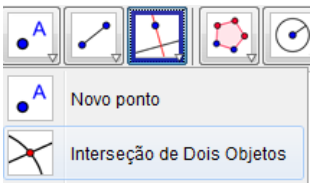


Figura 4 – Ferramenta interseção de dois objetos

Será necessário traçar o arco que liga F a E e que passa no interior do círculo determinado por "c". Para isso, use a ferramenta "Arco circular dados o centro e dois pontos" (Figura 5) e clique primeiramente em D, depois em F e depois em E. Será traçado o arco ligando F a E. Por padrão, o nome desse arco será "e".

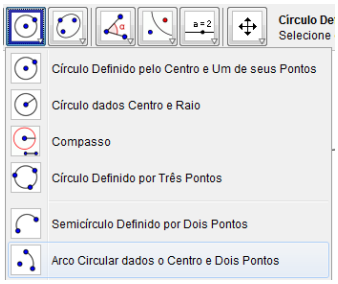


Figura 5 – Ferramenta arco circular dados o centro e dois pontos

Observe se o arco traçado é interior a "c". Para isso, na "Janela de Álgebra" (Figura 6) em "Objetos Dependentes" clique com o lado direito do mouse sobre "e" na última opção "Propriedades..." abrirá uma janela, com várias abas para formatar, sendo uma delas a cor. Selecione a cor desejada , depois na aba "Estilo" coloque a "Espessura da linha" em 7.

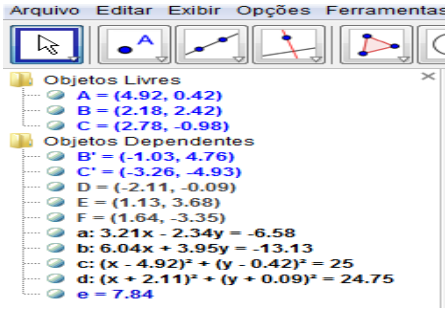


Figura 6 – Janela de álgebra

Para finalizar no canto inferior e direito clique em "Fechar". Veja que a cor da H_Reta foi alterada. Caso o arco "e" seja exterior a "c" você deve com a ferramenta "Arco circular dados o centro e dois pontos" clicar primeiramente em D, depois em E e depois em F. Será traçado o arco ligando F a E. Por padrão, o nome desse arco será "e". Agora sim, observe se o arco traçado é interior a "c". Para isso, troque a cor do arco "e".

Isso ocorre, pois essa ferramenta do *software* GeoGebra traça arcos no sentido anti-horário, então, dependendo de sua construção será necessário apagar o arco traçado e clicar nos pontos na ordem D, E e F.

Escolha, no menu "Ferramentas", a opção "Criar uma Nova Ferramenta...". Como Objeto Final, escolha o arco "e", clique em "Próximo". Como objetos iniciais, escolha "Ponto B" e "Ponto C". Pressione a tecla "Ctrl" para selecionar os dois objetos mediante o uso do mouse, clique em "Próximo". Como nome da ferramenta escolha

"H_Reta", deixe a caixa "Exibir na Caixa de Ferramentas" selecionada e clique em "Concluído".

O *software* GeoGebra criará a ferramenta e a adicionará um novo botão no menu. Escolha, no menu "Ferramentas", a opção "Gerenciamento de Ferramentas...". Selecione a ferramenta recém criada, clique em "Gravar Como", escolha o local no qual a ferramenta será gravada, escolha como nome "Ferramenta H_Reta" e clique em "Gravar". Depois clique em "Fechar" para fechar a "Ferramenta de Gerenciamento". Está pronta sua ferramenta H_Reta. Sugestão: Salve o arquivo com o nome "Construção da ferramenta H_Reta".

Para fazer o teste da ferramenta H_Reta abra o *software* GeoGebra. Em "Exibir" desabilite a opção "Eixo" para que não exiba os eixos coordenados. Em seguida, em "Arquivo→Abrir...", selecione a "Ferramenta H_Reta" e clique em "Abrir". Verifique que a ferramenta foi "carregada", olhe o botão no menu. É dessa maneira que "carregamos" ferramentas pré-programadas no *software* GeoGebra.

Lembre-se que, dessa maneira, quando a ferramenta H_Reta for ser utilizada, será necessário clicar no centro do plano hiperbólico e depois nos dois pontos.

Construção da macro ferramenta H_Segmento e seu teste de funcionamento

Para a construção da ferramenta H_Segmento abra o *software* GeoGebra. Em "Exibir" desabilite a opção "Eixo" para que não exiba os eixos coordenados.

Use a ferramenta "Círculo dados centro e raio" e trace uma circunferência "c" de centro A e raio 5 unidades.

Marque pontos B e C dentro do círculo. Use a ferramenta "Inversão", clique no ponto B e depois na circunferência. Será criado o ponto B', que é o inverso de B em relação a circunferência. Ainda com a ferramenta "Inversão", clique em C e depois na circunferência. Será criado o ponto C', inverso de C em relação a circunferência.

Use a ferramenta "Mediatriz" e trace a mediatriz do segmento BB'. Para fazer isso tome a ferramenta "Mediatriz" clique sobre B e depois sobre B'. A mediatriz será traçada e por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como "a". Trace a mediatriz de CC´. Por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como "b".

Use a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", clique em "a" e depois em "b". O *software* GeoGebra determinará o ponto D de interseção das duas mediatrizes. Use a ferramenta "Arco circular dados o centro e dois pontos" e clique primeiramente em D,

depois em B e depois em C. Será traçado o arco ligando C a B. Por padrão, o nome desse arco será “d”.

Observe se o arco traçado é interior a “c”. Caso o arco “e” seja exterior a “c” você deve refazer este último passo. Para isso tome novamente a ferramenta “Arco circular dados o centro e dois pontos” e clique primeiramente em D, depois em C e depois em B. Será traçado o arco ligando C a B. Por padrão, o nome desse arco será “d”. Agora sim, observe se o arco traçado é interior a “c”.

Na “Janela de Álgebra” em “Objetos Dependentes” clique com o lado direito do mouse sobre “d” na última opção “Propriedades...” abrirá uma janela, com várias abas para formatar, sendo uma delas a cor. Selecione a cor desejada, depois na aba “Estilo” coloque a “Espessura da linha” em 7. Para finalizar no canto inferior e direito clique em “Fechar”. Veja que a cor do H_Segmento foi alterada.

Escolha, no menu “Ferramentas”, a opção “Criar uma Nova Ferramenta...”. Como Objeto Final, escolha o arco “d” clique em “Próximo”. Como objetos iniciais, escolha “Ponto B” e “Ponto C”. Pressione a tecla “Ctrl” para selecionar os dois objetos mediante o uso do mouse, clique em “Próximo”. Como nome da ferramenta escolha “H_Segmento”, deixe a caixa “Exibir na Caixa de Ferramentas” selecionada e clique em “Concluído”. O *software* GeoGebra criará a ferramenta e a adicionará um novo botão no menu.

Escolha, no menu “Ferramentas”, a opção “Gerenciamento de Ferramentas...”. Selecione a ferramenta recém criada, clique em “Gravar Como”, escolha o local no qual a ferramenta será gravada, escolha como nome “Ferramenta H_Segmento” e clique em “Gravar”. Depois clique em “Fechar” para fechar a “Ferramenta de Gerenciamento”. Está pronta sua ferramenta H_Segmento. Sugestão: Salve o arquivo com o nome “Construção da ferramenta H_Segmento”.

Construção da macro ferramenta H_Distância e seu teste de funcionamento

Para a construção da ferramenta H_Distância abra o *software* GeoGebra. Em “Exibir” desabilite a opção “Eixo” para que não exiba os eixos coordenados. Use a ferramenta “Círculo dados centro e raio” e trace uma circunferência “c” de centro A e raio 5 unidades. Marque pontos B e C dentro do círculo. Use a ferramenta “Inversão”, clique no ponto B e depois na circunferência. Será criado o ponto B’, que é o inverso de B em relação a circunferência. Ainda com a ferramenta “Inversão”, clique em C e depois na

circunferência. Será criado o ponto C', inverso de C em relação a circunferência.

Use a ferramenta "Mediatriz" e trace a mediatriz do segmento BB'. Para fazer isso tome a ferramenta "Mediatriz" clique sobre B e depois sobre B'. A mediatriz será traçada e por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como "a". Trace a mediatriz de CC´. Por padrão, o *software* GeoGebra nomeará essa reta como "b".

Use a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", clique em "a" e depois em "b". O *software* GeoGebra determinará o ponto D de interseção das duas mediatrizes. Use a ferramenta "Círculo Definido pelo Centro e Um de seus Pontos", clique em D e depois em B. Será traçada a circunferência "d" que também passa por B', C e C'. Marque os pontos F e E de interseção das circunferências "c" e "d". Para fazer isso use a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" e clique no "Círculo c" depois no "Círculo d". Altere, caso precisar, as posições de B e C para que F esteja entre B e B´ e E esteja entre C e C´.

Escreva no campo "Entrada" a seguinte linha: r=(2^((Distância[B,E]*Distância[C,F]) / (Distância[B,F]*Distância[C,E])))-2 em seguida aperte a tecla "Enter". Aparecerá na coluna algébrica o nome "r" seguido de um número, esse número será a distância Hiperbólica entre B e C. Mova o ponto B para locais próximos do ponto F e observe que a distância Hiperbólica aumenta. Mova B para local próximo de C e observe que a distância Hiperbólica diminui.

Em Ferramentas clique em "Criar uma Nova Ferramenta...", escolha como objeto final o "Número r" e como objetos iniciais os pontos B e C. Escolha como nome "Dist_hip". Escolha, no menu "Ferramentas", a opção "Gerenciamento de Ferramentas...". Selecione a ferramenta recém criada, clique em "Gravar Como", escolha o local no qual a ferramenta será gravada, escolha como nome "Ferramenta H_Distância" e clique em "Gravar". Depois clique em "Fechar" para fechar a "Ferramenta de Gerenciamento". Está pronta sua ferramenta H_Distância. Sugestão: Salve o arquivo com o nome "Construção da ferramenta H_Distância".

Para fazer o teste da ferramenta H_Distância abra o *software* Geogebra. Em "Exibir" desabilite a opção "Eixo" para que não exiba os eixos coordenados. Em seguida, em "Arquivo→Abrir...", selecione a "Ferramenta H_Distância" e clique em "Abrir". Verifique que a ferramenta foi "carregada", olhe o botão no menu como podemos observar na Figura 7.

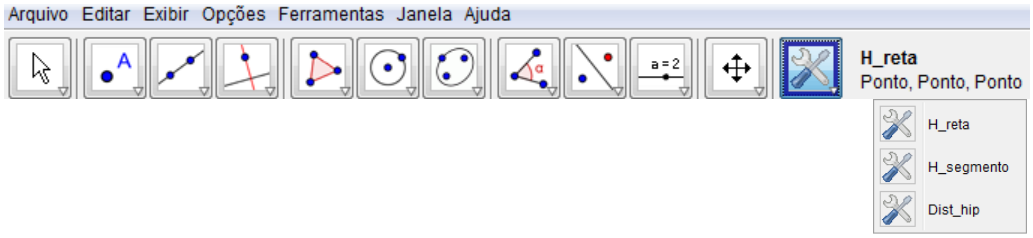


Figura 7 – Exemplo de todas as ferramentas construídas carregadas no GeoGebra

Considerações Finais

Podemos concluir que o *software* GeoGebra permite trabalhar com a Geometria Hiperbólica, em especial o Modelo de Poincaré, por meio da construção de ferramentas hiperbólicas (macro ferramentas) que substituem o menu euclidiano do mesmo. As ferramentas hiperbólicas tornaram-se novas ferramentas do GeoGebra, enriquecendo o ambiente de trabalho além de possibilitar novas situações para o ensino da geometria não-euclidiana, em especial a Geometria Hiperbólica, ou seja, conseguimos criar um menu hiperbólico.

Referências bibliográficas

BONETE, Izabel P. (2000). *As Geometrias Não-Euclidianas em Cursos de Licenciatura: Algumas Experiências.* Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas.

CABARITI, Eliane. (2004). *Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado.* (Dissertação Mestrado em Educação Matemática). Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, São Paulo.

FERREIRA, Luciano. (2011). *Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica: "construção do Plano de Poincaré" com o uso do software Geogebra*. (Dissertação Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática). Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná.

LOVIS, Karla Aparecida. (2009). *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica:* o que pensam e o que fazem os professores. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Paraná.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do. *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica Matemática.* Curitiba, 2008.

SANTOS, Talita Secorun dos. (2008). *A inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica.* Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná**.**

CONSTRUINDO O TRIÂNGULO HIPERBÓLICO NO *SOFTWARE* GEOGEBRA: UMA EXPERIÊNCIA COM FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Guilherme Fernando Ribeiro - Luciano Ferreira - Talita Secorun dos Santos
guilherme.ribeiro91@hotmail.com - lulindao66@hotmail.com - tsecorun@hotmail.com
Universidade Estadual do Paraná Campus de Campo Mourão - Universidade Estadual de Maringá - Universidade Estadual do Paraná Campus de Campo Mourão - Brasil

Modalidade: Comunicação
Nível: Formação e atualização docente
Palavras chave: Geometria Euclidiana, Geometria não-euclidiana, Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.

Resumo

Neste trabalho relatamos uma experiência desenvolvida com alunos do 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (FECILCAM), da cidade de Campo Mourão, Paraná, Brasil. O objetivo principal desse trabalho foi analisar como acadêmicos de matemática aceitariam a ideia da soma dos ângulos internos de um H_Triângulo da Geometria Hiperbólica ser menor que 180º, ao construírem tal triângulo com o software GeoGebra e compará-lo com o triângulo Euclidiano. Este texto integra um trabalho maior que visa elaborar e aplicar atividades acerca do conteúdo de Geometria Hiperbólica na formação inicial de professores de matemática, utilizando o GeoGebra. Neste artigo, iremos descrever brevemente as 14 atividades aplicadas aos acadêmicos e apresentaremos as análises da construção da 14ª atividade que trata da construção do H_Triângulo. Para este trabalho, analisamos como os alunos passaram a pensar sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, com base na construção do H_Triângulo no GeoGebra. A ideia de estudar a Geometria Hiperbólica surge após o contéudo de geometria não-euclidiana ser incluso no Currículo da Educação Básica por meio das DCE, Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica, no final de 2006.

Introdução

No final do ano de 2006 foi divulgada no Estado do Paraná as Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica (DCE), que trouxe no item Conteúdo Estruturante Geometria o tema Tópico Geometrias não-euclidianas.

No entanto, a inclusão deste tema torna-se questionável ao considerarmos as reais condições para o desenvolvimento desse conteúdo em sala de aula. Primeiramente, conforme aponta Santos (2009), grande parte dos professores da Educação Básica apresentam dificuldades com a própria Geometria Euclidiana e desconhecem as Geometrias não-euclidianas.

A falta de preparo dos professores para trabalhar com as Geometrias não-euclidianas também foi denunciada por Caldatto (2011), que aponta para a falta de materiais de apoio para que os professores possam trabalhar com o tema e a falta de tempo para abordar todos os conteúdos trazidos pelas DCE.

Segundo Lovis (2009), Bonete (2000), Cabariti (2004), Santalo (2006) e Santos (2009),

parte significativa dos professores de matemática que atuam na Rede Estadual de Ensino do Paraná não possuem o conhecimento necessário para trabalhar com a Geometria não-euclidiana. Esses pesquisadores afirmam que as dificuldades do professor em ensinar/trabalhar com a Geometria não-euclidiana acontece devido a falta de conhecimento do assunto e de formação necessária.

Considerando toda essa problemática, surgiu a ideia desta pesquisa. Baseados na pesquisa de Ferreira (2011), elaboramos atividades sobre Geometria Hiperbólica, utilizando o *software* GeoGebra, e aplicamos em uma turma de formação inicial em matemática.

A importância de se trabalhar a Geometria Hiperbólica no Ensino Médio é ressaltada pelas DCE. Tal documento aponta que o estudo das noções de Geometrias não-euclidianas aprofunda-se ao abordar a Geometria dos Fractais, Geometria Hiperbólica e Elíptica (PARANÁ, 2008).

Neste trabalho, iremos descrever 14 atividades aplicadas aos acadêmicos de matemática e apresentar as análises da 14ª Atividade: Construindo o H_Triângulo. Baseados nas DCE, elaboramos a 14ª Atividade que tinha como objetivo principal fazer um comparativo com a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica. Nesse trabalho, pretendíamos investigar como os acadêmicos aceitariam que ao construir o H_Triângulo a soma dos ângulos internos não era 180º.

Metodologia

A aplicação das atividades foi realizada na cidade de Campo Mourão, no Estado do Paraná, na Universidade Estadual do Paraná - Campus de Campo Mourão (UNESPAR/FECILCAM), no ano de 2011. Os sujeitos participantes da pesquisa foram 16 alunos do 3º ano do curso de Licenciatura de Matemática da UNESPAR/FECILCAM. Na apresentação da História da Geometria, utilizamos 4 aulas de 50 minutos cada. Já na aplicação das atividades, foram utilizadas 12 aulas de 50 minutos cada.

Foi solicitado que cada aluno trouxesse seu próprio notebook com o *software* GeoGebra instalado. Os pesquisadores realizaram uma explicação acerca da História da Geometria, fazendo uma breve "viagem" histórica desde a construção da Geometria Euclidiana até o surgimento das Geometrias não-euclidianas. Foram apresentadas brevemente a

Geometria Elíptica, a Geometria dos Fractais, a Geometria Topológica, a Geometria Projetiva e, por fim, a Geometria Hiperbólica.

Como forma de familiarização do sujeito com o *software* GeoGebra, foram aplicadas cinco atividades iniciais. A 1ª Atividade tratava da representação do primeiro postulado de Euclides que diz que: Para todo ponto *A* e todo ponto *B* diferente de *A*, existe uma única reta *a* que passa por A e B. A 2ª Atividade tratava do segundo postulado de Euclides, que diz que: Um segmento retilíneo pode sempre ser prolongado. Já a 3ª Atividade era a representação do terceiro postulado de Euclides, que diz que: Existe uma única circunferência com centro e raio dado. Para a 4ª Atividade, ficou a representação do quarto postulado de Euclides: Todos os ângulos retos são iguais. Na 5ª Atividade, sugerimos a representação do quinto postulado de Euclides: Se uma reta *c* corta duas outras retas *a* e *b* (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores (α e β) de um mesmo lado de *c* é menor que dois retos, então *a* e *b*, quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de *c*. A Figura 1, trata da ilustração do quinto postulado de Euclides.

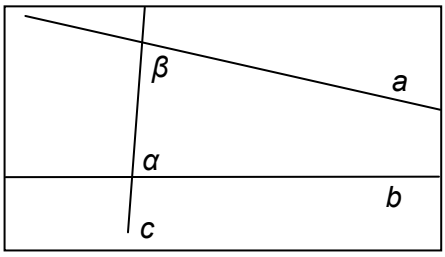


Figura 1 – Quinto postulado de Euclides

Baseado em Ferreira (2011), os sujeitos participantes da pesquisa construíram as ferramentas necessárias para a elaboração do Plano de Poincaré. A 6ª Atividade tratou da construção da ferramenta H_Reta. A 7ª Atividade ficou com o título Testando a ferramenta H_Reta. A 8ª Atividade trazia a construção da ferramenta H_Segmento. A 9ª Atividade era denominada Testando a ferramenta H_Segmento. A 10ª Atividade foi a construção da ferramenta H_Distância. E, por fim, a 11ª Atividade ficou intitulada como Testando a ferramenta H_Distância. As construções de macro ferramentas e seus respectivos testes de funcionamento foram necessários para a construção do modelo do Plano de Poincaré. Essa etapa exigiu dos sujeitos muita atenção, sendo utilizadas duas aulas para as construções dessas ferramentas e seus respectivos testes.

A 12ª Atividade tratou da construção do axioma hiperbólico. O Axioma Hiperbólico, segundo Greenberg (1973, p.148), diz que: "Na Geometria Hiperbólica existe uma reta *l* e um ponto P, não pertencente a *l*, tal que existe pelo menos duas retas que passam por

P e são paralelas a reta *l''*. A 13ª Atividade tratou da comprovação desse Axioma Hiperbólico. Essas duas atividades foram as que os sujeitos mais sentiram dificuldades.

A 14ª Atividade, que tinha como nome Construindo o H_Triângulo, teve como objetivo propor um comparativo com a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica. Existe um teorema da Geometria Euclidiana que trata acerca da soma dos ângulos internos de triângulos: "A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC é igual a 180 graus". Essa atividade visava mostrar aos acadêmicos que tal teorema não é válido na Geometria Hiperbólica.

Nesse trabalho, iremos analisar/investigar como e se os alunos aceitaram a 14ª Atividade: Construindo o H_Triângulo, ou seja, se eles aceitaram que ao construir o H_Triângulo a soma dos ângulos internos não é 180º.

Para a análise dos dados coletados, codificamos os participantes da pesquisa. Como o número de participante foi um total de 16, temos então os participantes codificados de 1 a 16, ou seja, A.1 (aluno um) para as respostas do primeiro participante, A.2 (aluno dois) para o segundo participantes,..., A.16 (aluno dezesseis). Essa codificação foi realizada de maneira aleatória. Vale lembrar que cada participante teve a mesma codificação no decorrer da análise.

Analisando a atividade H_Triângulo

Nessa atividade, pretendíamos que os alunos fizessem uma comparação com a soma dos ângulos interno de um triângulo na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica. E a partir daí, passassem a aceitar a existência de uma Geometria não-euclidiana que possibilita que a soma dos ângulos internos de um triângulo seja menor que 180º.

Esperávamos encontrar uma resistência natural em aceitar o H_Triângulo, já que a Geometria Euclidiana é posta na escola como uma verdade única e incontestável. No entanto, esperávamos também que a utilização do *software* facilitasse a aceitação de tal fato pelos sujeitos participantes da pesquisa.

Durante a apresentação da parte histórica e dos modelos da Geometria Hiperbólica, houve uma resistência dos alunos no sentido de aceitar um triângulo cuja a soma fosse menor que 180º. Para nós o uso do *software* poderia contribuir para o entendimento e melhor aceitação do H_Triângulo.

Ao entregar a décima quarta atividade aos alunos e expor o que seria realizado, solicitamos que ao término desta atividade os alunos salvassem o arquivo com o nome "14ª Atividade – Construindo o H_Triângulo". Nessa atividade, os alunos tiveram a

oportunidade de calcular qual a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana e um H_Triângulo na Geometria Hiperbólica. O *software* GeoGebra possibilitou que eles pudessem movimentar as figuras e comparar os resultados.

Não estipulamos um tempo máximo para realização, visto que cada acadêmico participante já tinha constituído certa habilidade em relação ao *software* GeoGebra, no sentido de manusear as ferramentas.

Ao término da 14ª Atividade – Construindo o H_Triângulo, os alunos se depararam com a seguinte questão dada em um questionário: *No H_Triângulo a soma dos ângulos internos é igual a 180º? E no triângulo euclidiano? Como você explica esse acontecimento?* A Tabela 1 indica a análise da questão indagada na Construção do H_Triângulo.

Buscamos relacionar o número de alunos que chegaram a basicamente uma mesma resposta. Em seguida, foi realizada a classificação das respostas, de acordo com suas especificidades. Na Tabela 1 apresentam-se também alguns excertos de respostas dadas pelos sujeitos. Por fim, na última coluna têm-se os comentários.

Tabela 1 - Análise da questão da Construção do H_Triângulo

1 – No H_Triângulo a soma dos ângulos internos é igual a 180º? E no triângulo euclidiano? Como você explica esse acontecimento?			
Respostas dos alunos de acordo com a codificação	**Justificativa dada pelos acadêmicos**	**Excertos de respostas dadas pelos sujeitos**	**Comentários**
Quatro alunos afirmaram que o resultado da soma dos ângulos internos de um H_Triângulo é menor que 180º. Disseram que no triângulo euclidiano a soma dos ângulos internos é igual a 180º. A.3 – A.6 – A.13 -	Dois não souberam explicar a resposta. A.3 – A.16 Um explicou que seria por os lados não serem retos. A.6 Um Explicou que no plano euclidiano as retas tem um formato diferente que no	A.3 - *"No H_Triângulo a soma dos ângulos interno é menor que 180º. E no triângulo euclidiano é 180º."* A.13 – *"No H_Triângulo a soma foi de 132,76º, menor que 180º e no triângulo euclidiano foi 180º,*	Estes alunos conseguiram de alguma forma aceitar a existência de retas com um formato diferente da reta Euclidiana. Eles aceitaram o triângulo cuja soma dos ângulos internos era menos que 180º.

A.16	hiperbólico. A.13	*pois as retas tem formato diferente"*	
Dez alunos colocaram que a soma dos ângulos internos no H_Triângulo não é igual a 180º. Que no triângulo euclidiano é 180º. A.1 - A.2 – A.5 – A.7 – A.8 – A.9 – A.10 – A.12 – A.14 – A.15	Dois não souberam explicar a resposta. A.14 – A.15 Cinco explicaram que como a reta é uma curva, a soma dos ângulos formados varia. A.1 - A.2 – A.9 – A.10 – A.12 Dois explicaram que no triângulo euclidiano a soma dos ângulos internos é 180º e no triângulo não-euclidiano isso não acontece. A.5 – A.8 Um explicou que a soma é diferente pelo fato dos ângulos serem calculados através das aberturas de retas tangentes. A.7	A.8 – *"No Triângulo Euclidiano a soma dos ângulos interno é 180º obrigatoriamente. Já no triângulo, digo H_Triângulo, essa soma não necessita ser 180º para ser considerado um triângulo."*	As respostas destes alunos mostram ainda uma certa insegurança em relação ao que eles estão vendo na tela do computador e o que eles conhecem por retas.
Dois alunos declararam não saber o que responder. A.4 – A.11		A.4 – *"Não sei."*	Isso mostra que ainda existiam alunos que não compreendiam a construção da reta hiperbólica.

Mesmo os alunos estando familiarizados com o *software* GeoGebra, eles apresentaram dificuldade para realizar a 14º atividade. Alguns alunos se mostravam atentos e motivados, já outros demonstravam certo desinteresse.

Todos os participantes precisaram de ajuda, solicitando aos pesquisadores esclarecimentos acerca de suas dúvidas, algumas referentes à construção, outras

referentes às teorias que envolviam a construção. O objetivo dessa atividade era construir um H_Triângulo e verificar a sua soma dos ângulos internos, bem como fazer o comparativo com o triângulo euclidiano. Para a construção do H_Triângulo, os acadêmicos utilizaram ferramentas do *software* e conceitos como eixo, ponto, círculo, reta tangente, segmento definido por dois pontos, ângulos e vértices. Isso mostra que, ao se trabalhar com as Geometrias não-euclidianas, é necessário um sólido conhecimento da Geometria Euclidiana.

Essas ferramentas e esses conceitos devem ser concebidos de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir, podendo ele então adquirir novos conhecimentos.

Na Figura 2, temos a construção do H_Triângulo. Essa construção foi realizada pelo participante A.13.

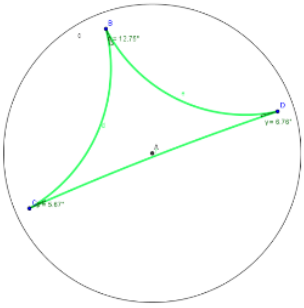


Figura 2 – Construção do H_Triângulo

Após a construção da 14ª atividade, percebemos que todos os alunos participantes da pesquisa conseguiram visualizar que a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Hiperbólica é menor que 180º, porém nem todos aceitaram essa Geometria, ficando ainda fortemente presente a ideia de uma geometria única, aquela fortemente propagada na escola.

Considerações Finais

Considerando as dificuldades enfrentadas para a inclusão efetiva das Geometrias não-euclidianas na Educação Básica, pretendíamos nesse trabalho elaborar atividades de Geometria Hiperbólica baseadas em Ferreira (2011), e aplicar tais atividades utilizando o *software* GeoGebra na formação inicial de professores de matemática.

Nessa pesquisa, pretendíamos analisar se os acadêmicos, ao construírem o triângulo da Geometria Euclidiana e o H_Triângulo da Geometria Hiperbólica no GeoGebra, conseguiriam aceitar que na Geometria Hiperbólica a soma dos ângulos internos de um triangulo não é 180º. Escolheu-se o GeoGebra, por ser um *software* livre de geometria dinâmica, bem como por ele estar implantando na rede Paraná Digital, que é um projeto

de inclusão digital das escolas públicas do Estado do Paraná. Este projeto visa disponibilisar meios educacionais por meio de computadores e da Internet, com o objetivo de melhorar a qualidade do ensino.

Após as análises das respostas da 14ª atividade, podemos dizer que o GeoGebra foi um facilitador, já que ele possibilitou que os acadêmicos visualizassem e movessem os triângulos e observassem a soma dos ângulos internos dos triângulos. Com isso, apenas 2 (dois) alunos não conseguiram aceitar e compreender o H_Triângulo e a soma de seus ângulos internos.

Temos que relacionar as aulas de matemática com *softwares*, como o Geogebra, em busca de um ensino e aprendizado mais em concordância com as inovações tecnológicas atuais, desde que estas inovações tragam contribuição para a qualidade de nosso ensino de matemática.

Referências bibliográficas

BONETE, Izabel P. *As Geometrias Não-Euclidianas em Cursos de Licenciatura: Algumas Experiências.* Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas, 2000. 240 f.

CABARITI, Eliane. *Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado.* 131 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

CALDATTO, Marlova Estela. *O processo coletivo de elaboração das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Paraná e a inserção das Geometrias Não Euclidianas.* 261 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2011.

FERREIRA, Luciano. *Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica: "construção do Plano de Poincaré" com o uso do software Geogebra.* 293 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2011.

GREENBERG, Marvin Jay. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries:* Development and History. 2. ed. California: Santa Cruz, 1973. 400p.

LOVIS, Karla Aparecida. *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica:* o que pensam e o que fazem os professores. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Paraná 2009. 147f.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do. *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.* Curitiba, p. 84, 2008.

SANTALO, Luis A. Matemática para não-matemáticos. In: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Org.). *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas.* Tradução: Juan Acuna Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006.

SANTOS, Talita Secorun dos. *A inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica.* 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2008.

CORES DINÂMICAS COM O GEOGEBRA: PERSPECTIVAS DE INCREMENTAR A ABORDAGEM NO ESTUDO DE FUNÇÕES

Diego Lieban - Daiane Pertile
diego.lieban@bento.ifrs.edu.br - daiane.pertile@bento.ifrs.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul,
Câmpus Bento Gonçalves, Brasil

Modalidad: C.
Nivel educativo: Medio
Palavras-chave: Cores Dinâmicas; Investigação; Inequações

Resumo
O uso de softwares para o ensino e aprendizagem de matemática, apesar de estar cada vez mais em voga, carece ainda de iniciativas inovadoras e que promovam estratégias que explorem os limites de seus recursos e potencialidades. Diante das dificuldades apresentadas no estudo de funções, pretende-se, com este trabalho, propor uma alternativa didática apoiada na tecnologia a fim de tornar mais evidente o comportamento de dependência entre duas variáveis. Para tanto, há uma tentativa de incrementar a abordagem deste conceito tão importante, explorando relações estabelecidas por inequações. A propriedade de cores dinâmicas que possuem os objetos criados com o GeoGebra permite definir a pigmentação de pontos a partir de suas coordenadas e expressões algébricas (atreladas às suas posições analíticas). Diferente do modelo como são tradicionalmente exploradas as funções reais (a partir de suas leis de formação e de seus gráficos), a ideia é desenvolver e avaliar uma prática em que o usuário explore o resultado, plotado por um conjunto de pontos, procurando compreender a relação entre suas coordenadas. Neste sentido, com análise em oficinas a serem implementadas pelos pesquisadores, pretende-se avaliar a pertinência e exequibilidade da proposta em vista de contribuir para a discussão do ensino de funções.

INTRODUÇÃO

Pesquisas na área de ensino de Cálculo têm sustentado que o conceito de função tem sido uma das principais fontes de obstáculos epistemológicos para a aprendizagem dos conceitos básicos desta disciplina (SIERPINSKA, 1987; CABRAL, 1998; REZENDE, 2003a). Cabral (1998), por exemplo, revela-nos que as dificuldades dos estudantes na resolução de problemas de taxas relacionadas e problemas de otimização estão diretamente relacionados ao fato de não conseguirem “enxergar” as quantidades variáveis envolvidas no problema dessa natureza nem tampouco a relação funcional entre elas. Já Freitas (2002) analisou o desempenho de alunos do 1º ano do Ensino Médio, ao resolverem equações e sistemas de equações polinomiais do 1º grau, conteúdo que precede o estudo de funções. O autor considera que, em geral, as equações do 1º grau são resolvidas pelo método da transposição e que este método, quando

aplicado mecanicamente, pode levar os alunos a cometerem erros. Isto porque não há uma preocupação em entender o processo e sim, "chegar à resposta".

No âmbito da Educação Matemática, discutem-se alguns vieses para contornar situações desse tipo, entre os quais, o uso de material concreto, o princípio da balança, a modelagem de problemas, a análise de erros, o recurso de jogos e a utilização de *softwares* (foco deste trabalho). Observa-se, entretanto, no contexto escolar em que estamos inseridos atualmente, que grande parte dos professores de Matemática da Educação Básica e Superior, embora reconheçam a importância do uso de *softwares* enquanto possibilidade para o ensino de vários conteúdos, ainda não tem, muitas vezes, domínio instrumental suficiente da tecnologia para desenvolverem suas práticas. Ou seja, não basta apenas o professor disponibilizar de ferramentas se a aplicação delas não for pensada e estudada previamente.

Além da análise e adequação do recurso, é fundamental que reforcemos sempre a reflexão sobre os papéis do professor e do aluno diante da tecnologia: nem deixar o aluno liberto demais (a ponto de sentir-se desassistido), nem fazer por ele as etapas que contribuam significativamente para o seu aprendizado (instruindo com uma série de "passo a passo", por exemplo).

TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A tecnologia é um setor que evolui rapidamente. Ela está cada vez mais presente no cotidiano de todos, em casa, no trabalho, na rua e particularmente nos ambientes e meios de ensino. Permitir que os alunos tenham condições de avaliar e rever seus procedimentos com respostas rápidas talvez seja um dos principais benefícios do uso de softwares interativos em sala de aula.

Segundo Silva (2000),

> Na modalidade computacional interativa permitida pelas novas tecnologias informáticas, há mudança significativa na natureza da mensagem, no papel do emissor e no estatuto do receptor. A mensagem torna-se modificável na medida em que responde às solicitações daquele que a consulta, que a explora, que a manipula. (p.11)

Fazer uso da tecnologia para trabalhar conceitos diversos - seja em matemática ou qualquer outra área - em prol de uma aprendizagem significativa tem sido amplamente

defendido por diversos autores. Sobre essa tendência, Zorzan (2007) preconiza o recurso da tecnologia, alegando que:

> Atualmente, em pleno século XXI, quando as máquinas possibilitam informações e soluções em um tempo reduzido, não é mais possível que a escola continue a desmerecer ou desconsiderar a tecnologia em suas propostas pedagógicas. [..] a escola não pode abrir mão dos novos recursos tecnológicos disponíveis, do contrário, tornar-se-á um espaço obsoleto e desvinculado das reais necessidades oriundas da inteligência humana. (p.10)

Porém, a inserção do recurso tecnológico em sala de aula deve ser cuidadosa, sob pena de tornar-se apenas um instrumento de dispersão e não atingir seus objetivos propostos. Ao refletirmos sobre a utilização do software GeoGebra como facilitador para a construção do conhecimento, é necessário e fundamental pensar em como fazer uso desta ferramenta para quebrar a "tradição" de decorar fórmulas. Possibilitar um aprendizado geométrico e algébrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos, é uma oportunidade de o aluno deixar de ser apenas um "burocrático copiador", como muitas vezes vemos nas escolas. Deste modo, é possível introduzir o conceito matemático desses elementos a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa de geometria dinâmica (GD), surgindo daí o processo de argumentação e dedução. Corroborando com este panorama Zorzan (2007) sustenta, ainda, que:

> [...] os recursos tecnológicos desse contexto precisam ser estudados, analisados, para servirem de constructos a novas maneiras e possibilidades de constituição do saber escolar. De modo especial, o ensino da matemática não pode mais ater-se a um ensino memorístico, no qual se enfatizam as tabuadas e o exercício de cálculos, pois essas atividades não atendem às necessidades sociais. Assim, diante do desenvolvimento do pensamento, do conhecimento, da produção e da cultura, o ensino da matemática, como também das outras áreas do conhecimento, necessita de transformações nos aspectos didático-metodológicos. (p.11)

O professor, diante desta perspectiva, deve assumir um papel de parceiro, conduzindo atividades que visem a exploração e a descoberta e favoreçam a criatividade e o envolvimento do aluno com o assunto em questão. Assim, em uma prática em que o sujeito participa e percebe os resultados de suas ações, e mais, faz uso desta interação para o desenvolvimento do conhecimento, entende-se haver uma aprendizagem sólida e

consistente. Com isso, o professor pode, e deve, incentivar o espírito investigativo do aluno, solicitando ao final uma justificativa para as relações encontradas (uma demonstração), podendo ser mais (ou menos) formal de acordo com o nível de aprendizagem do aluno.

O estudo de funções da forma como é habitualmente trabalhado, na maioria das vezes não permite que o aluno visualize com clareza propriedades inerentes do tratamento variacional que está sob análise. Diante desta realidade, Rezende, Pesco e Bortolossi (2012), advertem:

> Reafirmamos aqui a necessidade de se resgatar o contexto dinâmico no estudo do conceito de função. Nesse sentido, o uso de novas tecnologias, com destaque para os softwares de matemática dinâmica, como é o caso do GeoGebra, tem-se mostrado bem conveniente.

Os argumentos favoráveis ao uso desses softwares são bem diversificados. Experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, argumentar e deduzir propriedades matemáticas são, em verdade, ações desejáveis no ensino de matemática em qualquer domínio de conhecimento e nível de ensino. Nesse sentido, essas ferramentas computacionais são bem-vindas no ensino das funções reais. Em particular, o software GeoGebra, com excelente interface dinâmica entre os sistemas algébrico e geométrico de representações, se apresenta como uma poderosa ferramenta para o estudo do comportamento variacional das funções reais.

CONCEPÇÃO DA PROPOSTA

A utilização de cores nas representações dos mais diversos tipos tem, além do caráter estético, especial valor por permitir que se faça, com clareza, uma distinção na identificação dos diferentes elementos envolvidos. Em geometria dinâmica, especialmente com o *software* GeoGebra é comum que os desenvolvedores de arquivos voltados para o ensino de matemática explorem o recurso de colorir os objetos existentes, tanto pelo apelo visual quanto por seu potencial didático. Para confirmar esta realidade, basta acessar o GeoGebraTube (http://www.geogebratube.org/), repositório de materiais educacionais desenvolvidos com o *software*. Entretanto poucos são os que fazem uso do recurso de cores dinâmicas, que permite, por exemplo, que os elementos mudem de cor, de acordo com sua posição na tela. Com essa ferramenta e inspirada em uma brincadeira de infância – a de passar um giz de cera sobre uma moeda coberta por

uma folha de papel branca a fim de revelar qual era a face coberta – é que pensou-se em uma atividade que tivesse um aspecto especulativo e, de algum modo, lúdico.

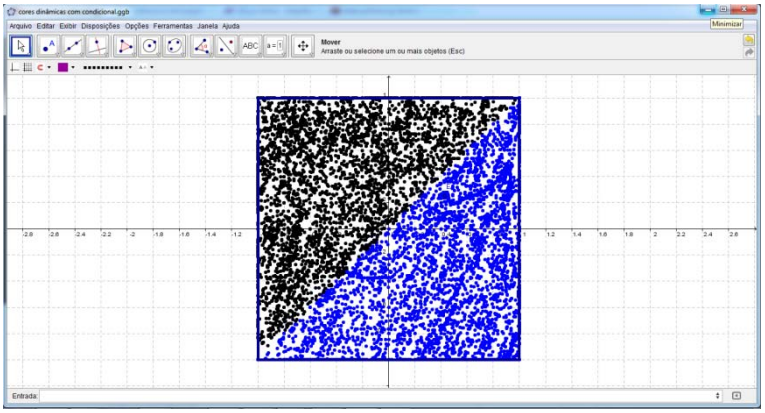
OBJETIVOS

A presente proposta tem por objetivo, além de incrementar a abordagem no estudo de funções, avaliar a contribuição de arquivos desenvolvidos com geometria dinâmica (e princípios de cores dinâmicas) como recurso no processo de ensino e aprendizagem em matemática. Com uma alternativa didática que atenda às dificuldades apresentadas, pretende-se atrair o aluno pelo caráter investigativo e desafiador da proposta. A ideia é que as atividades desenvolvidas agucem um certo sentido de curiosidade dos alunos, fazendo com que eles sejam despertados para um processo de conjecturação, tão importante para a formação matemática, em diferentes níveis.

METODOLOGIA

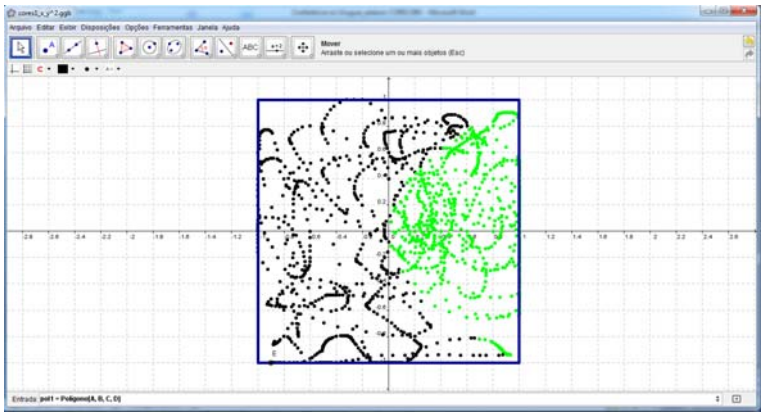
O uso de *softwares* para o ensino e aprendizagem de matemática, apesar de estar cada vez mais em voga, carece ainda de iniciativas inovadoras e que promovam estratégias que explorem os limites de seus recursos e potencialidades. De fato, encontrar uma dinâmica capaz de seduzir o aluno e que, além disso, tenha um potencial educativo matemático não é tarefa fácil. Martin Gardner, matemático americano que por muitos anos foi responsável por uma coluna de passatempos matemáticos na revista Scientific American, conclui que a melhor maneira de fazer com que a Matemática seja interessante para os alunos e leigos é abordá-la com jeito de jogo. E no que ele chama de “jogo”, encontram-se passatempos, quebra-cabeças, paradoxos, enigmas, desafios. (apud CURY, 2006)

A motivação para a metodologia proposta neste trabalho está justamente no caráter investigativo e exploratório dos arquivos e atividades a serem desenvolvidos pelo grupo de pesquisa e que ganham contornos de desafio. A fim de aprimorar a construção do conceito de interdependência das variáveis, o usuário deve tentar interpretar o resultado plotado pela “varredura” do ponto (E), a partir de sua coloração e vice-versa, ou seja, dada a instrução (relação algébrica) de coloração do ponto (E), tentar intuir o resultado projetado, como ilustram os exemplos abaixo.



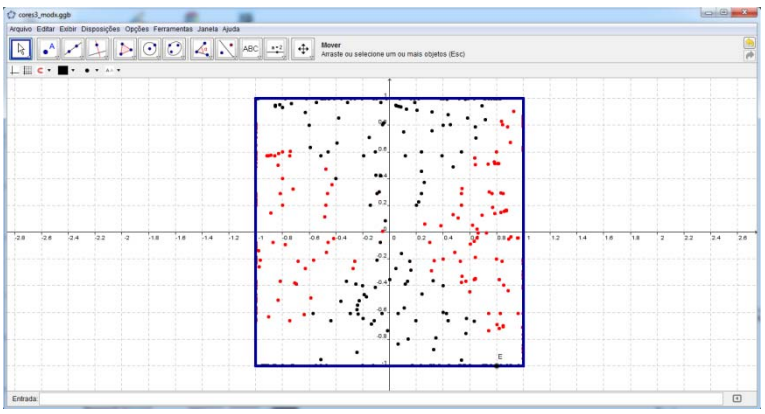
EXEMPLO 1: a relação y(E) < x(E), em fase final de preenchimento

FONTE: acervo dos autores



EXEMPLO 2: a relação x(E) > y(E)², em fase intermediária de preenchimento

FONTE: acervo dos autores



EXEMPLO 3: a relação -|x(E)| < y(E) < |x(E)|, em fase inicial de preenchimento

FONTE: acervo dos autores

A propriedade de cores dinâmicas que possuem os objetos criados com GeoGebra permite visualizar facilmente lugares geométricos desconhecidos, desde que saibamos expressar a condição que devem cumprir os pontos do mesmo. Este modo de

utilização de cores dinâmicas permite que 'varrendo' a tela, o lugar geométrico vá sendo definido e se constitua num instrumento de conjecturação para os alunos à medida que dispõem de mais informações visuais. Este processo de conjecturação (ou lançamento de hipóteses), tão importante na formação matemática, muitas vezes acaba não sendo incentivado na prática usual de abordagem de funções.

Pretende-se e que as atividades desenvolvidas tenham um caráter atrativo por seu potencial em despertar a curiosidade dos alunos em suas composições e experimentações. Para Freire (1996), o exercício da curiosidade convoca a imaginação, a intuição, as emoções, a capacidade de conjecturar, de comparar, na busca da perfilização do objeto ou do achado de sua razão de ser.

Schoenfeld (1980, p. 795), ao descrever habilidades de resolução de problemas, fala em estratégia heurística, como "[...] uma sugestão ou técnica geral que auxilia os solucionadores de problemas a compreender ou resolver um problema". No mesmo artigo, o autor aponta uma lista de heurísticas frequentemente usadas e as divide segundo a fase de resolução do problema: análise, exploração e verificação.

Para a análise, esse autor sugere, por exemplo: a) escolher valores especiais para exemplificar o problema e entender o que acontece; b) examinar casos-limite, para explorar o domínio de possibilidades. Para a exploração do problema, sugere: a) substituir condições por outras equivalentes; b) recombinar os elementos de maneiras diferentes; c) introduzir elementos auxiliares; d) reformular o problema, supondo que se obteve uma solução e determinando suas propriedades; e) construir um problema análogo com menos variáveis; f) tentar explorar problemas relacionados, que tenham formas, dados ou conclusões similares.

Schoenfeld (1980) propõe, ainda, algumas indagações que o solucionador deve se fazer para verificar a solução encontrada: a) todos os dados pertinentes foram usados? b) a solução está de acordo com estimativas razoáveis? c) a solução pode ser obtida de outra forma?

À luz deste paradigma proposto por Schoenfeld é que sustenta-se a metodologia a ser utilizada nesta pesquisa, no sentido de que o software de geometria dinâmica/recurso adotado dá 'poderes' ao usuário de, após análise inicial, fazer as explorações e experimentações necessárias, a fim de obter o resultado desejado, conduzindo assim, a uma etapa de verificação do problema lançado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se que, com este trabalho, seja possível desenvolver uma proposta que, ao mesmo tempo que procura contribuir com o ensino e aprendizagem de funções (a partir de inequações), oportunize a professores e futuros professores um estreitamento com o uso da tecnologia em sala de aula. A contribuição, pretendida com uma metodologia diferenciada apoiada no recurso da geometria dinâmica, é no sentido, também, de encorajar professores a criarem propostas que explorem os diferentes recursos do *software*. A divulgação e validação desta proposta, depende ainda de experimentações e ensaios futuros (a proposta de trabalho teve início em setembro/12), que devem ocorrer através de oficinas pensadas tanto para a Educação Básica, quanto para a Educação Superior além da produção de materiais digitais e compartilhamento em ambientes virtuais públicos e facilmente acessíveis.

REFERÊNCIAS

CURY, H. N. ; SAMPAIO, M. L. F. B. . O desafio de substituir letras por números: que conteúdos e estratégias podem ser desenvolvidos?. Bolema (Rio Claro), Rio Claro, v. 19,26, n.26, p. 1-18, 2006.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREITAS, M. A. de. Equações do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

REZENDE, Wanderley Moura ; PESCO, D. U. ; BORTOLOSSI, H. J. . Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 1, p. 74-89, 2012.

SCHOENFELD, A. H. Teaching problem-solving skills. American Mathematical Monthly, Washington, v. 87, n. 10, p. 794-805, 1980.

SILVA, M. Sala de Aula Interativa. Rio de Janeiro: Quarter, 2000.

ZORZAN, A. S. L.; Ensino-Aprendizagem: Algumas tendências na educação matemática. In: GÜLLICH, R. I. C (Org.). Educar pela pesquisa: Formação e processos de estudo e aprendizagem com pesquisa, 2007

CURSO INICIAL DE GEOGEBRA PARA PROFESORES DE MATEMÁTICA.

Graciela Machado - Lilián Muñoz - Ariel Fripp, Fabián Vitabar - Rosario Mariani María de los Ángeles Morales -María Antonia Gabarrot - Susana Bentancor - Sergio Gerardo - Sylvia Borbonet**.**

gmachado@ces.edu.uy – lmunoz@ces.edu.uy - afripp@ces.edu.uy
fvitabar@adinet.com.uy -rosariomariani09@gmail.com -
marangelesmorales@gmail.com - magabarrot@gmail.com
slbentancor@hotmail.com - sergiogerardo99@hotmail.com - sborbonet@gmail.com
Inspección de Matemática - Uruguay

Modalidad: Comunicación

Nivel: 5

Palabras Clave: Sensibilización- Actualización

Resumen

La Inspección de Matemática del CES organizó en los años 2011 y 2012 un curso semipresencial de GeoGebra dirigidos a los profesores de enseñanza media del Uruguay. El trabajo fue realizado con docentes de siete departamentos del país.
El mismo tiene por objetivo capacitar a los docentes en el uso de las principales herramientas del GeoGebra y promover el uso del mismo en la planificación de actividades de aula.
Este curso se organizó en tres instancias presenciales con una carga horaria de 17 horas y un trabajo a distancia de un total de 30 horas, constó de dos módulos:
Módulo I- Actividades para propiciar el manejo de las herramientas del software, brindándoles a los profesores la posibilidad de familiarizarse con ellas. Se trabajó con herramientas para la enseñanza del Álgebra y de la Geometría.
Módulo II- Actividades de aula planificadas con el software con su correspondiente análisis didáctico.
La evaluación se realizó, en el primer módulo, con tareas que implicaran el uso de las herramientas del software y en el segundo módulo en el análisis didáctico de actividades áulicas. La evaluación final constó del armado y presentación de una clase.

La Inspección de Matemática del CES, constató la casi nula utilización, por parte de los profesores, en sus prácticas de aula, de las herramientas informáticas que disponen los estudiantes. Conocida la importancia de esta herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, decidió organizar cursos para docentes con dos objetivos:

1. La actualización de los profesores en el software educativo GeoGebra, de licencia libre que permite aplicaciones en diversas áreas de la Matemática.
2. Su adecuada implementación en el aula para la mejora de los aprendizajes.

El curso tuvo lugar en siete departamentos del país (Montevideo, Canelones, Durazno, Flores, Río Negro, Soriano y Colonia), estuvo organizado en tres presenciales de un total de 17 horas y 30 horas no presenciales a través de una plataforma e-learning. El trabajo online fue monitoreado por los profesores del curso a través de foros que se abrieron para cada instancia, los participantes consultaban con el docente a cargo e intercambiaban opiniones con los demás cursillistas.

Módulo I- Objetivo: sensibilizar a los docentes en el uso del software y brindar un manejo básico de las herramientas del mismo.

Primer presencial- Constó de cinco actividades, las dos primeras de construcciones para aprender las herramientas básicas de trazados, otra de aplicación al álgebra, con representación de funciones y las principales herramientas que se pueden utilizar en dicho tema y dos actividades de uso de los deslizadores tanto en álgebra como en geometría.

Trabajo a distancia- Se realizaron tareas de reproducción de figuras y teselados, gráficas de funciones en tramos, uso de deslizadores para trabajar conceptos de geometría y álgebra.

Módulo II- Objetivo: Analizar, reflexionar y planificar actividades para el aula con el software.

Segunda presencial- A partir de actividades de aula y una planilla de análisis didáctico que se proporcionó a los participantes, los mismos fueron puestos en el rol de alumno para realizar las actividades y luego analizar las mismas desde el punto de vista didáctico, mediante el llenado de la planilla.

Trabajo a distancia- Se plantearon a los participantes algunas actividades de aula para realizar y analizar en forma personal con una posterior discusión en el foro.

Se les solicitó realizar una lectura sobre el uso de tecnologías en el aula y luego compartir sus opiniones en el foro a través de tres preguntas.

Como tarea final cada participante diseñó una actividad de aula usando GeoGebra

Tercer presencial- Los participantes expusieron las actividades planificadas por ellos y analizaron las mismas.

Evaluación del curso,- Se realizó a través de actividades obligatorias a entregar en la plataforma e intervenciones a través de los foros de la misma. De acuerdo a la estructura del curso en el primer módulo se evaluó el manejo del software, en el segundo módulo se trabajó en el aspecto didáctico y la pertinencia del uso de computadoras en distintas actividades.

La tarea final, consistió en el armado de una actividad de aula utilizando GeoGebra, la cual podía realizarse en equipos. Los profesores que la diseñaron debieron presentarla al resto de los cursillistas en el tercer presencial, haciendo un análisis didáctico de la misma.

Para la evaluación final se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos, conocidos previamente por los participantes.

1) Adecuado manejo de los conceptos matemáticos y didácticos.
2) Pertinencia de la actividad.
3) Coherencia del análisis didáctico respecto de la misma.
4) Precisión del lenguaje.
5) En la exposición grupal se tuvo en cuenta la participación de cada integrante.

Referencias Bibliográficas

- Balacheff, N. (2000) *Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas*. *Matemática y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Capitulo 5. Barcelona. Editorial Graó.
- Figueras, O. (2011) *El impacto de las NTIC sobre el proceso educativo III.* Atrapados en la exposición del uso de las tecnologías de la información y comunicación. http://funes.uniandes.edu.co
- Laborde, C. (2001, julio-agosto). *El impacto de las NTIC sobre el proceso educativo III*. Revista Candidus, (16).
- Litwin, Edith (2005) *De caminos, puentes y atajos: el lugar de la tecnología en la enseñanza.* http://www.litwin.com.ar

- Nacional Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la educación Matemática*. http://www.unesco.cl/esp/atematica/docentesytics/docdig

Anexo I - Actividad de la profesora Luciana Gómez- 2012

Funciones inversas: funciones exponenciales y logarítmicas.

Características de las funciones logarítmicas

a) Completa las siguientes tablas:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbf{x^3}$							

x	-27	-8	-1	0	1	8	27
$\sqrt[3]{\ }$							

¿Qué observas?

b) Traza en Geogebra los gráficos de las dos funciones (en el misma ventana)f:f(x)= x3 y g:g(x)= $\sqrt[3]{\ }$; pinta de rojo el gráfico de f y de azul el de la función g.

c) Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de los dos gráficos. Están alineados? Si es así escribe en geogebra la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos. Que relación encuentras entre los tres gráficos.

La función g:g(x)= $\sqrt[3]{\ }$ es la función inversa de f:f(x)= x3 (así como la función f es la inversa de g).

Como en este ejemplo, cuando dos funciones f y g son inversas, se cumple que: si (a,b) es un punto del gráfico de f, entonces _ _ _ _ _ _ _ _ _ es un punto del gráfico de g; además los gráficos de f y g son _ _ _ _ _ _ _ _ respecto a la recta _ _ _ _ _ _

d) Escribe otros ejemplos de funciones inversas. Busca en los libros de texto o en la web.

e) Completa las tablas siguientes sabiendo que m y n son funciones inversas:

x	-2	-1	0	1	2	3
$m(x)=2^x$						

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
n(x)=						

¿Puedes escribir cuál es la expresión algebraica de la función n?

f) Abre un nuevo archivo en Geogebra. Crea un deslizador llamado a estableciendo como mínimo 2 y máximo 10.

g) Grafica la función m :m(x)= ax

h) Teniendo en cuenta lo analizado, grafica la función inversa de m y llamalo n.
La misma se denomina función logartimica y se nota n:n(x)= $\log_a x$

i) Mueve el deslizador

¿Qué observas?

¿Cuándo n es creciente?_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

¿Y decreciente?_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

¿Cuál es la raíz de n?_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Estudia sg. n

x

j) Teniendo en cuenta lo ya estudiado y observando los gráficos completa:

	m:m(x)=ax	n:n(x)=
dominio		
Recorrido		
	m(0)=	n(1)=

Anexo II - Actividad de la profesora Inés Cabezudo - 2011

Construcción del centro de una circunferencia. Quinto año.

El hecho de permitir utilizar sólo la herramienta "recta paralela" obliga a repensar el problema. Pero al mismo tiempo orienta la investigación. Al construir rectas paralelas que cortan a la circunferencia (pues no se puede hacer otra cosa), surge intuitivamente la idea de la construcción por percepción (visual) de la simetría.

La utilización del programa permite, en este caso, una construcción no usual del centro

de una circunferencia y que no se justificaría con lápiz y papel por las dificultades del dibujo.

Contenidos matemáticos: dos puntos distintos determinan una recta (para poder construir una recta necesito construir dos puntos que le pertenezcan). Simetría axial. Ejes de simetría en una circunferencia. El punto de corte de dos rectas que se corresponden en una simetría axial pertenece al eje de simetría.

Modalidad de aplicación: grupal; taller en clase.

Requisitos para poder aplicarlo: conocimiento mínimo pero utilización habitual del programa GEOGEBRA. Aunque no es imprescindible, la actividad tiene mayor interés si se ha iniciado en el curso el estudio de las isometrías, en particular simetría axial (se puede hacer la demostración considerando ángulos inscritos, diagonales de trapecios isósceles, etc. ...en forma bastante más fastidiosa)

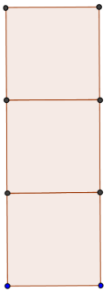
Evaluación:
Primero: análisis, por escrito, de la construcción realizada (se cortaron las mediatrices de dos cuerdas no paralelas de la circunferencia)
Segundo: justificación (lo que habría que justificar es que la recta construida -se construyeron dos en realidad- es mediatriz de una cuerda de la circunferencia, o es eje de simetría de la circunferencia, o …….)

Variantes:
Siempre se deja las herramientas “nuevo punto”, “punto en intersección” y “recta por dos puntos”.
Cuarto año. Dejar las herramientas “recta paralela” y “recta perpendicular”. El objetivo es que la construcción se realice por aplicación de “lugar geométrico de Thales”. Se deja la herramienta “recta paralela” para no dirigir excesivamente la construcción.
Primer año. Dejar las herramientas “punto medio”, “segmento”, “recta paralela”, “recta perpendicular”, “bisectriz”, “mediatriz”, es decir un conjunto de herramientas, conocidas todas, entre las cuales se habrá de elegir las que se considere adecuadas para realizar la construcción.

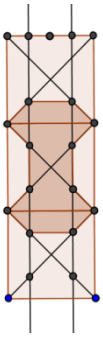
Quinto año. Presentar como segunda propuesta de trabajo ¿Cuáles serían posibles variantes? Se trataría de elegir una sola herramienta por vez, y realizar la construcción utilizando esa única herramienta (trabajo de investigación domiciliario, individual o en grupos, a elección)

Anexo III Actividad de los profesores Flavia Corales y Marcelo Trinidad - 2012

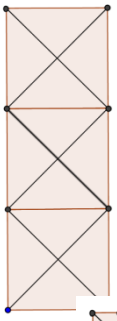
Construye el polihueso, observando los pasos a través de las imágenes, y tesela el plano con dicha figura tal como se muestra al final utilizando Geogebra



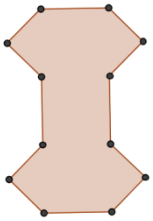
Paso 1 – Construye los cuadrados como indica la figura.



Paso 5 - Con la herramienta polígono, construye el polihueso.

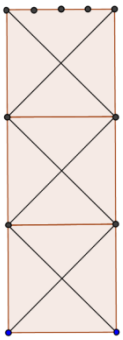


Paso 2 – Traza sus diagonales.



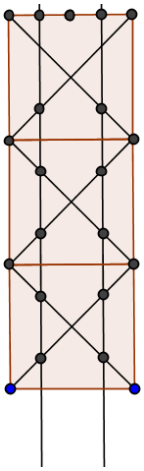
Paso 6 - Oculta las construcciones necesarias para obtener esta figura

Paso 7 - Tesela el plano del siguiente modo, utilizando las isometrías que consideres necesarias.

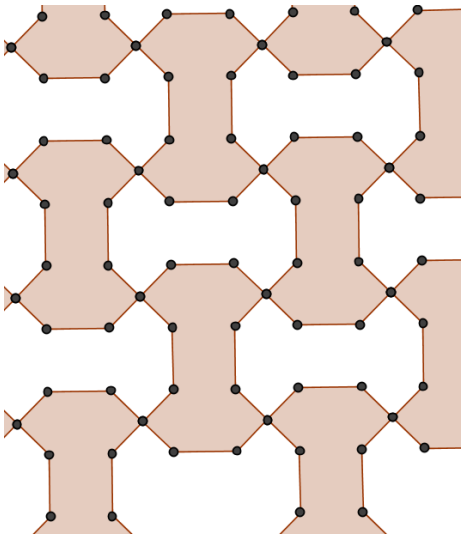


Paso 3 – Utilizando la herramienta punto medio,

determina los puntos que se indican en la figura.



Paso 4 – Traza las rectas paralelas que se indican en la figura y determina los puntos de intersección con las diagonales.



EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA: SOFTWARE GEOGEBRA, UMA FERRAMENTA A FAVOR DO ENSINO E APRENDIZADO DA MATEMÁTICA

Mariani Margarida Bento - Ana Luiza Garcia - Dayse Helena Begosso – Fábio Nogueira de Queiroz – Felipe de Souza Estevam – Marcelo Silveira

marianebento@hotmail.com - nanagarcia.garcia@gmail.com - daysebegosso@hotmail.com - fabio_nq@yahoo.com.br - boleiro_style@hotmail.com - msilver1974@hotmail.com -
Fatec-Ourinhos, São Paulo-Brasil

Modalidade: CB
Nivel educativo: Primário (6 à 11 anos)
Palavras chaves: Geogebra, lúdico, educação-tecnológica, Matemática

Resumo

A tecnologia está evoluindo junto à sociedade, e a educação é a base dessa evolução. O uso de ferramentas digitais inseridas na área educacional tem como objetivo ajudar na assimilação do conteúdo e na formação do cidadão atual. Neste sentido, muito se tem debatido a respeito da junção da tecnologia e do aprendizado, capazes de gerar resultados cada vez mais positivos com essa parceria. Contudo, esta junção exige o entendimento e interpretações tecnológicas e uma nova concepção na formação do professor, que deverá possuir habilidades com o software proposto, bem como domínio de ferramentas tecnológicas para orientação dos alunos, para que se concretize com êxito o processo de ensino e aprendizagem, remetendo à reflexão e compreensão do meio social em que ele se circunscreve. Destarte, este trabalho aponta alguns aspectos da relação – educação e tecnologia educacional, bem como apresenta um relato de uma atividade aplicada numa escola municipal de Educação Infantil da cidade de Ourinhos, São Paulo, Brasil, mediada pelo software Geogebra, confrontando paradigmas tradicionais e metodologias inovadoras no ensino e aprendizado de conteúdos da Matemática.

1-Introdução

O aprendizado da Matemática e de disciplinas que se apóiam em seus princípios sempre foi visto como um privilégio de poucos. Não raramente, tem-se criado uma repulsa aos ensinamentos que circundam esta ciência, refletindo em índices assustadores nas avaliações que ocorrem periodicamente nas instituições de ensino, nos mais variados graus de estudo. Tentar responder por que isso ocorre é debruçar-se em questões complexas que fazem parte de um conjunto de fatores de muitos questionamentos e vertentes. Contudo, historicamente, remetemo-nos a uma época em que aprender matemática pressupunha não usar uma simbologia que permitisse a compreensão universal do mesmo problema. Somente no século XVI é que se dá a criação de símbolos que pudessem divulgar e difundir a linguagem matemática, como os sinais de

adição (+), subtração (-), multiplicação (x), divisão (÷), igualdade (=), maior que (>), menor que (<), os parênteses e o sistema decimal (SOUZA, 2008, p.7).

> A matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma representação. Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático (...) (DAMM, 1999, p.137).

Além disso, questões que permeiam a reavaliação do papel do ensino na história da matemática, a profissionalização do meio matemático, o ensino e o campo intelectual de produção matemática, as práticas de ensino e de pesquisa atuam de modo direto no processo de apropriação dessa disciplina (PRADO, 2003).

Quanto à formação do professor de matemática brasileiro, Valente (2002) remete-nos às escolas militares do século XVII para a compreensão do ensino de uma matemática considerada como um saber técnico, prática e útil, de modo a colaborar com a formação de engenheiros, que passam a atuar como professores da disciplina até o início da década de XX.

Para Dias (2002) trata-se de uma época na qual as escolas de engenharia são os principais espaços destinados à produção e reprodução dos conceitos matemáticos.

Somente com a implantação das Faculdades de Filosofia no Brasil é que as atividades matemáticas sofreram transformações na identificação do profissional especialista no ensino da disciplina. No entanto, percebe-se, através de um breve estudo da historiografia da matemática no Brasil, uma acentuada tendência da questão de profissionalização do professor apresentar-se como uma atividade marginal e secundária (PRADO, 2003, p. 36), contribuindo para agravar as questões do ensino e aprendizado desta disciplina.

Não tem como deixar de destacar a questão da epistemologia do professor no cotidiano escolar (Becker, 1993), apontando que o trabalho de quem ensina está intimamente relacionado com a própria ciência ensinada.

Em outras palavras, não se leva em conta que o saber científico está mais associado a um saber que é desenvolvido nas universidades ou institutos de pesquisas e não está

diretamente vinculado aos ensinos fundamental e médio, acarretando uma visão estratificada e isolada da educação, sem significado para os alunos (PAIS, 1999, p.21).

Muitas vezes, o educador, por desconhecimento ou despreparado dos assuntos relacionados à sua prática docente, não leva em conta as diferenças existentes entre o saber científico e o saber a ensinar proporcionando uma má qualidade da transposição didática dos conteúdos ensinados no contexto educacional. Neste sentido, Chevallard (1991) aponta que:

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os "objetos de ensino". O "trabalho" que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p.39).

Deste modo, o Movimento da Matemática Moderna, ocorrido na década de 50 e 60 em diversos países tentou aproximar a Matemática ensinada nas escolas com aquela produzida pelos pesquisadores dessa ciência, a fim de dar conta das exigências e necessidades tecnológicas da época. Contudo, as reformulações ocorridas na transposição didática resultaram em inversões tão fortes que colaboraram para o fracasso do movimento, tornando-se um dos exemplos mais marcantes de transposição didática lato sensu (PAIS, 1999, p.19).

Percebe-se, historicamente, que mesmo com a invenção de uma linguagem universal que permitisse a popularização desta ciência, o surgimento do profissional da área de Matemática e de pesquisas acerca da Educação Matemática, o ensino e aprendizado dessa ciência mantiveram-se como um grande desafio de professores e educadores:

> Outros intervenientes no processo apresentam outras justificações nomeadamente a má formação preparação dos alunos em anos anteriores, o nível sócio-econômico e cultural baixos, a falta de esforço, estudo e atenção por parte dos alunos, a excessiva carga curricular, dificuldades na língua materna ou, simplesmente, a dificuldade intrínseca da própria matemática (RIBEIRO, A.; CABRITTA, I., P.136, 2002).

Assim, lançar mãos de estratégias pedagógicas – e aqui se encaixa as Novas Tecnologías da Informação e Comunicação (TICs) - passou a ser um grande desafio de estudiosos para irem ao encontro da valorização, motivação e efetivação do ensino e aprendizado dos conteúdos ensinados.

Buscar respaldo em teorias que possam entender a construção do comportamento cultural, social e psicológico dos alunos, levando-se em conta outros intervenientes no processo educacional tende a ganhar importância no que diz respeito à formação dos profissionais que irão atuar no ensino da Matemática.

2- A Tecnologia como ferramenta Auxiliadora no ensino e aprendizado da Matemática.

É notório que o mundo atual está submerso numa sociedade tecnológica, exigindo cada vez mais qualificação para suprir essas necessidades impostas e exigidas por ela. Tal cenário não é diferente no âmbito educacional, a tomar como ponto de partida que é justamente na escola que se debruçam as expectativas da formação de indivíduos que possam suprir os anseios do meio no qual estão inseridos (BRASIL, 1997). Contudo, são apontados nesse processo de formação visto que a experiência da maioria dos professores das instituições de ensino é fruto de uma educação tradicional, puramente transmissiva, na qual o aluno ainda é receptor de informações e passivo a elas, encontrando no quadro negro, muitas vezes, a única ferramenta usada para o aprendizado dos conteúdos.

Além disso, apesar do discurso curricular ressaltar a prática do em ensino da Matemática imbuído às tecnologias (BRASIL, 1997), os avanços neste sentido ainda são pequenos e incipientes. Percebe-se que há a necessidade do professor realmente incorporar a tecnologia em sua metodologia e o sistema educacional efetivar de fato as condições necessárias à incorporação da tecnologia nas escolas.

Talvez, também seja ignorado o uso das tecnologias no ensino da matemática como instrumento nas práticas educacionais devido à insegurança, medo, o despreparo, o modo como são tratadas pelo currículo e outros fatores que comprometem o ensino da Matemática. Tal ignorância pode colaborar para o agravamento da concepção de que o ensino da matemática não passa de um processo que privilegia a repetição de procedimentos rotineiros, baseados na reprodução e na transmissão passiva de informações, sem significados e conexões com outras áreas disciplinares e com a própria vida (Correia, 1995). Percebe-se, então, que tal cenário necessita de modificações não havendo como ignorar o uso de ferramentas tecnológicas no processo educacional, gerando possibilidades e ajustes a ele. É neste sentido, que a Matemática também pode ser beneficiada pelas atividades que contemplem o uso de novas

tecnologias, possibilitando atividades mediadoras nas diversas áreas do conhecimento matemático.

Na realidade, a tecnologia pode beneficiar a aprendizagem da Matemática se utilizada de modo adequado, apoiada em materiais específicos e em professores com formação que possibilite criar atividades que ultrapassem o senso comum de que a tecnologia vai exclusivamente ao encontro das verificações de resultados (Mamede, 2001).

3- Uma atividade mediada pelo software GeoGebra.

Criado para uma tese de mestrado em Matemática Educacional e Ciência Computacional na Universidade de Salzburg (Áustria), o software Geogebra teve continuidade e o seu desenvolvimento fez parte do projeto de Pós Doutorado do seu autor em Matemática Educacional, transformando-o em um dos softwares mais amplamente divulgados nas comunidades acadêmicas devido a sua simplicidade, dinamismo e licença livre de uso.

Apresentando na linguagem Java, possui multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, estatística e suas tabelas, gráficos e cálculo em um único sistema, o Geogebra tem recebido vários prêmios pelo mundo. Seu foco é o educacional, já que pode reunir problemas de geometria, álgebra linear e cálculo (derivação e integração simbólica). Por um lado, pode-se construir figuras geométricas livremente com o uso do mouse e equações podem ser inseridas com o teclado, assim como coordenadas. O Geogebra está disponível em 35 idiomas diferentes. Além disso, o site do Geogebra (http://www.geogebra.org.org/cms/) possui uma *wiki*[1]material disponível para o ensino da Matemática e um tutorial que serve como material de apoio a possíveis dificuldades.

[1] Uma *wiki* é uma forma de identificar um tipo específico de coleção de documentos em hipertexto ou o software colaborativo usado para criá-lo.

E, pensando-se nas inúmeras possibilidades de ganho que a tecnologia pode propiciar para o ensino e aprendizado de um dado saber, uma atividade foi preparada pelos alunos do 5º termo da Faculdade de Tecnologia de Ourinhos – SP – Brasil, para os alunos do 4□ ano da Rede Municipal de Ourinhos. Essa atividade foi projetada na lousa digital e contou com um desenho desenvolvido no Geogebra, representando um caminho que o personagem Thor faz em seu dia-a-dia. A trajetória percorrida foi explicada de maneira lúdica e contextualizada de acordo com o problema inerente na atividade. Após a explicação do caminho a ser seguido por Thor, os alunos foram desenhando a forma geométrica que o formava, calculando o perímetro da jornada percorrida e do objeto matemática originário dessa trajetória. Dúvidas e sistematizações foram realizadas pelos mediadores dessa atividade tanto no que se referiu às teorias dos saberes da matemática, quanto àquelas relacionadas à utilização e uso do software Geogebra.

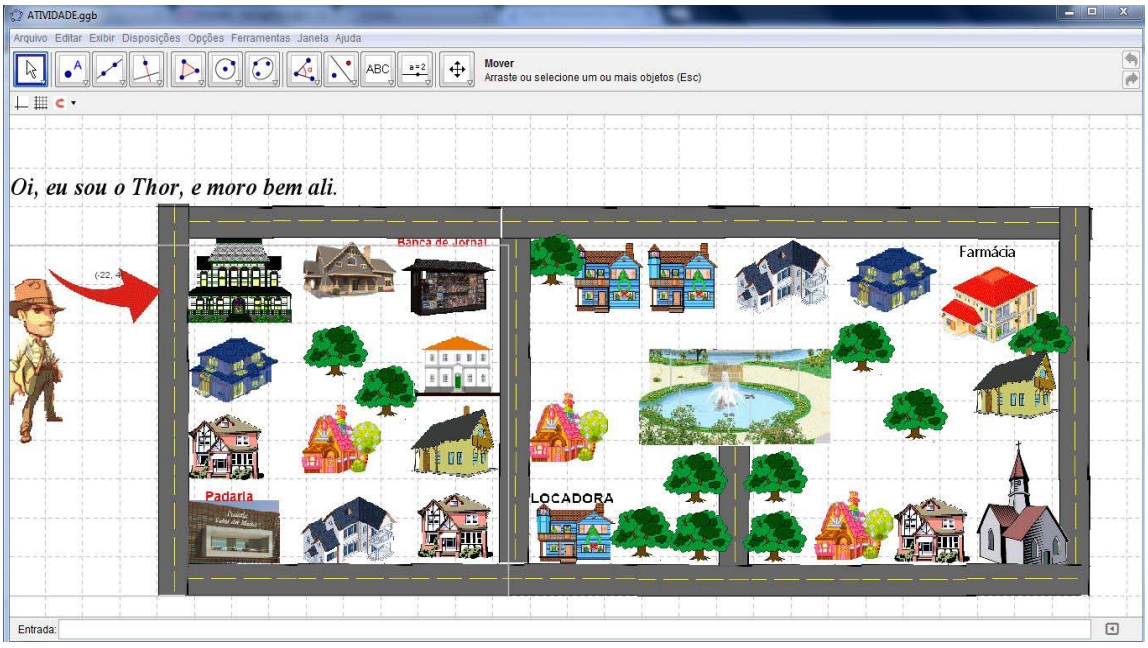


Figura 1. Atividade aplicada aos alunos da Rede Estadual

Fonte: Autores (2012)

O intuito da atividade desenvolvida em sala de aula foi o de mostrar que, de forma dinâmica e interativa, pode-se obter um processo facilitador do ensino e aprendizado da matemática, além de aproximar a tecnología à realidade de alunos que raramente têm condições de acessá-la.

4- Conclusão

A pesquisa de campo realizada na escola teve como objetivo observar o que as crianças já sabiam sobre alguns conceitos e ideias da Geometria e acrescentar a tecnologia em seu meio educacional. O resultado foi satisfatório, pois conseguiram desenvolver a atividade com a ajuda da ferramenta de maneira surpreendente e satisfatória. De uma forma lúdica foi passado uma história sobre o percurso que o personagem Thor fazia todos os dias. Os alunos tiveram que traçar cada um, em seus computadores, o caminho a ser seguido e analisá-lo geometricamente quanto ao seu formado, além de calcular o seu perímetro. Como o Geogebra é de fácil acesso, os alunos não tiveram dúvidas para realizar a atividade que lhes fora atribuída. Ao final, todos conseguiram visualizar a diferença entre um quadrado e um retângulo, relacionando suas medidas e propiedades além de agregar conceitos aos já existentes.

Referências Bibliográficas

- BECKER, F. A (1997). *A epistemologia do professor – O cotidiano da escola.* Petrópolis: Vozes.

- BRASIL (1997). *Parâmetros curriculares nacionais***:** *Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental.* Brasília: MEC/SEF.

- CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

- CORREIA, J. L. (1995). *Concepções e práticas de professores de matemática: contributos para o estudo da pergunta*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

- DAMM, R.F. (1999). Registros de Representação. In*: Educação Matemática: Uma introdução*. Silvia Maria Machado et all (Org). (pp. 135-153). São Paulo: EDUC.

- DIAS, A.L.M.A. (2002) *Engenheiros, mulheres, matemáticos - interesses e disputas na profissionalização da Matemática na Bahia (1896-1968).* Tese de Doutorado. Faculdade de História da FFLCH – USP. São Paulo: Brasil.

- GRINSPUN, M. (1999). *Educação Tecnológica: Desafios e perspectivas*, pág.25/40, Sao Paulo Ed. Cortez.

- GARCIA, J. (2000). *Manual de dificuldades de aprendizagem: linguagem leitura escrita matemática*, Campinas. Ed. Artmed.

- MAMEDE, E. (2001). *O currículo de matemática para o 1º ciclo e a calculadora.* Atas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 197-207). Lisboa: APM.

- PAIS, L. C. (1999) *Transposição Didática. Educação Matemática: Uma introdução.* IN: Silvia Maria Machado et all (Org). (pp. 13-42). São Paulo: EDUC.

- PRADO, R.C. (2003) *Do Engenheiro ao Licenciado: Os concursos à cátedra do Colégio Pedro II e as modificações do saber do professor de matemática do ensino secundário*. Dissertação de Mestrado.

- RIBEIRO, A.; CABRITA, I. (2002) Abordagem dos numerais decimais no 1º ciclo do ensino básico sustentada por atividades significativas de resolução de problemas. In: PONTE, J. P. ET AL (ou org). *Atividades de Investigação na Aprendizagem e na Formação dos Professores.* Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. Secção de Educação Matemática. *1* (1), 125-134.

- SOUZA, J. L. (2008) *Construindo histórias e propondo desafios matemáticos*. Bauru: UNESP/ FC.

- VALENTE, W. R. (2002) "*História da Matemática na Licenciatura: uma contribuição para o debate*". In: Educação Matemática em Revista.Edição Especial. São Paulo: SBEM. 9(11), 41-53.

EL BARICENTRO Y LAS MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO. UNA EXPERIENCIA EN EL AULA

Ana Inés Battaglino – Mónica Figueroa
ines.battaglino@gmail.com – monicafigueroa@adinet.com.uy
Estudiantes del IPA y docentes de los liceos 55 y 41, Uruguay.

Modalidad: CB- Comunicación Breve.
Nivel educativo: Nivel medio.
Palabras clave: Centro de gravedad .Medianas de triángulo.

Resumen

Uno de los principales desafíos de nuestras prácticas educativas es acompañar los cambios que conlleva la sociedad. Estamos viviendo una sociedad de la información donde las propuestas deben ser dinámicas, atractivas visualmente, contextualizadas y que satisfagan las necesidades de los estudiantes. El cambio social ha permitido el acceso a distintas herramientas tecnológicas (XO en Uruguay) por lo que se tiene que repensar el uso de las mismas en el aula en forma eficaz. Saber aprender es una necesidad formativa básica generada fundamentalmente por las implicaciones sociales de las revoluciones tecnológicas.
En éste marco planteamos actividades de aula para trabajar conceptos geométricos únicamente con el uso de la computadora. Entendemos que entre otras cosas, permitirá a los estudiantes que tienen dificultades con los instrumentos de geometría, un mejor desempeño y análisis propiciando mejores logros.
Las actividades se centrarán en construcciones de medianas en triángulos, observando algunas propiedades interesantes de las mismas y su relación con el baricentro.

Desarrollo del Trabajo

En la valoración de J.Pozo la educación tiene que estar dirigida a ayudar a los estudiantes a aprender a aprender. Promoviendo la capacidad de que éstos gestionen sus propios aprendizajes y desarrollen un pensamiento crítico que les permita seguir aprendiendo a lo largo de toda la vida.

Saber aprender es un factor de progreso personal y social y no cabe duda de que en la sociedad actual, caracterizada por una nueva forma de relacionarse e interactuar con el conocimiento, ha pasado a ser una necesidad formativa básica generada fundamentalmente por las implicaciones sociales de las revoluciones tecnológicas.

En el marco del Plan Ceibal de educación secundaria del ciclo básico en el cual cada estudiante tiene acceso al software Geogebra desde su propia XO, pretendemos incentivar, estimular y trabajar estrategias de aprendizaje utilizando esta herramienta. Es fortaleciendo el uso de las TICs en el aula y adecuando la currícula a la actualidad que creemos se propiciarán mejores logros en el aprendizaje.

El desafío del docente, en este nuevo escenario educativo, es incentivar a los educandos a descubrir, conjeturar, visualizar, realizar hipótesis y potenciar sus fortalezas y en consecuencia lograr una mayor autonomía. El docente es el responsable de utilizar la herramienta en función de los contenidos curriculares en forma apropiada.

Pensamos que los aprendizajes logrados utilizando las TICs permiten que los estudiantes perciban la importancia de la matemática y su vínculo con otras áreas del conocimiento.

"Una actividad es más educativa en la medida en que permite al alumno desempeñar un papel activo más que pasivo en situaciones de aprendizaje" (Raths)

Luego de la exploración de los alumnos con el programa Geogebra y actividades áulicas respecto a la geometría del triángulo se abordarán las actividades que proponemos sobre las medianas de un triángulo y algunas de sus propiedades.

El presente trabajo describe una experiencia enfocada principalmente a alumnos de segundo año del Ciclo Básico.

Objetivos generales:

Que el alumno explorando, jugando, razonando, describiendo, explicando y relacionando se involucre en un proceso integral obteniendo así aprendizajes caracterizados por significados.

Objetivos específicos:

Trabajar con triángulos y la construcción de sus medianas así como también deducir y verificar algunas de sus propiedades.

Desarrollo:

Se plantearán actividades

- ⇨ Trazado del baricentro. Trazado de dos medianas y deducir la Propiedad de concurrencia de las tres medianas.
- ⇨ Baricentro.
- ⇨ Cálculo de las áreas de los triángulos que quedan determinados por las medianas.
- ⇨ Triángulos rectángulos y sus medianas.

Se realizarán puestas en común y registro de las propiedades observadas.

Conclusión:

Primeramente observemos que el uso del programa Geogebra no se limita a la instancia de clase sino que promueve una búsqueda continua que posibilita al desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes.

Por otro lado consideramos que el verdadero desafío de los docentes en la actualidad, y la clave del éxito estará en *la capacidad de crear, adaptar, presentar y compartir actividades didácticas innovadoras, mediadas por tecnología, donde ésta enriquece la práctica, genera interacción, facilita la adopción, flexibiliza los diferentes ritmos de aprendizaje y promueve genuinos procesos cognitivos inspiradores que enriquecen el currículo.*

Referencias bibliográficas para las actividades a desarrollar

Coexeter, H.S.M.y Greitzer S.L. (1994). *Retorno a la Geometría.* Capítulo 1 *Puntos y líneas relacionados con el triángul*o. Madrid. Ed.Euler.Col. La tortuga de Aquiles, 1.

Coexeter, H.S.M. (1971). *Fundamentos de Geometría.* Capítulo 1 *Triángulos.* Mejico-Buenos Aires. Agencia para el desarrollo internacional.(A.I.D.)

Cursos en el marco del Plan Ceibal. *Nuevos escenarios educativos con dotación 1:1...construyendo el conocimiento desde la práctica*. Qualitas. Microsoft.

Cursos en el marco del Plan Ceibal. Herramientas sociales y Aplicaciones web 2.0 para el Desarrollo y diseño de Nuevos espacios Aúlicos. Qualitas. Microsoft.

Zambra M. Rodríguez M y Belcredi L (1999) Geometría. *Un curso de geometría métrica para el segundo ciclo.* Uruguay.Ediciones de la Plaza.

Anexo:

Planificación de la Clase:

Grupo: 2º año Ciclo Básico

Tema: Geometría del Triángulo. Medianas. Baricentro. Propiedades.

Tiempo: 2 hora clase (45´cada una)

Conocimientos previos:

- Triángulos. Áreas y clasificación.
- Mediatriz.
- Ortocentro y circunferencia circunscripta.
- Manejo del Software Geogebra.

Objetivos: Que el alumno explorando, jugando, razonando, describiendo, explicando y relacionando se involucre en un proceso integral obteniendo así aprendizajes caracterizados por significados.

Objetivos específicos:

Trabajar con triángulos y la construcción de sus medianas así como también deducir y verificar algunas de sus propiedades.

Desarrollo:

Se plantearán tres actividades. En la primera se trabaja revisión de clasificación de triángulos y construcción del baricentro.

La segunda actividad refiere a áreas de los triángulos que quedan determinados por las medianas. Verificando que los seis triángulos son de igual área.

Luego, a partir de un triángulo rectángulo, se observará una propiedad interesante. En todo triángulo rectángulo el ortocentro es el punto medio de la hipotenusa y por lo tanto la mediana correspondiente a la hipotenusa, coincide con el radio.

Se dará a los estudiantes una actividad por vez.

⇨ **Actividad Previa:**

Se realizará una actividad para agrupar a los estudiantes en equipos, integrándolos en forma arbitraria.

Se trabajará revisando clasificación de triángulos, perímetro de un triángulo, mediatriz, etc.

La idea es que los estudiantes además de trabajar los contenidos matemáticos mencionados, no siempre trabajen con los mismos compañeros y se propicie la integración en el grupo.

Para formar los grupos. Se dará una carta a cada uno de los estudiantes y se les pedirá que "encuentren" y formen su equipo de manera que las cartas que tengan se relacionen entre sí.
Se apuntará a formar grupos de tres estudiantes.
Los estudiantes deben buscar al resto de los integrantes de cada equipo de modo que las tarjetas se relacionen entre sí, siempre teniendo en cuenta los conceptos que se quieren revisar.

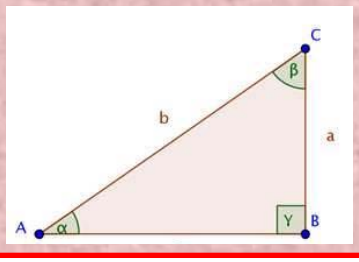
Para facilitar la actividad y lograr un clima adecuado de trabajo, se propone que cada equipo esté formado por cartas de distinto color.
Se repartirá una carta por estudiante y se pedirá que quienes tienen cartas de color naranja se paren a buscar a otros compañeros que tengan cartas de color verde y cuyas cartas se relacionen.
Luego se hará lo mismo con quienes tienen cartas de color rojo.

⇨ Algunas cartas (a modo de ejemplo)

Grupo 1

Triángulo rectángulo.

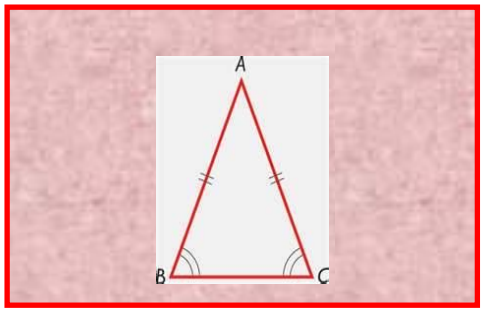
Un triángulo con un ángulo recto.



Grupo 2

Triángulo isósceles.

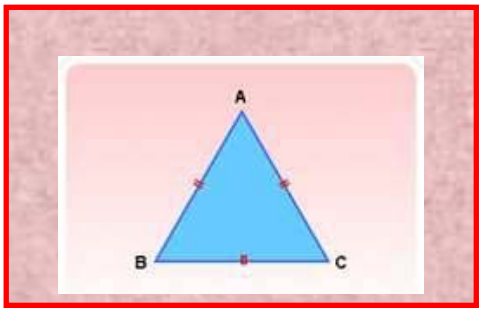
Un triángulo con dos lados iguales.



Grupo 3

Triángulo equilátero.

Un triángulo con tres lados iguales.



Grupo 4

Triángulo escaleno.

Los lados del triángulo miden a=3cm, b=6cm y c=4,5cm

El perímetro del triángulo ABC es 13,5 cm.

Grupo 5

Mediatriz de un segmento.

Es una recta perpendicular al segmento por su punto medio.

Todo punto P perteneciente a la recta equidista de los extremos del segmento considerado.

Luego de que cada grupo quedó conformado cada uno leerá su tarjeta con el fin de chequear que lo hayan hecho en forma correcta. La idea de esta puesta en común es detectar las posibles dificultades que hayan surgido y poder analizarlas y ayudar a los estudiantes a superarlas. Además permitirá que toda la clase verifique o refute lo realizado por cada equipo y se realicen, si es necesario, las correcciones que correspondan.

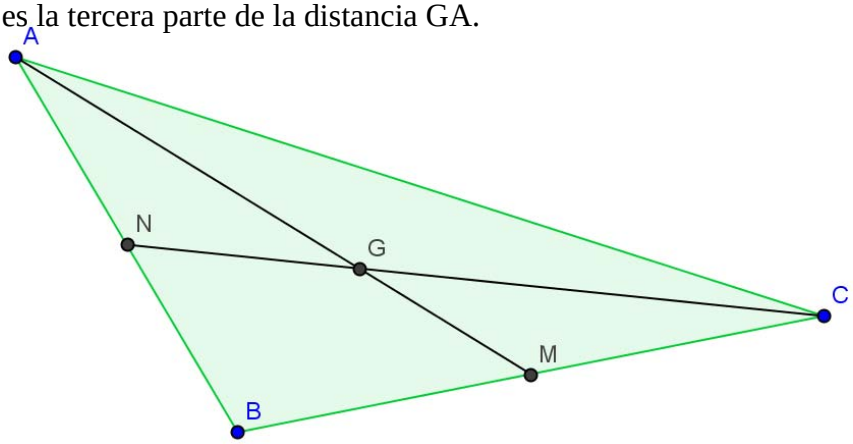
Actividad- Baricentro y medianas:

Trabaja en forma ordenada siguiendo cada paso:

- ⇨ Construye un triángulo ABC.
- ⇨ Encuentra el punto medio del lado AB, denomínalo N.

Encuentra el punto medio del lado BC; denomínalo M. Utilizando la mediatriz de cada segmento.

- ⇨ Oculta las mediatrices.
- ⇨ Une los puntos CN y AM.
  Observa: Los segmentos que unen los puntos medios de un lado de un triángulo con el vértice opuesto se llaman MEDIANAS.
- ⇨ Llama G a la intersección de las medianas obtenidas.
- ⇨ Traza la tercer mediana y verifica si el punto G pertenece a ella.
  Observa: El punto G se llama BARICENTRO del triángulo.
- ⇨ ¿Qué sucede si cambias de triángulo?
  Arrastra uno de los puntos y responde Verdadero o Falso:
  a-Las tres medianas de un triángulo concurren en el punto G sólo en el primer triángulo.
  b-Las tres medianas de un triángulo concurren en el punto G para todo triángulo que obtuviste.
  c-Las medianas miden lo mismo para todo triángulo.
  d- La distancia GM es la tercera parte de la distancia GA.



Para trabajar con tus compañer@s:

Puesta en Común:

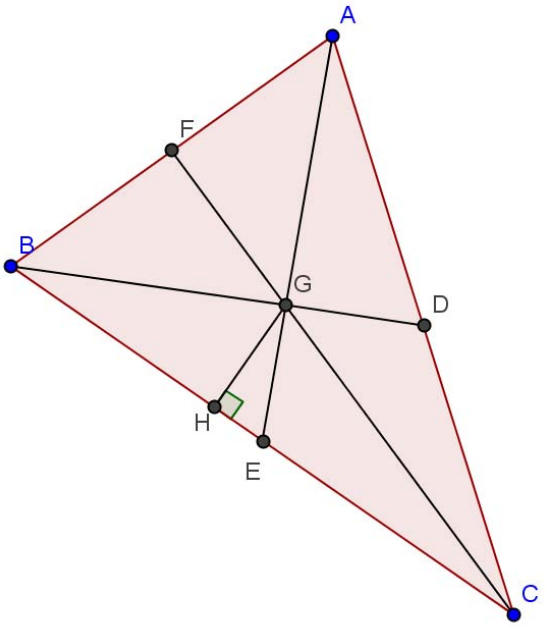
Se apuntará a la observación de la construcción de las medianas, del baricentro de un triángulo y a la siguiente Propiedad:
Las medianas de un triángulo se dividen una a otra en razón de 2, 1.

Actividad – Áreas:

- ⇨ Calcula el área de los seis triángulos que se determinan con las medianas del triángulo ABC. ¿Qué concluyes?

Verificaremos si tu conclusión es correcta:

⇨ Traza y mide las alturas desde el vértice G de los triángulos BEG y ECG.
En esos triángulos las alturas y las bases son_____. Por lo tanto las áreas halladas son iguales.



⇨ ¿Existen otros pares de triángulos de igual área entre si? ¿Cuáles?

Puesta en Común:

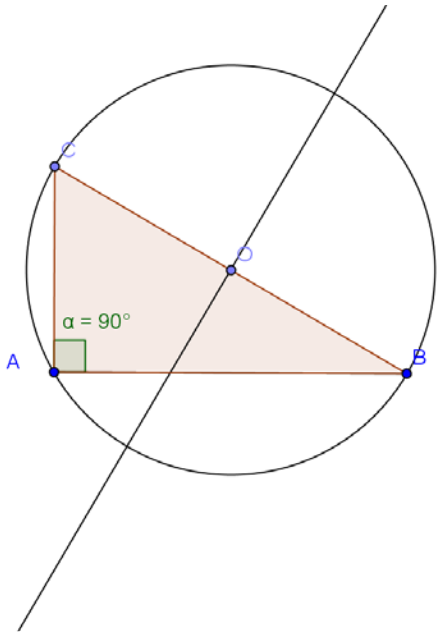
Se apuntará a la conclusión de la siguiente propiedad:
Las medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos de igual área.
La idea en esta actividad es que los estudiantes vean con facilidad la igualdad de las áreas de los triángulos EBG y CEG por tener iguales la base y la altura.
Luego, se intentará que apliquen la propiedad anterior en donde se podrá concluir que el área del triángulo GAB es igual al doble del área del triángulo GBE.

Actividad – Triángulo Rectángulo:

Dado un triángulo ABC, rectángulo en A.

⇨ Construye el ortocentro.

- ⇨ Construye la mediana correspondiente al lado BC, ¿Qué conclusiones puedes sacar?
- ⇨ Observa si ocurre lo mismo cambiando C, manteniendo el triángulo rectángulo en A.



Puesta en común:

Se pretende llegar a la conclusión de que la mediana AO es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

ESTUDO DO PÊNDULO SIMPLES COM AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA NA ABORDAGEM DOS ESTILOS DE APRENDIZAGEM

Rosana Cavalcanti Maia Santos - Aguinaldo Robinson de Souza
prof.rosanamaia@gmail.com - arobinso@fc.unesp.br
Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências / FC / Unesp / Bauru, Brasil

Modalidade: C
Nível Educativo: Terciário
Palavras-Chave: *Software* GeoGebra, pêndulo simples, Teoria dos Estilos de Aprendizagem, guia didático.

Resumo

O Geogebra é um software de matemática dinâmica que oferece potencialidades para o estudo do pêndulo simples na graduação. Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo explorar algumas ferramentas desse software que possam ser utilizadas como recursos didáticos para o estudo do pêndulo simples, bem como elaborar um guia didático com atividades baseadas nessas ferramentas. Os recursos do GeoGebra utilizados foram: construção de gráficos, controle deslizante, reta tangente e mover janela de visualização. As atividades construídas no GeoGebra permitiram o estudo do pêndulo simples nas seguintes perspectivas: modelagem, análise e comparação da equação do seu movimento, variação de parâmetros físicos (comprimento, aceleração da gravidade etc.) e verificação e discussão de fenômenos físicos do movimento do pêndulo de difícil visualização em atividades experimentais no laboratório. Essas atividades foram fundamentas pela Teoria dos Estilos de Aprendizagem, a qual oferece subsídios para a individualização do ensino, favorecendo, assim, todos os Estilos de Aprendizagem dos estudantes: Ativo, Reflexivo, Teórico e Pragmático. Assim, as características do software GeoGebra e do guia didático elaborado proporcionaram um estudo contextualizado e reflexivo do pêndulo simples, constituindo-se uma nova e importante metodologia para o ensino do pêndulo nos cursos de graduação.

O Pêndulo Simples

Dentre os diversos tipos de pêndulo, o pêndulo simples é um dos experimentos mais conhecidos e didáticos desenvolvidos nos cursos elementares de física (ARNOLD et al, 2011). O pêndulo simples consiste numa massa **m** suspensa por um fio ou uma haste de comprimento $\boldsymbol{l}$ e massa desprezível. No movimento do pêndulo simples a massa **m** move-se sobre um círculo de raio $\boldsymbol{l}$, sob ação do peso $m\vec{g}$ e da tensão $\vec{T}$ (NUSSENZVEIG, 1981), onde $\boldsymbol{s}$ é o comprimento do arco e $\boldsymbol{\theta}$ é o ângulo de desvio (amplitude) em relação a vertical (figura 1).

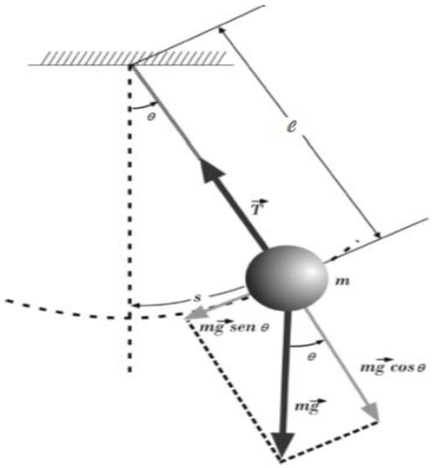


Figura 1: Grandezas atuantes no movimento de um pêndulo simples

Para pequenas amplitudes (θ), o movimento do pêndulo simples é um movimento harmônico simples (MHS), e é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{g}{l}.\theta + \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \qquad (1)$$

Cuja solução é:

$$\theta = \theta_0.\cos(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Onde:

θ = amplitude do movimento no instante t

θ_0 = amplitude inicial do movimento (amplitude máxima)

ω = frequência angular do movimento, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

φ = constante de fase do movimento – condição inicial do movimento

t = instante do movimento oscilatório

Utilizando a expressão matemática para o cálculo da frequência angular e do período de um movimento harmônico simples (MHS), podemos determinar o período de oscilação do pêndulo:

$$T = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (3)$$

Guia didático para o estudo do pêndulo simples: uma proposta de utilização

O Guia Didático para o estudo do pêndulo simples é constituído por quatro atividades, construídas no GeoGebra, com a finalidade de corroborar com as atividades

expositivas, teóricas e experimentais acerca do pêndulo simples. Tais atividades permitem o estudo do movimento do pêndulo a partir de modelagem, análise e comparação da equação do seu movimento, variação de parâmetros físicos e verificação e discussão de fenômenos físicos do movimento do pêndulo de difícil visualização em atividades experimentais no laboratório.

Atividade 1: Sendo a amplitude inicial (θ_0) do pêndulo simples constante, como se comporta o seu movimento quando o comprimento (l) é variável ?

Para esta atividade foram utilizados os seguintes dados numéricos:

θ_0 = 10º = 0,1745 radianos

φ = 0 (condição inicial)

$l_1 = 0{,}5\,m$, $l_2 = 1\,m$, $l_3 = 1{,}5\,m$

Esta atividade tem como objetivo a análise gráfica da equação do movimento do pêndulo variando, de maneira discreta, o comprimento do mesmo. Assim, para a construção desta atividade no *software* GeoGebra utilizou-se a possibilidade de traçar gráficos a partir de uma equação. Para tal, inseriu-se a equação do movimento do pêndulo (equação 2) na caixa de "Entrada" do GeoGebra, gerando-se o gráfico correspondente (figura 2).

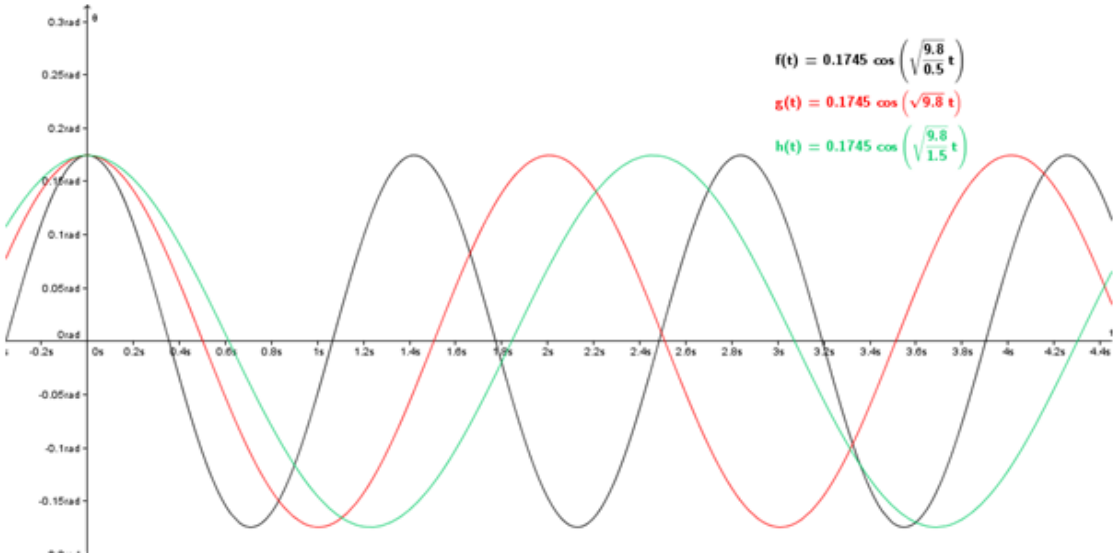


Figura 2: Comportamento do movimento do pêndulo, θ *versus* t, quando a amplitude é mantida constante e o comprimento da haste ou fio é variado.

As funções $f(t), g(t)$ e $h(t)$, da figura 2, são as equações do movimento do pêndulo em diferentes condições iniciais para os valores do comprimento do fio (l). Como esperado, devido à equação 2, o comportamento do gráfico θ *versus* t é oscilatório.

A partir dessa análise gráfica, verifica-se que quando a amplitude de oscilação do pêndulo é mantida constante, o aumento do comprimento do seu fio ocasiona um aumento no seu período (eixo horizontal – medindo tempo). Por outro lado, nas atividades expositivas e/ou experimentais, esse resultado geralmente é obtido por meio da equação do período do pêndulo (equação 3). Assim, o professor poderá inserir esta atividade no contexto de sua prática docente a fim de incentivar a verificação de um mesmo fenômeno físico por meio de procedimentos metodológicos distintos.

Outra análise que pode ser feita com auxílio desta atividade é sobre a existência de um padrão entre o movimento desses pêndulos. Ou seja, *Haveria um padrão entre o movimento de pêndulos com comprimento do fio ou haste* (l) *diferentes?*

Pode-se analisar o questionamento acima utilizando a característica do GeoGebra de "mover os objetos na tela" e a ferramenta "zoom". Assim, foi possível mover os gráficos do movimento dos pêndulos no eixo horizontal (tempo). Verifica-se que em t = 0s (tempo inicial do movimento) para os três pêndulos em questão o deslocamento em relação à vertical (amplitude) é a mesma para todos os pêndulos ($\theta = 0{,}175\ rad.$). A fim de encontrar um padrão entre o movimento dos pêndulos, deslocou-se o gráfico até $t = 1500\ s$ e não foi encontrado nenhum instante de tempo para o qual os três pêndulos estivessem concomitantemente em $\theta = 0{,}175\ rad.$ Portanto, é possível afirmar que não há um padrão entre o movimento desses pêndulos.

Os recursos do *software* GeoGebra permitiram essa análise, uma vez que foi possível observar o comportamento gráfico do movimento dos pêndulos para um instante de tempo relativamente grande (25 minutos), fato que, a partir de aparatos experimentais simplórios, é dificultado devido as influências da resistência do ar.

Atividade 2: Se o comprimento do pêndulo l for mantido constante (l = constante), como se comporta o movimento do pêndulo para $\theta_1 > \theta_2$?

Para esta atividade foram utilizados os seguintes dados numéricos:

- l = 1,0 m
- φ = 0 (condição inicial)
- $\theta_1 = 10^o \cong 0{,}1745$ rad; $\theta_2 = 7^o \cong 0{,}1222$ rad; $\theta_3 = 4^o \cong 0{,}0698$ rad

Após a inserção a inserção da equação do movimento do pêndulo (equação 2) na caixa de Entrada do GeoGebra obteve-se o seguinte comportamento gráfico (figura 3).

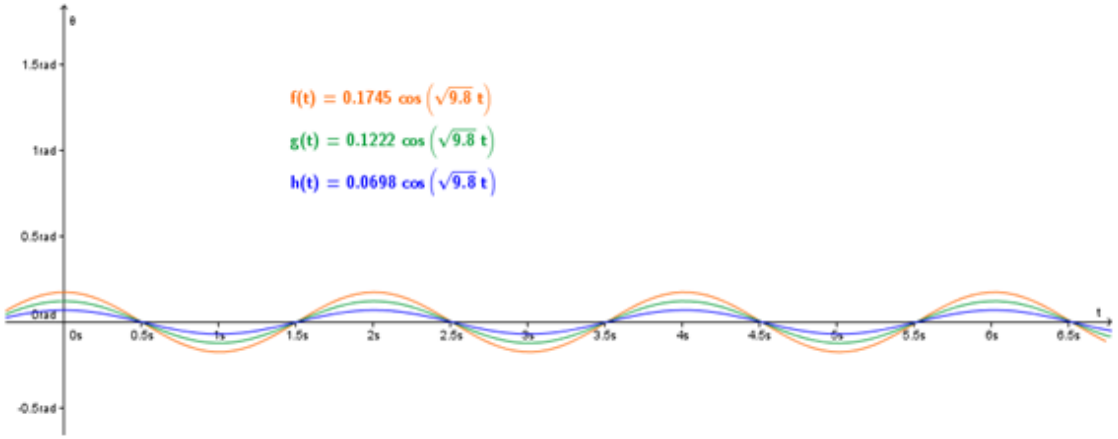


Figura 3: Comportamento do movimento do pêndulo, θ *versus* t, quando o comprimento da haste ou fio é mantido constante e sua amplitude é variada.

Nesta atividade, as funções $f(t), g(t)$ e $h(t)$ da figura 3 são as equações do movimento do pêndulo para diferentes valores da amplitude inicial (θ_0). Como esperado (equação 2) este movimento é oscilatório.

Observa-se que o período do pêndulo (eixo horizontal – medida do tempo) é o mesmo para todas as funções (figura 3). Ou seja, para pequenas oscilações, a variação da amplitude não interfere no período de oscilação do pêndulo, quando o comprimento da haste ou do fio é mantido constante. Assim, a partir desta atividade é possível analisar uma maneira indireta de se chegar a esse resultado, que geralmente é obtido pela equação do período do pêndulo (equação 3). O docente pode, portanto, inserir esta atividade no contexto das atividades teóricas e ou experimentais acerca do pêndulo.

Extrapolando-se nas análises gráficas da equação do movimento do pêndulo, pode-se refletir sobre *o significado físico dos picos destes gráficos*. O pico no gráfico da equação do movimento do pêndulo representa o instante de tempo em que o pêndulo atinge sua amplitude máxima (θ_0), permanece em um repouso momentâneo, inverte o sentido da oscilação e retoma o seu movimento. Observa-se (figura 4) que o aumento da amplitude proporciona um gráfico com um pico mais acentuado. Esse fato mostra que os estados possíveis em torno do ponto de equilíbrio diminuem com o aumento da amplitude máxima do movimento do pêndulo. Os seja, para grandes amplitudes, o pêndulo permanece um intervalo de tempo menor em torno do ponto de equilíbrio, em relação a um pêndulo com as mesmas características, porém com uma amplitude máxima (θ_0) menor.

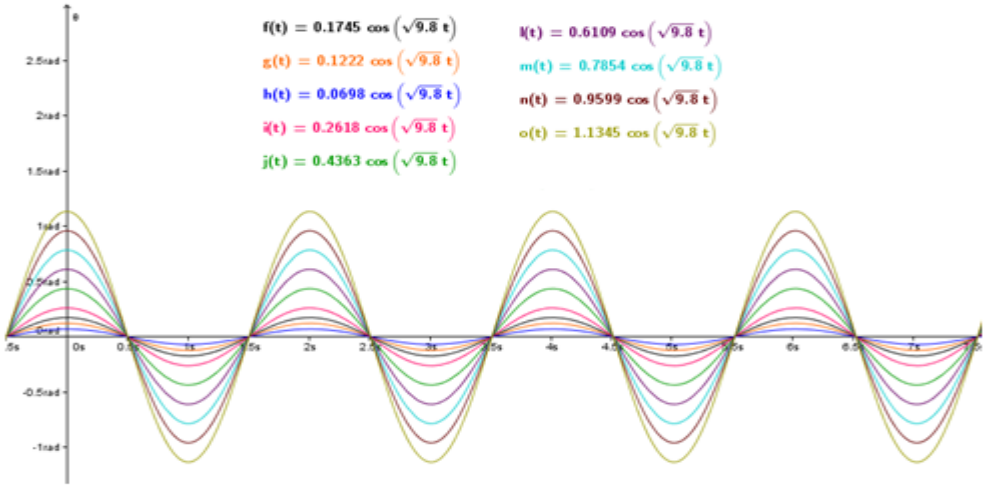


Figura 4: Comportamento do movimento do pêndulo, θ *versus* t, quando o comprimento da haste ou fio é mantido constante e sua amplitude é variada de 0,0698 *rad até* 1,1345 *rad*.

Atividade 3: Comportamento do período de um pêndulo com a variação da aceleração da gravidade (g)

Nesta atividade utilizou-se a ferramenta "Controle Deslizante" do GeoGebra para definir a aceleração para gravidade (g) como um parâmetro variável, a fim de analisar o comportamento gráfico da equação do período do pêndulo (equação 3). Dessa maneira, esta atividade pode ser inserida no contexto pedagógico posteriormente à explicação teórica acerca do período do pêndulo, sendo possível realizar investigações sobre o comportamento gráfico dessa equação (figura 5) a partir da alteração dinâmica da aceleração da gravidade.

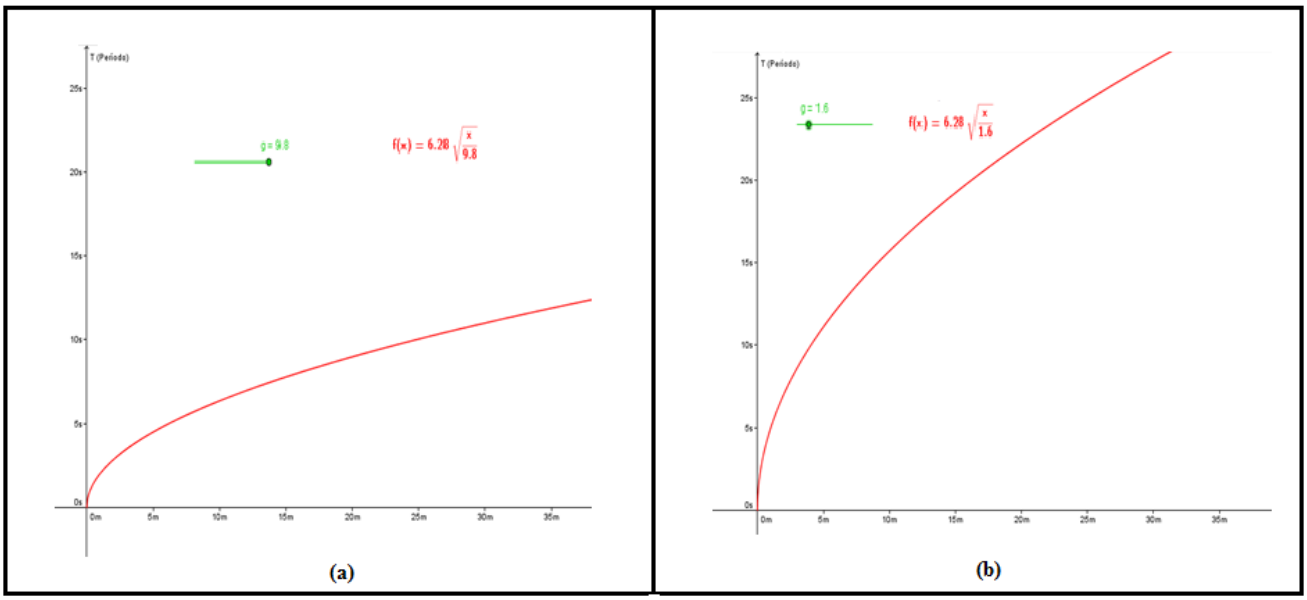


Figura 5: Comportamento gráfico da equação do período do pêndulo para (a) g = 9,8 m/s^2 e (b) g = 1,6 m/s^2.

Por meio da análise gráfica (figura 5) é possível verificar que a diminuição da aceleração da gravidade ocasiona um aumento do período do pêndulo.

Atividade 4: Comportamento da equação do movimento do pêndulo utilizando como parâmetros o comprimento do fio ou da haste do pêndulo (l) e o valor da amplitude inicial (θ_0).

Nesta atividade também foi utilizada a ferramenta "Controle Deslizante" do *software* GeoGebra para definir como parâmetro o comprimento do pêndulo (l) e a sua amplitude inicial (θ_0). Esta atividade favorece a elaboração e teste de hipóteses de maneira dinâmica, podendo ser utilizada no contexto das aulas expositivas e na resolução de exercícios, a fim de verificar e comparar os resultados matemáticos com o comportamento gráfico da equação do movimento do pêndulo (figura 6).

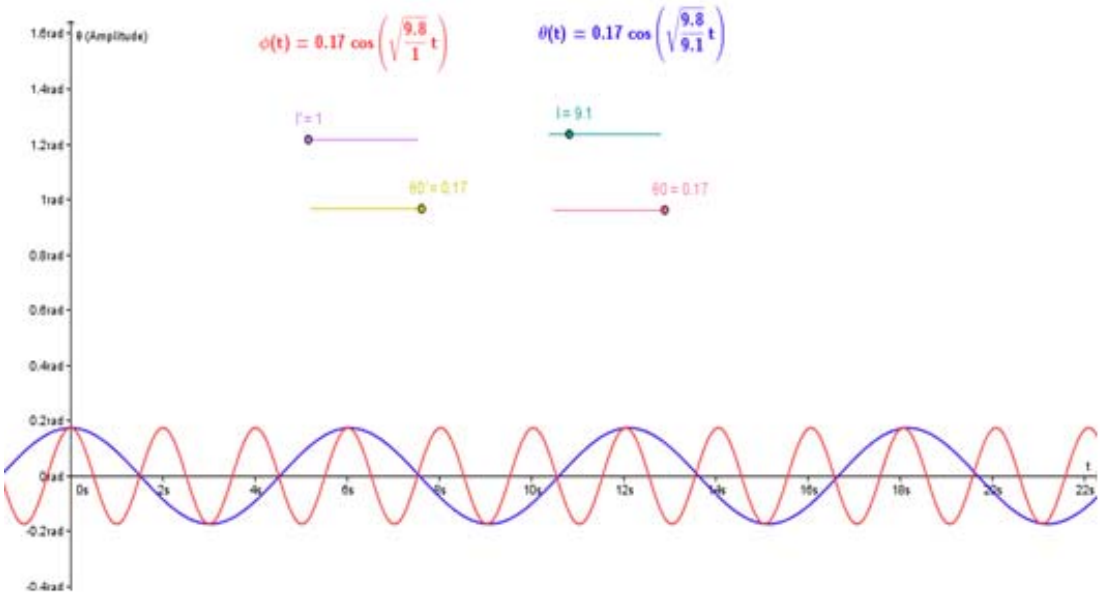


Figura 6: Comportamento gráfico da equação do movimento do pêndulo para os parâmetros: $l = 1m$, $\theta_0 = 0{,}17\ rad$ e $l = 9{,}1\ m$, $\theta_0 = 0{,}17\ rad$.

A Teoria dos Estilos de Aprendizagem e o Guia Didático para o estudo do Pêndulo Simples

A Teoria dos Estilos de Aprendizagem foi proposta por Alonso, Gallego e Honney (1994). Tal teoria tem como foco as características individuais de como as pessoas aprendem, ou seja, os Estilos de Aprendizagem:

> Os Estilos de Aprendizagem são características cognitivas, afetivas e fisiológicas, que servem como indicadores relativamente estáveis de como os estudantes percebem, interagem e respondem no ambiente de aprendizagem (KEEFE, 1988 apud ALONSO; GALLEGO e HONEY, 1994, p.48 – tradução minha).

Assim, os autores definiram quatro estilos de aprendizagem: ativo, reflexivo, pragmático e teórico (Quadro I). De acordo com esses indicativos pessoais são propostas uma série de características metodológicas para as atividades a serem realizadas no ambiente educacional, a fim de favorecer a aprendizagem de todos os Estilos de Aprendizagem. Nesse contexto, o Guia Didático foi elaborado para que algumas de tais características metodológicas estivessem presentes em suas atividades, como discutido no Anexo deste trabalho.

Quadro I: Principais características dos Estilos de Aprendizagem

Estilo de Aprendizagem	**Principais características**
Ativo	Animador, improvisador, descobridor, espontâneo, incentivador, inovador, ágil, líder. Valorizam os desafios e dados de uma experiência.
Reflexivo	Ponderado, analítico, observador, lento, detalhista, investigador. Valorizam a observação de hipóteses em diferentes perspectivas.
Teórico	Metódico, lógico, objetivo, crítico, disciplinado, estruturado. Valorizam a formulação de hipóteses lógicas e complexas.
Pragmático	Experimentador, prático, realista, direto, eficaz, rápido, técnico. Valorizam por em práticas suas ideias e aprendizados.

Considerações finais

O trabalho apresentado é parte inicial de uma pesquisa, em desenvolvimento, de mestrado. Buscou-se discutir e exemplificar o uso do s*oftware* GeoGebra como uma ferramenta tecnológica com potencialidades para o ensino do pêndulo simples, na perspectiva da teoria dos Estilos de Aprendizagem.

Referência

Alonso, C. M.; Gallego, D. J.; Honey, P. (1994). *Los Estilos de Aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y Mejora*. Bilbao: Ediciones Mensajero.Arnold, F. J et al. (2011). Estudo do amortecimento do pêndulo simples: Uma proposta para aplicação em laboratório de ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33(4), 4311-1 – 4311-7. Barros, Daniela. M. V. (2009). Estilos de uso do espaço virtual: Como se aprende e ensina no virtual?. *Inter-Ação: Rev. Fac. Educ*. 34 (1), 51-74.

Nussenzveig, H. M. (1981). *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações, ondas e calor*. São Paulo: Edgard Blücher.

Anexo

Para favorecer a aprendizagem de cada Estilo de Aprendizagem, Alonso, Gallego e Honney (1994) sugerem algumas características metodológicas a serem desenvolvidas nas atividades didáticas (Quadro II).

Quadro II: Sugestões metodológicas a serem desenvolvidas na atividades didáticas para favorecer a aprendizagem de cada Estilo de Aprendizagem

Estilo de Aprendizagem	**Sugestões de características metodológicas a serem desenvolvidas nas atividades didáticas**
Ativo	Explorar novas abordagens e experiências, gerar idéias sem limitações formais, mudar e variar as abordagens, abordar tarefas múltiplas, fazer apresentações, intervir ativamente, arriscar, desafios diante de situações adversas, explorar novos conceitos, realizar atividades diversificadas, participar ativamente.
Reflexivo	Observar e refletir sobre as atividades, chegar à decisões em seu próprio ritmo, revisar o aprendizado, investigar cuidadosamente, reunir informações, pensar antes de agir, fazer análises detalhadas, ter possibilidade de ler ou preparar algo que gere dados, ter tempo suficiente para preparar, assimilar e fazer considerações.
Teórico	Atividades estruturadas e com finalidade clara, inscrever dados em um modelo ou teoria, ter tempo para explorar metodicamente as associações e relações entre as idéias, acontecimentos e situações, ter possibilidade de questionar, participar de atividades complexas, analisar situações globais.
Pragmático	Possibilitar a aplicação imediata (experimentação) do que foi apreendido, observar uma relação evidente entre o conteúdo estudado e um problema, vivenciar simulações e problemas reais, receber indicações técnicas e práticas, possibilitar indicações e atalhos.

Para proporcionar o desenvolvimento dessas características metodológicas nas atividades didáticas, Barros (2009) discute que é essencial a presença de recursos tecnológicos no contexto educacional, uma vez que, tais recursos permitem atender à diversidade de aprendizagem e às necessidades que a sociedade atual exige, enquanto

competências e habilidades do indivíduo. Assim, neste trabalho, recorreu-se as potencialidades do *software* GeoGebra para construir o guia didático para o ensino do pêndulo simples, bem como elaborar atividades que apresentassem as características metodológicas sugeridas pelos pesquisadores, favorecendo a aprendizagem de cada Estilo de Aprendizagem (figuras 7 e 8).

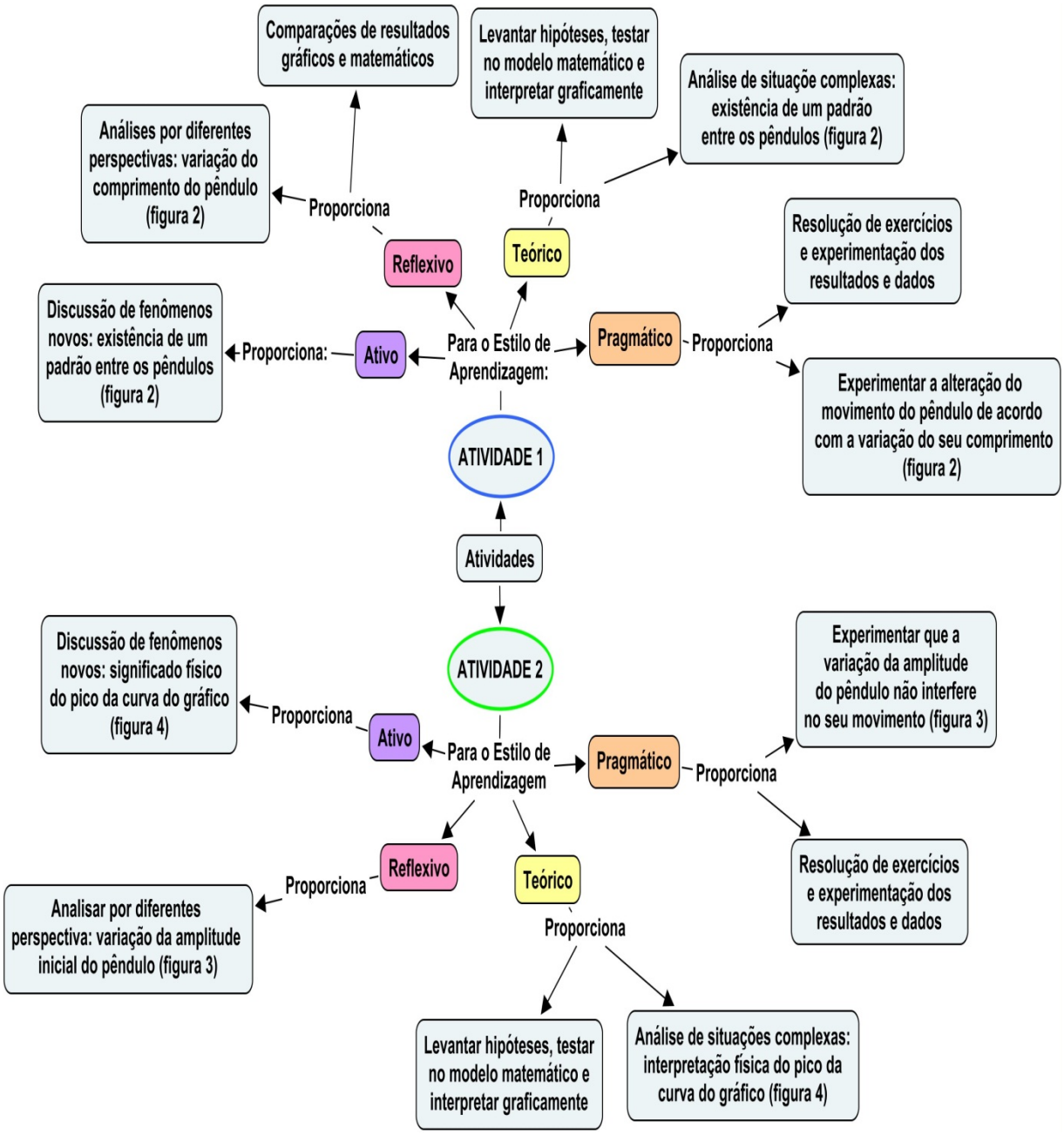


Figura 7: Potencialidades da atividade 1 e 2 do Guia Didático para o Pêndulo Simples, desenvolvido no Geogebra, para os Estilos de Aprendizagem.

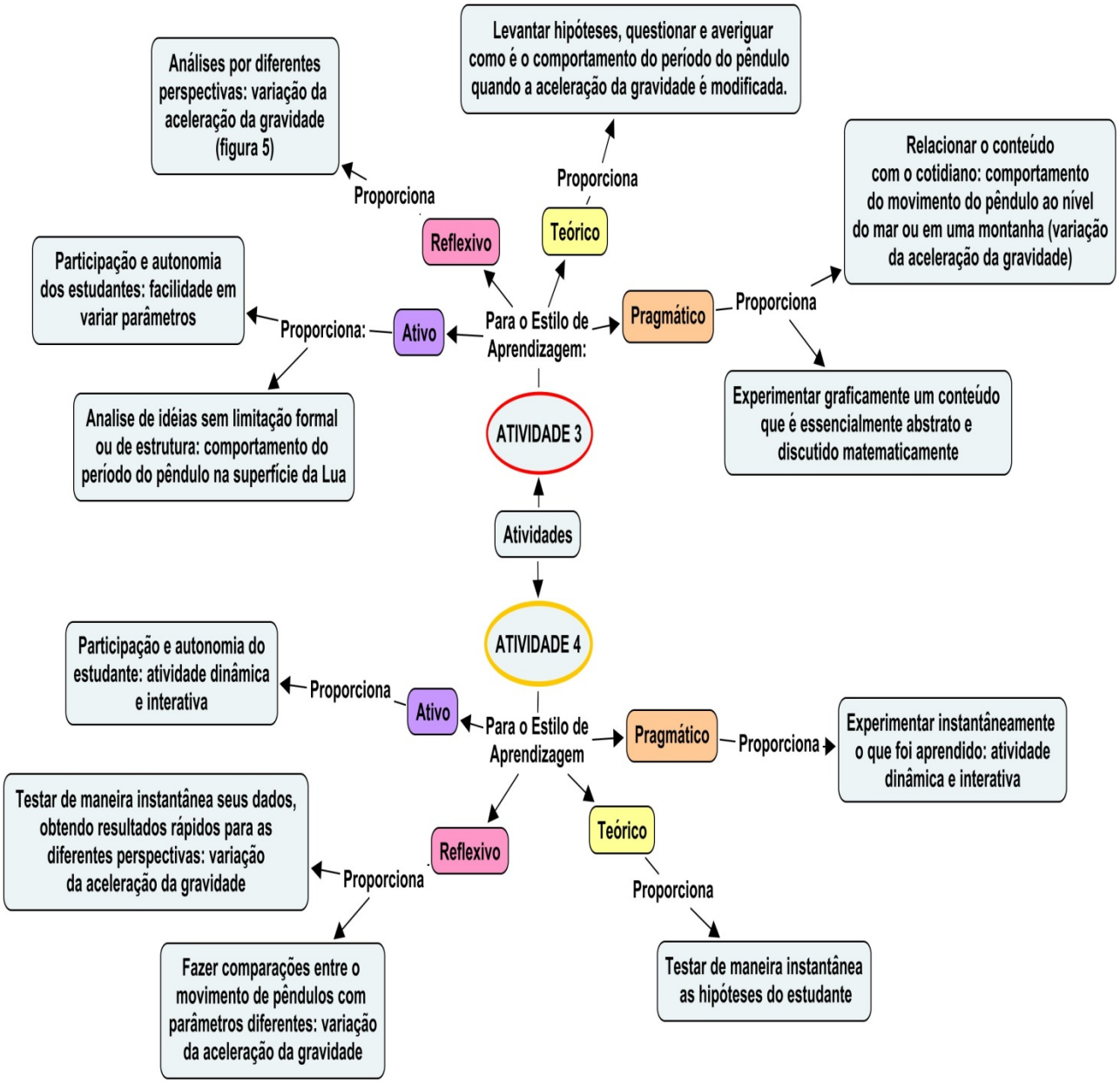


Figura 8: Potencialidades da atividade 3 e 4 do Guia Didático para o Pêndulo Simples, desenvolvido no GeoGebra, para os Estilos de Aprendizagem.

FERRAMENTAS MEDIADORAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: MOODLE E GEOGEBRA A FAVOR DO APRENDIZADO DE SABERES MATEMÁTICOS

Graciela Aluizio Reali[1] - Anderson Messias Santana[2] – Debora Lopes[3] - Juliana Barcelos de Oliveira[4] – Paulo Estevam Denadai[5] – Rosemeiry de Castro Prado Maximiano[6]
graciela.reali@fatec.sp.gov.br[1] - anderson.santana01@fatec.sp.gov.br[2] - deb.lopes@hotmail.com[3] - jubarcelossp@hotmail.com[4] – Paulo.e.d@hotmail.com[5] - rosecprado@zipmail.com[6]
FATEC Brasil[1] - FATEC Brasil[2] - FATEC Brasil[3] - FATEC Brasil[4] – FATEC Brasil[5] – FATEC Brasil[6]

Modalidade: Comunicações.
Nivel educativo: Superior.
Palavras chave: aprendizagem**,** modlle, matemática, geogebra.

Resumo
Muito se tem pensado em como tornar o ensino e o aprendizado dos conteúdos e conhecimentos científicos mais significativos, de modo a colaborar com a educação. O porquê, o quê, para quê e como ensinar ganham a cada dia mais atenção dos estudiosos e profissionais da área. Além disso, socializar o saber também é um grande desafio para que se possa cada vez mais adquirir conhecimentos que irão entender a sociedade atual e que se caracteriza pela sua competitividade a qual está ancorada mais do que nunca nas tecnologias. Destarte, este trabalho apresenta alguns aspectos inerentes ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, destacando o uso das tecnologias da informação e comunicação (TICs) como ferramentas mediadoras e auxiliadoras desse aprendizado. Apresenta também, um ambiente virtual de aprendizagem, o Moodle que engloba o software Geogebra para que juntos possam servir futuramente para o ensino e aprendizado da Matemática na Faculdade de Tecnologia de Ourinhos-Fatec, São Paulo - Brasil. Espera-se, por meio deste trabalho, poder contribuir com discussões e reflexões de algumas questões emblemáticas dessa nova prática e modalidade, bem como difundir e fomentar o uso do aplicativo Geogebra.

Abstract
Learning and teaching have been the focus of many discussions in education. Why, what, whom to and how to teach are issues that are concerning the scientist even more. Another issue that has been discussed is the socialization of knowledge in a manner of acquiring and spreading it much more, once nowadays there is much more competitivity in society and it is bounded by technology. Hus, this study presents some aspects in the process of teaching and learning mathematics, specifically the ones me anted to use even Moodle as well as Geogebra in the teaching of mathematics at Faculdade de Tecnologia de Ourinhos - Fatec – São Paulo in Brazil. It is also expected that this study could contribute to some discussions regarding new approaches or techniques of teaching mathematics as well as spread the use of Geogebra.

1. Ambientes Virtuais de Aprendizagem – AVA´s

Os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA´s) versam em uma opção de mídia que está sendo utilizada para mediar o processo ensino-aprendizagem à distância e empregam softwares que os auxiliam na montagem de cursos, sendo tudo elaborado para facilitar os educadores no gerenciamento de conteúdos para seus alunos e na administração do curso.

Pereira, Schimitt e Dias (2007) definem Ambientes Virtuais de Aprendizagem como:

> [...] um conjunto de ferramentas eletrônicas voltadas ao processo ensino-aprendizagem. Os principais componentes incluem sistemas que podem organizar conteúdos, acompanhar atividades e, fornecer ao estudante suporte on-line e comunicação eletrônica (PEREIRA; SCHIMITT; DIAS, 2007, p. 7).

O avanço e os desenvolvimentos tecnológicos, a partir da segunda metade do século XX, impulsionaram e estão transformando a maneira de ensinar e de aprender. Além disso, o intenso ritmo do mundo globalizado e a complexidade crescente de tarefas que envolvem informação e tecnologia fazem com que o processo educativo não possa ser considerado uma atividade trivial. Neste contexto, a demanda educativa deixou de ser exclusividade de uma faixa etária que frequenta escolas e universidades. A esse público juntam-se todos os indivíduos que necessitam estar continuamente atualizados no competitivo mercado de trabalho e/ou ativos na sociedade.

Segundo Silva (2009), nos últimos anos, os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVAs) estão sendo cada vez mais utilizados no âmbito acadêmico e corporativo como uma opção tecnológica para atender esta demanda educacional. Diante disso, destaca-se a importância de um entendimento mais crítico sobre o conceito que orienta o desenvolvimento ou o uso desses ambientes, assim como, o tipo de estrutura humana e tecnológica que oferece suporte ao processo ensino-aprendizagem.

2. Moodle: Ferramenta Tecnológica Mediadora a favor do Ensino e Aprendizado da Matemática.

Segundo Pereira, Schimitt e Dias (2007) muitas são as ferramentas que a tecnologia pode proporcionar para a construção lógica e do conhecimento matemático. A mediação desses instrumentos vai ao encontro da conciliação dos conceitos espontâneos e dos

científicos, buscando nas relações provocar reflexões e desenvolver conceitos mais elaborados.

Contudo, o sujeito que irá se apropriar dessas ferramentas necessita dominá-la e se apropriar do sistema cultural que vai desenvolver. Além disso, para que as ferramentas sejam de fato agregadoras de conhecimentos, é necessário considerar a figura do professor como fundamental nesse processo, Prado (2004).

Dentre essas ferramentas tecnológicas a favor dos ensinamentos, encontra-se o Moodle (Modular Object□Oriented Dynamic Learning Environment), um ambiente de aprendizagem a distância que foi desenvolvido pelo australiano Martin Dougiamas, em 1999. O Moodle é um software livre e gratuito, podendo ser baixado, utilizado e/ou modificado por qualquer indivíduo em todo o mundo. Utilizado por diversas instituições no mundo todo, possuindo uma grande comunidade cujos membros estão envolvidos em atividades que abrangem desde correções de erros e o desenvolvimento de novas ferramentas à discussão sobre estratégias pedagógicas de utilização do ambiente e suas interfaces. Qualquer instituição que utilize o ambiente Moodle, com qualquer fim que seja, está colaborando com o seu desenvolvimento de alguma maneira, mesmo que de forma simples, a sua divulgação, existência e suas possibilidades, de identificar problemas ou experimentar novas perspectivas pedagógicas. Estas simples contribuições se propagam por meio de uma livre cadeia de interações entre os indivíduos, percorrendo uma rede de relacionamentos que pode, em pouco tempo, ser apropriada por toda a comunidade. Como qualquer outro LMS (Learning Management System), o Moodle dispõe de um conjunto de ferramentas que podem ser selecionadas pelo professor de acordo com seus objetivos pedagógicos. Dessa forma concebem-se cursos que utilizem as diferentes ferramentas tais como: fóruns, diários, chats, questionários, objetos de aprendizagem, o Moodle permite que estes mecanismos sejam oferecidos ao aluno de forma flexível.

3. O Moodle e o Geogebra: Diferentes Possibilidades

Dentre as possibilidades que o Moodle oferece, há a de criar outras ferramentas como o fórum, que pode se tornar um portfólio, um relatório de atividades de campo, com um espaço para discussão de conceitos. Ao mesmo tempo, um glossário pode ser usado com um dicionário, um pequeno manual, dentre alternativas. É bom lembrar, que o uso de uma ação ou atividade para uma ferramenta não inviabiliza outras possibilidades, pois cada uma delas pode ser inserida no mesmo curso quantas vezes e em que posição ou

momento o professor achar necessário. O ambiente virtual Moodle é mais do que um simples espaço de publicação de materiais, permeado por interações pré□definidas, mas como um local onde o professor espelhe as necessidades de interação e comunicação que cada contexto educacional lhe apresente em diferentes momentos e situações que envolvem as diversas ciências, como a Matemática.

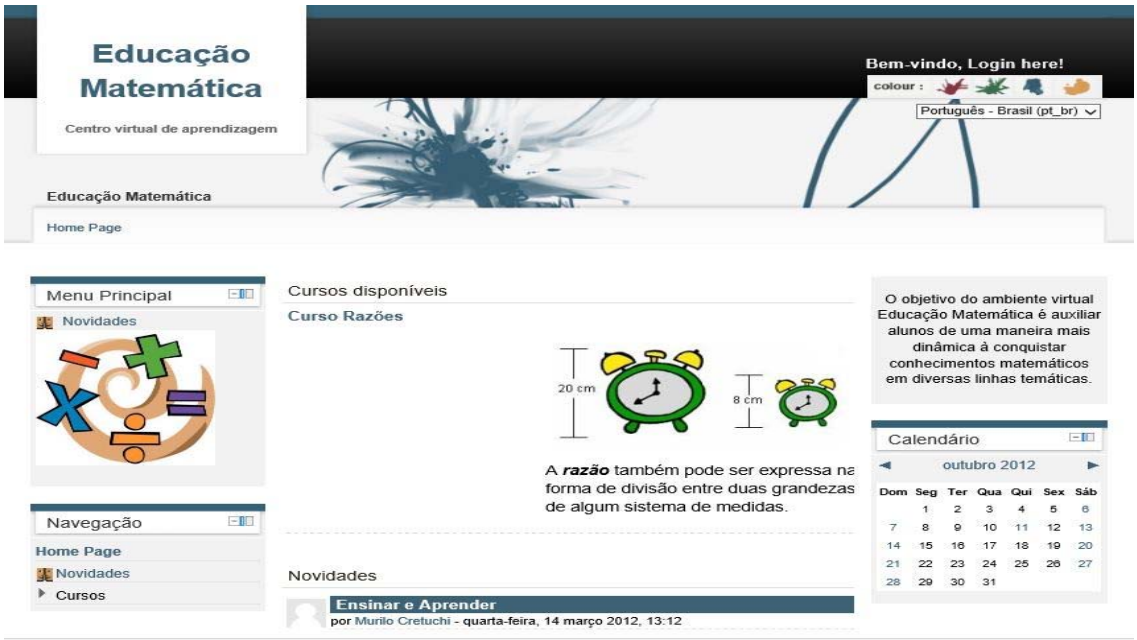
Logo, esta forma de se pensar o ambiente virtual parece mais adequada para a sua utilização como apoio ao ensino à distância e de cursos de capacitações. Logo, surgem oportunidades de diferentes aprendizados, como o de conteúdos matemáticos mediados pelo software de Geometria Dinâmica – o Geogebra.

O Moodle dispõe de um conjunto de ferramentas que podem ser selecionadas pelos professores de acordo com seus objetivos pedagógicos, com isso, os professores têm contato com uma gama de ferramentas que viabilizam a interação online, entre professor□tutor x aluno□cursista, aluno□cursista x aluno□cursista. Os professores podem publicar materiais de quaisquer tipos de arquivos, apostilas como as que envolvem a utilização e uso do Geogebra, dentre outras funcionalidades. O moodle é dotado de uma interface simples, seguindo uma linha de portal. As páginas dos cursos são divididas em três colunas que podem ser personalizadas pelo professor, inserindo elementos em formato de caixas como Calendário, Usuários Online, lista de Atividades. Por exemplo, poderia ser criada uma área de convivência para o registro de notícias relacionadas ao curso como, por exemplo, eventos relacionados ao Geogebra. Destarte, possibilidades diversas de trabalhos que envolvam o Moodle associado às ferramentas como o software livre Geogebra são proporcionadas com a junção desses recursos tecnológicos, indo ao encontro da tentativa de melhoria do ensino e aprendizado de um dado saber, dentre eles, o saber matemático, Mercado (1999).

4. Uma Ideia Inovadora e Promissora

Uma plataforma do Moodle está em desenvolvimento na Fatec Ourinhos, São Paulo – Brasil, a fim de colaborar com o ensino e aprendizado da matemática dos alunos, utilizando o Geogebra como ferramenta auxiliadora desses saberes.

Figura 1 - Página Principal Moodle.



Fonte: Murilo Cretuchi Delfino de Oliveira (2012).

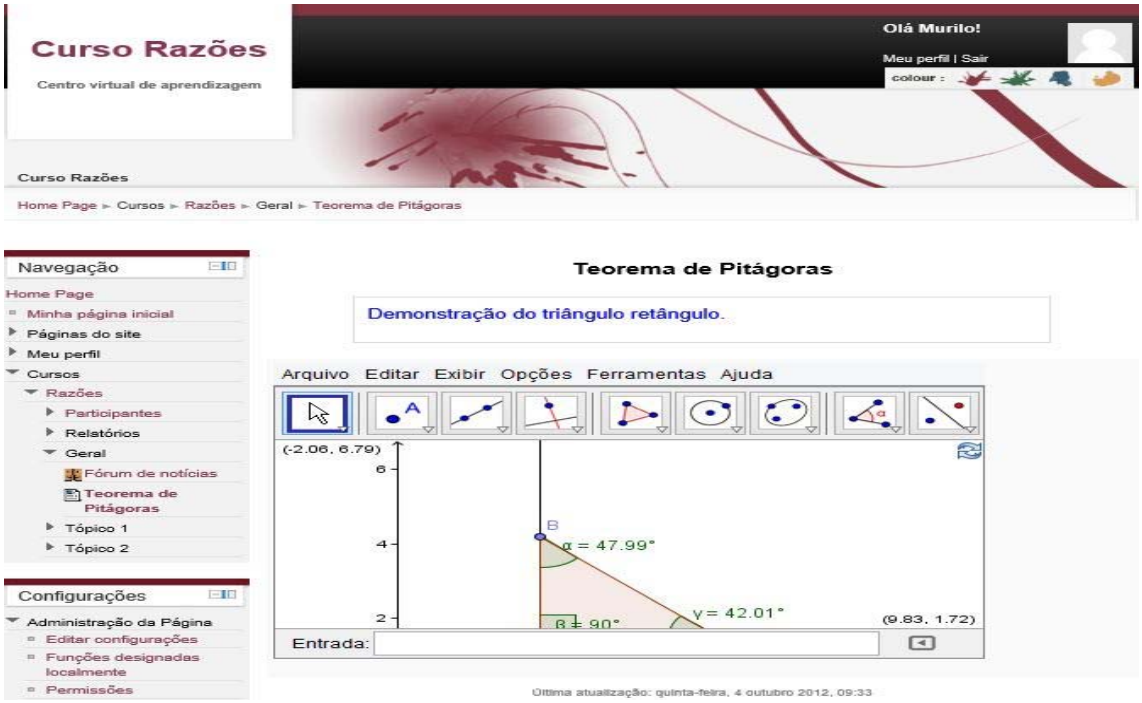
De acordo com Valente:

> [...] o computador não é mais o instrumento que ensina o aprendiz, mas a ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo, e, portanto, o aprendizado ocorre pelo fato de estar executando uma tarefa por intermédio do computador (VALENTE, 1998, p. 12).

O ambiente virtual contará com uma grande gama de material pedagógico como dicas de matemática, exercícios aplicados em vestibulares, plano de aula, softwares educacionais de apoio à tecnologia, como: fóruns, chats e e-mail, pois o estar junto virtualmente envolve "o acompanhamento e assessoramento constante dos membros do grupo, no sentido de poder entender o que cada um faz, para ser capaz de propor desafios e auxiliá-lo a atribuir significado ao que está realizando" (VALENTE, 2005, p.28).

Espera-se que com tais ações, um trabalho de cooperação e troca de conhecimentos e que possa fomentar resultados concretos que contribuam para uma melhoria do ensino e aprendizado da matemática, ou seja, professores, tutores e alunos trabalhando para um bem comum: a geração de cidadãos críticos e capazes de transformar o meio no qual estão inseridos.

Fig. 2 – Moodle com o Geogebra



Fonte: Murilo Cretuchi 2012.

O Ambiente Virtual de aprendizagem apresentado adota a Metodologia Instrucionista, Construtivista e Sócio-Interacionista, onde se procura instigar a curiosidade dos usuários, por meio da curiosidade e interação, já que o mesmo é levado a encontrar as respostas a partir de seus próprios conhecimentos e de sua interação com a realidade e com os colegas.

Conclusão

O ambiente Moodle junto com o software Geogebra se apresenta como uma grande alternativa de aprendizagem online, pois disponibiliza ao professor a escolha de ferramentas como fóruns, Chat, diários entre outras que se enquadra de acordo com cada objetivo que o professor pretender com cada curso. No entanto é preciso que o professor esteja preparo para lidar com as diferentes situações que possam surgir, onde, atuando como facilitador, como um mediador, possa realmente acrescentar ao curso o trabalho em conjunto com seus colaboradores, visando à aprendizagem colaborativa. O conhecimento e a valorização das teorias da aprendizagem e a introdução da tecnologia no ambiente escolar faz parte desse processo de lapidação e aprimoramento dos profissionais dessa área.

Espera-se, futuramente, apresentar a ferramenta do Moodle acompanhado do software Geogebra de forma mais detalhada e funcional, com possíveis projetos oriundos deste ambiente e analisar os possíveis ganhos no ensino e aprendizado matemático mediado pelos instrumentos tecnológicos, além de se oferecer cursos de capacitação aos professores da rede do município de Ourinhos, fomentando e colaborando com a formação dos professores das escolas e da área de matemática.

Referências

Ally, M.(2004). *Foundations of Educational Theory for online learning*. 2004. In: Terry Anderson, T. e Elioumi, F. Theory and Practice of Online Learning. Athabasca: cde. athabascau.ca/online_book.

Mercado, Luís Paulo.(1999). *Formação continuada de professores e novas tecnologias.* Maceió: Edufal/INEP.

Milligan, C. (1999).*Delivering Staff and Professional Development Using Virtual Learning Environments. In: The Role of Virtual Learning Environments in the Online Delivery of Staff Development. Institute for Computer Based Learning, Heriot-Watt University, Riccarton, Edinburgh EH14-4AS*. October 1999. Disponível em: <http://www.icbl.hw.ac.uk/jtap-573/573r2-3.html>. Acesso em: 25 de maio de 2012.

Moodle, Sítio. (2005). Disponível em:< http://moodle.org>. Acesso em 04 de outubro 2012.

Pereira, Scmitt, Dias, Alice T. C., Valdenise, Maria R. A. C; *Ambientes Virtuais de Aprendizagem.* Disponível em: <http://www.livrariacultura. com . br/imagem/capitulo/2259532.pdf>. Acesso em 25/05/2012 às 15h17min.

Prado, Rosemeiry de Castro.(2004). *O Comportamento Humano e o Desenvolvimento da Aprendizagem Mediante o Uso dos Instrumentos.* ENCONTROS: Estudos Acadêmicos**.** n.5, p.114-120.

Silva, Angela Carrancho.(2009). *Aprendizagem em Ambientes Virtuais*. Porto Alegre, Mediação.

Valente, J. A.(1998). *Computadores e conhecimento: repensando a educação*. Campinas: UNICAMP/NIED.

Valente, J. A.(2005) *Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador.* MEC/SEED. Disponível em: <http://portal.mec. gov. br/seed arquivos/ pdf / 3sf.pdf> Acesso em: 24 de maio de 2012 às 16h36min.

FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UMA COMUNIDADE DE PRÁTICA AO UTILIZAR O SOFTWARE GEOGEBRA

Loreni Aparecida Ferreira Baldini - Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
loreni@ibest.com.br - marciacyrino@uel.br
FAP – Faculdade de Apucarana - Universidade Estadual de Londrina – Brasil

Modalidade: Comunicação (C)
Nível Educativo: Formação e Atualização Docente
Palavras-chave: Educação Matemática, Formação de Professores de Matemática, GeoGebra, Funções e Geometria.

Resumo
Nesse artigo discutimos um dos fatores que ainda se constitui um desafio para os formadores de professores: o uso das Tecnologias Informacionais e Computacionais nas práticas pedagógicas. Trata-se de uma pesquisa em andamento que está sendo desenvolvida em uma Comunidade de Prática (WENGER, 1998) de professores e futuros professores de Matemática que utilizam o GeoGebra em uma proposta de formação. Temos como objetivo analisar em que medida as práticas desta comunidade permitem a aprendizagem de professores e futuros professores de matemática acerca de seus conhecimentos profissionais. Nos encontros realizados observamos que o trabalho com o software permitiu que os professores percebessem articulações entre conteúdos matemáticos, discutissem e refletissem acerca das potencialidades do GeoGebra no ensino da Matemática em diferentes níveis de ensino. Para exemplificar, apresentamos uma tarefa que foi desenvolvida utilizando o software que permitiu articular os conteúdos de funções e geometria, tendo como foco a ferramenta "controle deslizante".

Introdução

A formação de professores tem se constituído cada vez mais em um desafio para os formadores de professores. Vários fatores influenciam na formação de professores e, por conseguinte, na prática pedagógica. Quando falamos em formação de professores consideramos a formação inicial e continuada, que envolvem discussões a respeito de teorias educacionais, de práticas pedagógicas, de legislação, dos campos ideológicos e político presentes nesse complexo processo de educar. Ponte (1998) faz uma distinção entre formação e desenvolvimento profissional. Segundo o autor, a formação está mais associada à ideia de frequentar cursos enquanto o desenvolvimento profissional envolve questões para além dos cursos, constituindo-se em processos formais e informais que abrangem a troca de experiências, leituras, reflexões e as decisões tomadas pelo professor.

Ponte (1998) destaca três vertentes do desenvolvimento profissional:

> uma vertente didática, associada à prática letiva, uma vertente organizacional, associada à participação das diversas esferas da vida da escola e da sua relação com a comunidade, e uma vertente pessoal, associada ao modo como o professor encara e promove o seu próprio desenvolvimento profissional (p.5).

Nesse artigo, abordaremos aspectos da vertente didática, associada à prática letiva, uma vez que o interesse é discutir questões a respeito do uso da informática na Educação Matemática. O uso das TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação como recurso pedagógico no ensino de Matemática refere-se ao domínio de métodos de ensino, situado no campo da didática, e torna-se um aspecto fundamental para o desenvolvimento profissional do professor, pois estes recursos estão cada vez mais presente no âmbito escolar, por meio de softwares de geometria, funções, álgebra, matemática recreativa, *applets* e da internet e seus conteúdos. No entanto, é preciso refletir a respeito de ambientes que favoreçam aos professores a aprendizagem desses recursos, a exploração de suas potencialidades e sua inserção na prática pedagógica. Um ambiente destacado por Cyrino (2009, p.105) como "espaço fecundo para impulsionar a constituição da identidade profissional, bem como para explorar os processos de aprendizagem de professores e futuros professores" é a Comunidade de Prática.

Wenger (2009) ressalta que uma comunidade de prática é um grupo de pessoas ligadas pelo conhecimento especializado compartilhado e pelo desejo por um empreendimento conjunto. Essas pessoas se reúnem para discutir e estudar um determinado assunto. Na prática e na troca de experiência encontram solução para as especialidades de acordo com a capacidade de contribuir de cada indivíduo. Wenger (2009, p. 01) argumenta que uma Comunidade de Prática "é um grupo de pessoas que compartilham um interesse ou paixão por alguma coisa que eles fazem, e aprendem como fazer melhor conforme elas interagem regularmente". Cyrino (2009, p. 98) destaca que "uma comunidade de prática é um espaço no qual se pode explorar a negociação de significados como um mecanismo para a aprendizagem. O significado é fundamentalmente o que a aprendizagem produz".

De acordo com Wenger, McDermott, e Synder (2002) a estrutura básica de Comunidade de Prática, que a difere de outros tipos de comunidades, é a combinação de três elementos: o domínio, a comunidade e a prática.

Para Wenger, McDermott, e Synder (2002), o domínio cria uma base comum e um senso de identidade comum entre os participantes, legitima a comunidade por meio da afirmação e de seus propósitos. Um domínio bem desenvolvido estabelece qual conhecimento a comunidade de prática irá gerenciar, é a "razão" que leva o indivíduo a participar de uma comunidade de prática. A comunidade "cria o tecido social da aprendizagem, encoraja interações e relacionamentos baseados no respeito e confiança

mútua“ (p.29). Nessa perspectiva, Cyrino (2009, p. 97) destaca que a comunidade é “o ambiente no qual as pessoas interagem, aprendem e constroem relação” assumindo um compromisso mútuo. A prática “é um conjunto de estruturas, ideias, ferramentas, informação estilos, línguas, estórias e documentos que os membros da comunidade compartilham”, é o repertório compartilhado pela comunidade (WENGER; MCDERMOTT; SYNDER, 2002, p. 29).

Apresentamos a seguir parte de uma pesquisa em andamento que está sendo desenvolvida em uma Comunidade de Prática formada por professores e futuros professores de Matemática que utilizam o GeoGebra[1], em uma proposta de formação com vistas ao desenvolvimento profissional, e que tem como objetivo analisar em que medida as práticas desta comunidade permitem a aprendizagem de professores e futuros professores de matemática acerca de seus conhecimentos profissionais. Mais especificamente, apresentamos algumas aprendizagens relativas ao conhecimento profissional de professores ocorridas nessa Comunidade a partir da utilização do GeoGebra, nomeadamente articulações entre conteúdos matemáticos e as potencialidades do GeoGebra no ensino da Matemática em diferentes níveis de ensino.

Articulação entre Função e Geometria e o controle deslizante

Descrevemos a seguir uma tarefa que foi desenvolvida pelos membros da Comunidade de Prática investigada, que revela aspectos de sua prática e evidencia algumas aprendizagens de professores e futuros professores de matemática. Quando essa tarefa foi desenvolvida essa Comunidade de Prática era formada por sete estudantes de licenciatura em Matemática, dez professores da Educação Básica, uma professora do Ensino Superior e pela pesquisadora (primeira autora desse artigo) que também atua na Educação Básica e no Ensino Superior e foi legitimada pelos demais como um membro da comunidade. A comunidade se reúne uma vez por semana em um colégio público de Arapongas (Paraná – Brasil) que disponibiliza o laboratório de informática para utilização do software GeoGebra.

A tarefa foi organizada e desenvolvida em uma perspectiva investigativa-exploratória que, de acordo com Lima e Nacarato (2009), são tarefas que requerem que se vá além do que lhe é sugerido pelo enunciado, na qual a pessoa é incentivada a exprimir suas

[1]Disponível no site http://www.GeoGebra.org/cms/, software de matemática dinâmica, livre e que permite realizar atividades de geometria, de álgebra, de números, de estatística em qualquer nível de ensino.

experiências, perceber regularidades, levantar conjecturas e buscar sua validação, ou não. Consideramos que o uso do GeoGebra possibilita o desenvolvimento desse tipo de tarefa, uma vez que permite experimentar, testar, realizar generalizações e ainda, flexibilidade e criatividade na resolução de um problema, diferente da mídia lápis e papel na qual muitas vezes a Matemática é vista como estática.

A Tarefa (Quadro 1) foi entregue a todos em folha xerocopiada e para ser resolvida formaram-se quatro grupos compostos por professores e estudantes da licenciatura. Foi combinado que os grupos analisariam e discutiriam a tarefa e que na sequência discutiriam no grande grupo (toda a comunidade), para depois utilizar o GeoGebra para resolução. Com a finalidade de manter o sigilo dos participantes no decorrer da análise, os professores serão identificados pela letra P seguida de outra letra e os estudantes pela letra E, também seguida de outra letra. Por exemplo, PA representa o professor A, EM representa estudante M e a pesquisadora por PL.

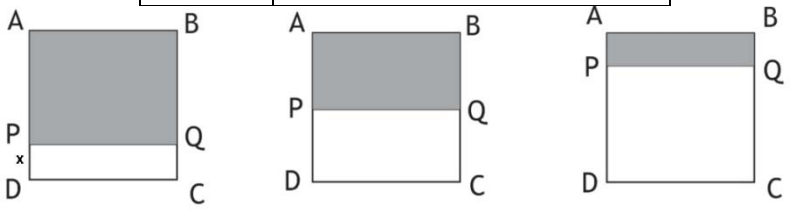
Quadro 1: Tarefa

TAREFA 1

O quadrado ABCD tem o lado de 10 cm. O ponto P se move de D para A, de modo que PQ se conserva paralelo a AB.

a) Calcule a área da figura sombreada para x=1; 2; 3; 4; 5; 6 em cm e arrume os dados obtidos em uma tabela. Obs.x = PD

X	Área do PQAB
1	
2	
3	



b) Quanto pode medir o lado de medida x?

c) Represente essa dependência na tabela, num gráfico cartesiano.

Fonte: Adaptada de Cândido (2000).

Após discussão nos pequenos grupos, PA iniciou a apresentação da primeira análise do problema no grande grupo.

PA: *Para preencher a tabela nosso grupo pensou assim: substituindo o x por um, a gente faz 10-1 a área sombreada será um retângulo de 10 por 9, será 90; se x=2, será 80 e assim por diante. Após preencher a tabela com o valor da área, o grupo observou que o x poderia assumir os seguintes valores, x>0 e x<10, mas o zero está incluído.*

PM: *Eu acho que x não pode ser igual a 10, pois não haverá área sombreada.*

PF: *Acho que (x) pode medir de 1 a 9.*

EO: *Entra a ideia de limite.*

PA: *O x pode assumir número com vírgula também.*

PL: *O que de fato está sendo perguntado na tarefa?(referindo-se aos valores que x poderia assumir).*

Diante do questionamento retomaram a leitura e discutiram nos pequenos grupos a questão se o zero e o 10 deveriam ou não serem incluídos para se ter área a sombreada. Observando a situação de conflito, em que alguns membros demonstravam dúvidas a respeito dos limites inferior e superior da função, fizemos uma nova provocação.

PL: *O que pede o item b da tarefa?*
PO: *O domínio da função.*
PA: *Então, pode ser escrito assim também* $]0,10[$?
PM: *Ainda acho que o x pode assumir o zero, porque vamos ter toda área sombreada, ao contrário se assumir o 10. Você tem que virar o colchete para ele (zero) ficar incluído.*

A PA, que havia iniciado a discussão, com dúvida em como fazer a representação escreveu no quadro que $0 < x < 10$ e também $0 \leq x < 10$. Diante dos argumentos da PM, que chamava a atenção para o fato de que o problema pedia "área sombreada" a partir da variação do valor do x, todos concordaram que o x poderia variar de zero, incluindo-o, até 10, ou seja, que o domínio da função seria $0 \leq x < 10$.

Na sequência, PA apresentou o item c da tarefa. Desenhou no quadro um esboço do gráfico, um segmento de reta, ligando os pontos que variavam de zero a dez.

PA: *Nesta função podemos ligar os pontos, pois os valores de x estão no conjunto dos (Números) Reais.*

Escreveu, também, a expressão $A = 100 - 10x$ para representar a área sombreada da figura. Observamos que até aquele momento, as discussões a respeito do domínio da função não estavam vinculadas ao modelo matemático e sim a representação geométrica do problema, ou seja, o repertório compartilhado da comunidade estava ligado à área sombreada e não a uma expressão que representasse a função.

No decorrer da apresentação do 1º grupo, todos interagiram de modo que não sentiram a necessidade das apresentações dos outros grupos. Alguns professores questionaram a forma como o problema foi apresentado.

PR: *Os quadrados deveriam vir antes da tabela. Nosso grupo não analisou o item b. Preenchemos a tabela e fomos direto para o gráfico.*
PL: *Vocês observaram a forma como o domínio da função foi pedido?*
PA: *(O item b) não usa a palavra domínio para pedir o domínio, isso para os alunos é importante, porque é assim que eles fazem.*

O comentário feito pela PR suscitou uma reflexão a respeito da apresentação do problema, que pode provocar obstáculos na sua resolução. PR e EJ comentaram que seria melhor que a representação dos quadrados viesse antes do item a. Essa análise a respeito do enunciado do problema revela preocupação com aspectos didático-pedagógicos que fazem parte do conhecimento profissional de professores de Matemática.

Para a representação no GeoGebra, sugiram algumas sugestões. A primeira proposta foi a de usar a planilha para inserir os pontos e depois ligá-los com um segmento de reta. No entanto, manifestaram a seguinte dúvida: ao traçar o segmento estamos representando a função? Foi feita então a segunda proposta, pois acreditavam que haveria um modo mais simples e interessante de representar corretamente o gráfico. Sugeriram digitar no campo de entrada a expressão $f(x) = 100 - 10x$. Após a inserção da função, perceberam que não era uma representação gráfica adequada, pois na janela geométrica o GeoGebra exibiu uma reta que não considerava o domínio limitado.

Sabendo que os participantes desconheciam outras possibilidades oferecidas pelo software, PL explicou-lhes um dos modos de utilizar o campo de entrada e limitar o domínio da função. A opção foi a de digitar a palavra Função, que faz com que o GeoGebra exiba a sintaxe do comando que é composto por três parâmetros: Função[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]. A partir desta possibilidade, basta substituir o parâmetro Função pela expressão matemática que representa a função e por seus limites inferior e superior, neste caso, obtém-se a expressão: Função[100-10x,0,10]. Com isso o GeoGebra exibe na janela algébrica a função $f(x) = 100 - 10x$ e na janela geométrica o gráfico, com o domínio limitado. Ainda modificamos o estilo do ponto, possibilidade oferecida pelo software, de modo que pudesse ser considerado um intervalo aberto no ponto B do gráfico, ou seja, que o 10 não estava incluído, como mostra a Figura 1.

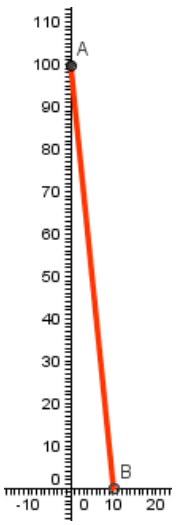


Figura 1:
Gráfico de f(x).

No encontro seguinte, discutimos uma terceira proposta de construção sugerida pela EK que utilizava a ferramenta “controle deslizante” do GeoGebra, que é uma representação gráfica de um número ou de um ângulo que possibilita a variação/movimento destes em um determinado intervalo. A construção do modo como foi apresentada não foi eficiente, pois com os movimentos o quadrado

perdia as propriedades, tornando-se um quadrilátero qualquer. No entanto, as discussões a respeito dessa proposta energizaram o grupo, todos se empenharam em realizar a construção de modo adequado e em aprender a utilizar o controle deslizante.

PL: *Para obter o lado do quadrado 10 cm você usou a malha quadriculada, por isso quando movimenta um dos seus pontos, o quadrado perde as propriedades. Para garantir as propriedades do quadrado nesta construção, um dos modos é usar segmento de comprimento fixo e construir o quadrado utilizando retas perpendiculares.*

EJ: *Usando as ideias do desenho geométrico.*

PR: *Nós usávamos (a ferramenta) círculo de raio dado, para transportar a medida do lado do quadrado.*

EJ: *Eu usei um círculo para garantir que os segmentos estariam de fato sobre o lado do quadrado e com isso não dá erro quando movimenta o controle deslizante.*

Observando que o problema aborda aspectos geométricos e algébricos, PL levantou a possibilidade de vincular o movimento do segmento PQ ao controle deslizante que determina a medida x e a área sombreada nomeada de pol2, a um ponto M = (PQ, pol2) pertencente ao gráfico. Com a inserção do ponto M no campo de entrada e com a animação do controle deslizante PQ, que alterava o x constantemente, mais a habilitação do rastro de M, o gráfico foi sendo construído simultaneamente aos movimentos, considerando a função $f(x) = 100 - 10x$ no contexto do problema. Entre as construções apresentadas, destacamos as figuras 2 e 3 que tratam da mesma construção, porém com valores diferentes para x, assumidos pelo movimento do controle deslizante, que foi fundamental nesta situação.

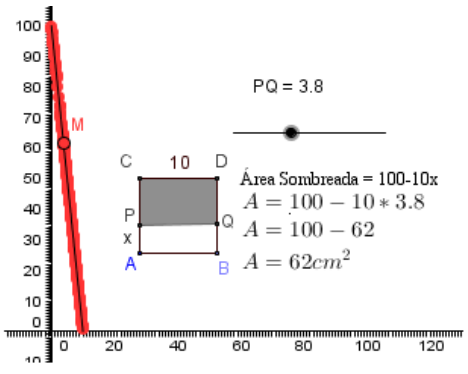


Figura 2: gráfico x=3,8 cm

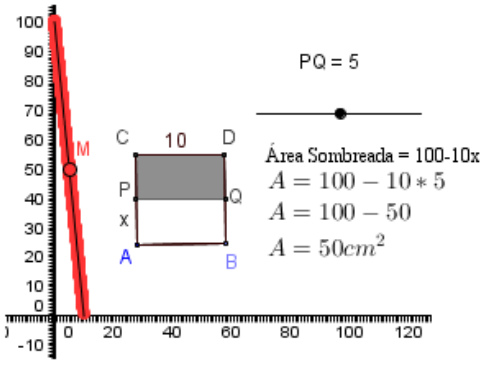


Figura 3: gráfico x= 5 cm

PR: *Que bacana eu não sabia que dava para fazer isso!*

A PR referia-se ao movimento do ponto M, vinculado ao gráfico, que deixa o rastro (vermelho) e ao mesmo tempo, altera a área sombreada, atualizando os cálculos de acordo com o movimento (por meio da animação) do controle deslizante.

Algumas considerações

A resolução da tarefa 1 mostrou indícios de desenvolvimento do conhecimento profissional, uma vez que os participantes desta comunidade de prática se envolveram com a discussão de conhecimentos matemáticos e didático-pedagógicos, na medida em que resolviam o problema e questionavam seu enunciado.

Observamos que a utilização da ferramenta controle deslizante foi fundamental para visualização de conceitos matemáticos tais como: construir quadrados considerando suas propriedades, medir área vinculada aos movimentos de uma função e analisar o domínio de uma função. Possibilitou o entendimento de que conforme o valor de x aumenta, a área sombreada diminui e o gráfico descreve uma função decrescente. Por meio da utilização do controle deslizante, foi possível obter simultaneamente todos os movimentos: segmento PQ, alteração de x, da área sombreada e do gráfico. A utilização do controle deslizante permitiu a articulação entre os conteúdos de função e geometria, fator que pode colaborar para que nas práticas pedagógicas os conteúdos matemáticos não sejam abordados de modo fragmentado.

Diante desta experiência, podemos inferir que a comunidade de prática deve ser assumida como um espaço que propicia aos membros liberdade e confiança para expor ideias, dificuldades, concordar ou discordar com as questões levantadas pelo grupo, em discussões que envolvem a sua prática, revelando-se como um espaço que favorece a aprendizagem.

Referências bibliográficas

CÂNDIDO, S. L. Uma Experiência sobre o Ensino e a Aprendizagem de Funções. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, 2000 ano7, n.8, p.47-56.

CYRINO, M. C. C. T. Comunidades de prática de professores como espaço de investigação sobre a formação de professores de matemática. In: BATISTA, Irinéa de Lourdes; SALVI, Rosana Figueiredo. **Pós-graduação em ensino de ciências e educação matemática:** perfil de pesquisas. Londrina: EDUEL, 2009, p. 95-110.

LIMA, C. N. M. F, NACARATO, A. M. A investigação da própria prática: mobilização e apropriação de saberes profissionais em Matemática. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, 2009, v.25, n.02, p.241-266.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional. In **Actas do ProfMat 98,** p. 27-44.Lisboa: APM, 1998.

WENGER, E.**Communities of practice: Learning, meaning and identity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998, p. 285.

WENGER, E.; McDERMOTT, R.; SNYDER, W. M. **Cultivating Communities of Practice**. Boston, Massachusetts: Harvard Business Scholl Publishing, 2002.

Wenger, E. **Communities of Practice: a few frequently asked questions.** 2009. Disponível http://www.ewenger.com/theory, acessado em 20/02/2012.

FRISOS: UNA NUEVA MIRADA A LA EVALUACIÓN

Graciela C. Lombardo[1, 2], Roxana V. Operuk[1], Silvia Caronía[1], Marcelo J. Marinelli[1], Lucas J. Domínguez[2]
gracielalombardo@gmail.com, roxsoperuk@gmail.com, silvca2@gmail.com, marcelomarinelli@gmail.com, pm_lucas@hotmail.com
Instituto GeoGebra Misiones
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales[1], Facultad de Ciencias Económicas[2] Universidad Nacional de Misiones - Argentina

Modalidad: comunicación
Nivel educativo: universitario
Palabras clave: Evaluación - Frisos – Geometría - GeoGebra

Resumen

Este trabajo surge de la evaluación para la acreditación del curso-taller "GeoGebra: una nueva mirada a la Geometría" cuyos destinatarios fueron alumnos de la UNaM. Si bien se abordaron diversos contenidos de la Geometría Sintética, se optó por evaluar las transformaciones. El propósito pretendido fue aprovechar las potencialidades del software, para que los alumnos manipulen objetos y transformaciones geométricas a fin de obtener frisos.

En particular se presenta, en esta ponencia, trabajos elaborados por los educandos y las descripciones que dieron fundamento a sus construcciones. Creemos que esta modalidad de evaluación resultó novedosa ya que pudieron conjugar sus conocimientos matemáticos y creatividad. Esta actividad, sin duda, subyace en el intelecto del estudiante haciendo que el arte y la ciencia se compongan en una ecuación que da como resultado un aprendizaje significativo.

Una vez finalizado el proceso de evaluación y viendo que, en general, las producciones se caracterizaron por su creatividad, ingenio y habilidad en el manejo del software y los conceptos geométricos utilizados, se decidió realizar la catalogación y publicación. A tal efecto se creó un sitio en la web institucional del Instituto GeoGebra Misiones, donde se alojaron los trabajos de forma que pueda accesarse mediante un menú organizado por autor/título.

Introducción

El arte y la ciencia son dos actividades exclusivas de la raza humana. Si bien algunos individuos tienen el preconcepto que estas actividades carecen de puntos comunes, en realidad pueden complementarse, más aún potenciarse.

Desde Leonardo Da Vinci, con su exquisita manera de expresar ciencia por medio de su don artístico, hasta los fractales, expresión matemática de la naturaleza utilizada como expresión visual, puede encontrarse un gran bagaje de ejemplos de la relación existente entre arte y ciencia. Verbigracia en las Reducciones Jesuíticas de la región se observan frisos realizados por los guaraníes, organizados de acuerdo a su complejidad

geométrica, embelleciendo las galerías de los sectores más importantes la nave central de las iglesias[1].

Esta publicación es el fruto del trabajo final para la acreditación del Curso-Taller "GeoGebra: una nueva mirada a la Geometría". El propósito pretendido fue que, aprovechando las potencialidades del software, los alumnos manipulen objetos y transformaciones geométricas de forma tal de obtener frisos.

Más aún, los objetivos propuestos para la concreción de las actividades realizadas en el Curso-Taller, basados en las orientaciones que ofrece la UNESCO (2008), en su documento "Estándares de competencias en TIC para docentes", son: i) Diseñar actividades en las que los estudiantes apliquen conocimientos de la disciplina a fin de resolver problemas de situaciones reales, mediante el uso de dispositivos móviles, aula virtual y softwares específicos. ii) Hacer hincapié en el aprendizaje colaborativo basado en actividades en las que los estudiantes examinen en profundidad un tema y aporten conocimientos para responder interrogantes y problemas cotidianos.

Proceso de evaluación

En toda la actividad docente queda de manifiesto el tipo de práctica evaluativa, la concepción de enseñanza y de aprendizaje que el docente posee y realiza. En el proceso evaluativo no solamente se evalúan los conocimientos que el alumno ha adquirido, sino también de qué forma lo hace, cómo se contribuye para alcanzar esa meta, la efectividad del diagnóstico continuo realizado para seleccionar los contenidos en función del grupo presente, y también la auto-evaluación docente que resignifica todos los resultados obtenidos durante y al final del proceso.

En el ámbito académico, usualmente suele decirse que la evaluación es llevada a cabo mediante un proceso, pero casi siempre el docente concluye realizando el control y registro de los resultados obtenidos por los alumnos. Según Palou de Maté (2003), existen dentro del aula tres instancias fundamentales en el proceso de evaluación, las cuales se complementan mutuamente, por el sentido que cada una de ellas tiene. La autora denomina a esas instancias: Diagnóstico Inicial, Evaluación Diagnóstica Continua y Acreditación.

En la primera etapa (Diagnóstico Inicial) la finalidad es establecer cuáles son los saberes alcanzados por los alumnos en los años anteriores; en la siguiente (Evaluación

[1] Esta actividad es significativa por formar parte de nuestra historia, cultura e identidad regional. Los Padres Jesuitas enseñaban geometría a los guaraníes, quienes realizaban frisos, ubicándolos y catalogándolos de acuerdo a un orden de complejidad, para embellecer los sectores más importantes de las iglesias.

Diagnóstica Continua) determinar cuáles son los nuevos conocimientos adquiridos a fin de enmarcar la propuesta de enseñanza, como también establecer criterios de valoración de los aprendizajes, y en la última fase (Acreditación) el propósito está centrado en la verificación de resultados para certificar y legitimar sus conocimientos ante la Institución.

En acuerdo con Carlino (2005), la evaluación, en este sentido, representa un medio potente en el que se produce la retroalimentación del aprendizaje y de la enseñanza. En efecto, lo producido por el alumno en instancias evaluativas confiere información al docente la cual puede ser devuelta al alumno, a fin de reorientar su desempeño, como así también proporcionar argumentos para repensar su práctica pedagógica posterior. Además,

> …la función tácita de toda evaluación: señalar a los alumnos qué es importante en una materia. Se ha observado que los estudiantes prestan una atención selectiva en cómo, para qué y en qué se los evalúa. Es decir, el conjunto del contexto evaluativo resulta a sus ojos una señal clara de que con esos es lo que han de aprender. Es éste el papel simbólico que juega la evaluación dentro de cada asignatura. Se trata de una función de hecho, que ocurre inevitablemente aunque no lo pretendamos. (Carlino, 2005, p. 107)

Al respecto, Carlino (2005) alude al currículum real, y lo define como lo que realmente aprenden los alumnos, más allá de lo que los profesores pretendieron enseñar. Es por ello que si tanto docentes como alumnos realizan, “con naturalidad”, prácticas innovadoras y argumentadas con la respectiva evaluación -en proceso-, entonces pueden repensarse instancias de acreditación de la misma condición.

Uso de las TIC en educación

La sociedad actual convive con una espiral ascendente de desarrollos tecnológicos que obligan a los ciudadanos a involucrarse indefectiblemente para poder interactuar con todos los órdenes de la actividad humana. Debido a esto el ciudadano requiere un mínimo de conocimientos para la utilización de estas tecnologías. Como la universidad no es ajena a esta problemática, es menester de los docentes diseñar, de manera no lineal, proyectos y actividades contextualizadas y enriquecedoras, que apoyen y/o complementen su labor escolástica diaria.

> Lograr la integración de las TIC en el aula dependerá de la capacidad de los maestros para estructurar el ambiente de aprendizaje de forma no tradicional,

> fusionar las TIC con nuevas pedagogías y fomentar clases dinámicas en el plano social, estimulando la interacción cooperativa, el aprendizaje colaborativo y el trabajo en grupo. Esto exige adquirir un conjunto diferente de competencias para manejar la clase. En el futuro, las competencias fundamentales comprenderán la capacidad tanto para desarrollar métodos innovadores de utilización de TIC en el mejoramiento del entorno de aprendizaje, como para estimular la adquisición de nociones básicas en TIC, profundizar el conocimiento y generarlo. (UNESCO, 2008, p. 7)

Más aún, las TIC son "aliadas potentes" de docentes y alumnos, permiten realizar la evaluación en un sentido amplio y confieren al profesor realizar una práctica argumentada.

> En las últimas décadas, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) han modificado las relaciones sociales en todos sus aspectos, llegando a redefinir la manera de interactuar con el medio. Por esta razón, la introducción de estas tecnologías en el aula supone un nuevo desafío para los docentes.
>
> Hasta ahora las prácticas áulicas intentaban responder el siguiente interrogante: ¿cómo enseñar Matemática desde los lineamientos de la Didáctica de la Matemática? En este momento, la cuestión es más compleja y la nueva pregunta debería ser: ¿cómo enseñar Matemática desde los lineamientos de su didáctica utilizando las TIC en forma apropiada? La respuesta a este nuevo eje de reflexión está en vías de construcción. (Podestá, 2011, p. 8)

Acerca de nuestra experiencia

En el marco del Programa de Extensión "Instituto GeoGebra Misiones"[2] se dictó, en el primer cuatrimestre del año 2012, el Curso-Taller "GeoGebra: una nueva mirada a la Geometría", destinado a alumnos de la UNaM[3].

Las actividades propuestas[4], se caracterizaron por el incremento en grado de complejidad conforme a la incorporación de conceptos y diversidad herramientas que

[2] Aprobado según Resolución CD Nº 090/12 y Nº 209/12

[3] En su mayoría alumnos del Profesorado en Matemática, y los restantes del Profesorado en física y de Ingeniería Química, de la FCEQyN de la UNaM,

[4] Relativas a los temas previstos, fueron: *Punto. Recta. Semirrecta. Segmento. Ángulo. Lugar geométrico. Triángulos. Cevianas. Puntos, rectas y circunferencias notables en los triángulos. Polígonos. Transformaciones geométricas. Paralelismo y perpendicularidad. Circunferencia. Ángulos y arcos asociados a la circunferencia. Polígonos y la circunferencia. Perímetro y área de polígonos. Longitud de la circunferencia. Área del círculo.*

ofrece GeoGebra. Luego, en una puesta en común, se socializaron las diferentes estrategias utilizadas y los contenidos involucrados. Para ello, cada interesado en mostrar su producción operó la PC conectada al proyector y explicó la estrategia empleada. Esta modalidad de trabajo resultó superadora en razón que, los asistentes, pudieron negociar significados, reflexionar acerca de la variedad de recursos y estrategias manejadas. En tal sentido, fue factible llevar a cabo la evaluación de los aprendizajes (evaluación diagnóstica). La dinámica empleada fue propicia al perfilar los resultados como avance en vías de la acreditación del Curso-Taller. Como trabajo final se encomendó la actividad grupal indicada en el Cuadro Nº 1.

Cuadro Nº 1

a) *Confecciona un friso según las especificaciones que a continuación se detallan:*
i. *Puede ser el resultado de un diseño personal.*
ii. *Puede construirse a partir de una fotografía o imagen extraída de la web. En tal caso deberás adjuntar, en un documento Word la imagen y la dirección web de origen.*
iii. *Puede construirse a partir del registro fotográfico. Al igual que en el ítem ii) deberás consignar en el documento Word la fotografía, el lugar y fecha del registro fotográfico.*
b) *Copia la imagen resultante, producida con GeoGebra, insértala en el documento Word, describe y enumera las transformaciones geométricas utilizadas en la construcción.*

A continuación se presentan algunas de las producciones y síntesis de las descripciones respectivas efectuadas por sus autores.

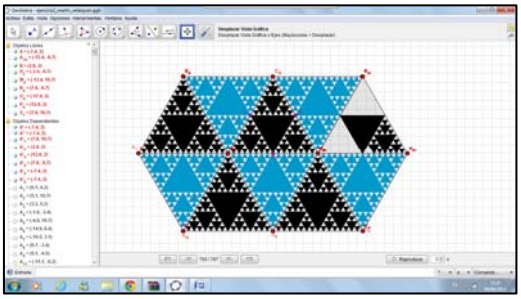


Fig. Nº 1. Sierpinsnky en movimiento

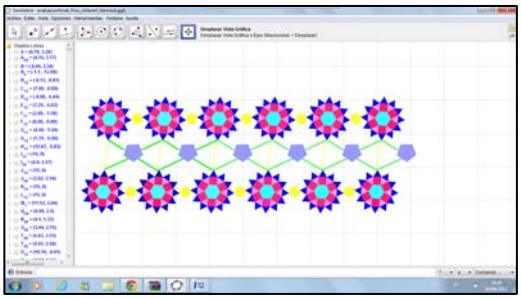


Fig. Nº 2. Flowers Impact

En la elaboración del friso de la Fig. 1, los alumnos utilizaron la opción “Creación de herramientas nuevas”. Con esta herramienta crearon el icono al que nominaron Sierpinski1, y posteriormente los Triángulos de Sierpinski de orden 2, 3 y 4. A partir de aquí, y teniendo en cuenta las características intrínsecas de este triángulo, sucesivamente aplicaron simetría axial con eje sobre un lado y rotación de 180º con centro en un vértice.

En la realización del friso correspondiente a la Fig. Nº 2 usaron la herramienta "Polígono regular" para la conformación de la flor constituida por un hexágono, cuadrados y triángulos. Una vez creada la misma aplicaron dos traslaciones, una de vector horizontal y otra de vector vertical, teniendo como resultado el conjunto de todas las flores. Las cuales ligaron mediante un segmento, cuyos extremos son el vértice de un triángulo y el punto medio de un lado del pentágono. Finalmente unieron los vértices de dos triángulos, pétalos de diferentes flores, con círculos "pequeños".

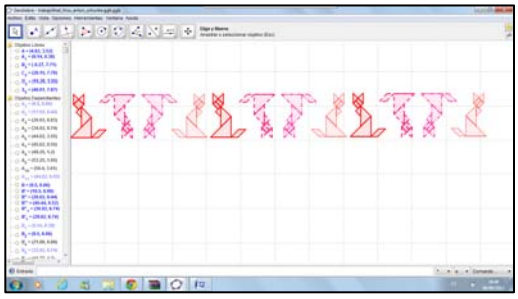


Fig. Nº 3. Jugando con la Geometría[5] Web[6]

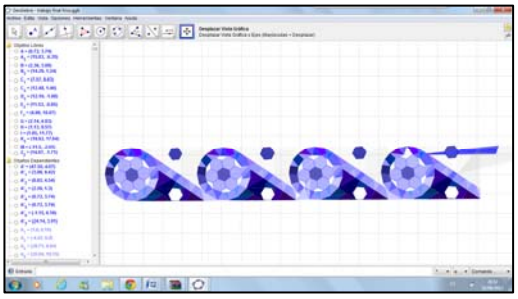


Fig. Nº 4. Imagen extraída de la

En la elaboración del friso de la Fig. Nº 3 utilizaron una imagen proveniente de la Web. Para la construcción de la primera figura animal, utilizaron una gran variedad de herramientas, como ser: polígono, punto medio, mediatriz, reflexión respecto de un punto. A partir de este diseño, las transformaciones geométricas usadas en la reproducción sucesiva fueron: simetría central respecto de un punto situado fuera de la primera figura -a una distancia de la base igual a la mitad de la altura de la primera figura- dando como resultado la segunda; desde un punto situado fuera de la segunda figura -el cual fue explícitamente elegido- trazaron una recta perpendicular a la línea horizontal que contiene la base de la primera figura, la cual fue utilizada como eje de simetría para obtener la tercera figura; seleccionaron un punto exterior a esta última figura -ubicado a una altura igual de la mitad de la altura del objeto- al cual utilizaron como centro de homotecia, de razón k = -1, para conseguir la cuarta figura; finalmente, a partir de un vector horizontal -cuyo módulo es escasamente mayor que la distancia entre la oreja izquierda del primer felino y la derecha del cuarto- aplicaron sucesivamente dos traslaciones, con lo cual obtuvieron el producto final.

[5] http://1.bp.blogspot.com/_kGHiWwhQcpo/S9j1svkUgJI/AAAAAAAAAEg/aH-5Z4BF8v0/s400/tangram_games.jpg
[6] http://juraff.blogspot.com.ar/2008/06/frisos.html

Para la confección del friso expuesto en la Fig. Nº 4, los alumnos trabajaron sobre un diseño proveniente de un sitio web. Al comenzar la construcción partieron de un hexágono regular obtuvieron simétricos del mismo respecto de ejes que contienen a sus lados, dando como resultado un objeto geométrico en forma de "flor central"; entre dos circunferencias concéntricas –donde la de menor radio está circunscripta a la "flor", formaron una serie de triángulos y cuadriláteros, análogos en forma y color con el diseño original, y con idéntico criterio prosiguieron la construcción hasta concluir la primera "onda"; para reproducirla tres veces más, recurrieron a la traslación de vector horizontal cuyo módulo es igual a la longitud de la primera "onda", quedando plasmado el esquema final.

La mayoría de las producciones fueron de autoría, por ende involucran, al momento de su diseño, contenidos subjetivos o connotativos, aunque en el proceso constructivo con el software, el carácter de los contenidos involucrados tuvieron significado denotativo, en cuanto al bagaje cognoscitivo necesario en el proceso de manipulación de objetos y transformaciones geométricas, como también en las correspondientes argumentaciones[7]. En aquellos trabajos, efectuados a partir de imágenes provenientes de la web, únicamente implicaron contenidos denotativos.

En general, se apreció que además de tener en claro cuál es la transformación adecuada para obtener el resultado deseado, los alumnos supieron administrar sus conocimientos, de manera eficaz, para realizar la primera imagen, la que posteriormente repetirían a fin de construir el friso. Es así que apelaron a conceptos y objetos geométricos correctos y manipularon adecuadas herramientas que GeoGebra ofrece.

Una vez finalizado el proceso de evaluación y viendo que, en general, las producciones se caracterizaron por su creatividad, ingenio y habilidad en el manejo del software y los conceptos geométricos utilizados, se decidió realizar su compilación y tramitar el ISBN ante la Cámara Argentina del Libro para su catalogación y publicación. A tal efecto se creó un sitio en la web institucional del Instituto GeoGebra Misiones, donde se alojaron los trabajos de forma que pueda accesarse mediante un menú organizado por autor/título (http://www.fceqyn.unam.edu.ar/geogebra/files/trabajos/Frisos2012.pdf).

[7] *"Toda imagen tiene contenidos objetivos o denotativos y subjetivos o connotativos. En la denotación se realiza el análisis real y exhaustivo de los elementos constitutivos de la imagen. En esta actividad no se incorpora ningún tipo de valoración personal. En cambio en la connotación se produce una interpretación y comprensión de los elementos vistos en la denotación, las cuales dependen de la experiencia previa que posee la persona."* (Lombardo, 2008, p. 103)

Conclusión

La construcción de frisos, mediante el uso de herramientas computacionales y el trabajo colaborativo, con la correspondiente argumentación, resultó una instancia propicia para llevar a cabo la evaluación de los conocimientos detentados por los alumnos y establecer los respectivos criterios de valoración en vías de la acreditación del Curso-Taller. El diseño de este tipo de actividades, ingeniería didáctica, en donde utilizando TIC, aula virtual, GeoGebra, software de oficina, etc. permitió realizar una apreciación innovadora de los saberes del educando mucho más "sustanciosa" que con la metodología de evaluación tradicional. La trazabilidad que otorga la herramienta de seguimiento, de las actividades de los alumnos, mediante el protocolo de construcción, constituyó un sistema de evaluación eficiente, y aceptado por los alumnos con gran aquiescencia. Esta actividad, sin duda, subyace en el intelecto del educando haciendo que el arte y la ciencia se compongan en una ecuación que da como resultado un aprendizaje significativo.

Referencias bibliográficas

- Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad.* Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
- Lombardo, G. (2008) *Análisis de la Efectividad de la Aplicación de Herramientas Metacognitivas Integradas en el Proceso de Evaluación Continua en la Geometría Proyectiva*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional del Comahue, Facultad de Ingeniería, Neuquén, Argentina.
- Palou de Maté, C. (2003). Evaluar para enseñar y evaluar para acreditar. Palou de Maté (Comp.). *La enseñanza y la evaluación. Una propuesta para matemática y lengua.* (pp. 19-48) Buenos Aires: GEEMA – U.N.Co. Facultad de Cs. de la Educación – C.E.Di.Co.
- Podestá, P. (2011). *Geometría.* Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.
- UNESCO. (2008). *Estándares de competencias en TIC para docentes.* Recuperado de http://www.eduteka.org/pdfdir/UNESCOEstandaresDocentes.pdf

GEMELAS DE ARQUÍMEDES

Mario Dalcín
mdalcin00@gmail.com
Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática de Formación Docente, Montevideo-Uruguay

Modalidad: Comunicación
Nivel educativo: Terciario, Formación y actualización docente
Palabras clave: Arquímedes, *arbelos*, geometría empírica

Resumen
En el Libro de los Lemas, *obra de Arquímedes (287 a.C. + 75 = 212 a.C.) compuesta por quince proposiciones referidas a cuestiones de geometría elemental, aparecen tres (4, 5 y 6) donde interviene el* arbelos *o cuchillo de zapatero: zona limitada por tres semicircunferencias tangentes de diámetros AB, AC, CB, donde C pertenece al segmento AB e incluidas en un mismo semiplano. La Proposición 5 presenta al arbelos dando nacimiento a dos gemelas: las Gemelas de Arquímedes. Lo que no sospechó Arquímedes hace 2300 años es que sus gemelas solo eran las dos primeras. Tanto de las dos primeras como de las que le siguieron trata esta presentación.*

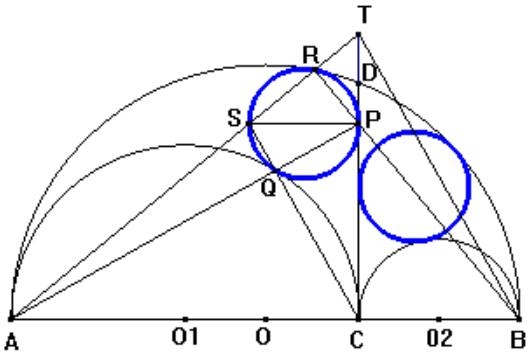
Introducción

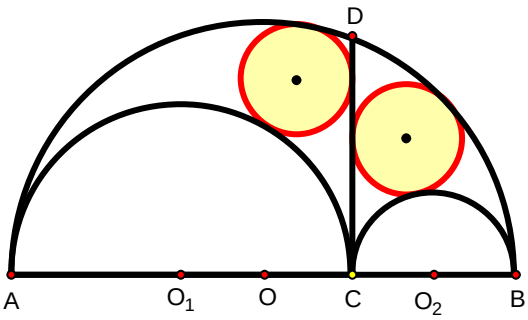
El presente artículo se propone homenajear a Arquímedes de Siracusa (287 a.C. + 75 = 212 a.C.) de quien se cumplen 2300 años de su muerte. Arquímedes poco escribió de geometría entendida en el sentido euclidiano, sin embargo dejó un tratado –el *Libro de los Lemas*- consistente en una serie de quince proposiciones referidas a cuestiones de geometría elemental. En el libro hay tres proposiciones (4, 5 y 6) donde interviene el *arbelos* o cuchillo de zapatero: zona limitada por tres semicircunferencias tangentes de diámetros AB, AC, CB, donde C pertenece al segmento AB e incluidas en un mismo semiplano. La Proposición 5 presenta al *arbelos* dando nacimiento a dos gemelas: las Gemelas de Arquímedes. Lo que no sospechó Arquímedes en aquel momento fue que las gemelas no eran solo dos.
Las figuras que aparecen en este extenso fueron hechas primero hace años en *Cabri Geometre* y luego –hace menos años- en *The Geometer's Sketchpad*. El presente texto, así como las figuras dinámicas que dieron origen a las figuras en ambos softwares, van a ser usadas próximamente en un taller donde se promoverá el uso de GeoGebra mediante la construcción de las mismas.

Gemelas 1 y 2: La Proposición 5 del *Libro de los Lemas*

Las circunferencias tangentes a CD y a las semicircunferencias de diámetros AB, AC y AB, CB respectivamente, son iguales.

P, R, Q son los puntos de contacto de la circunferencia tangente con el segmento CD y las semicircunferencias de diámetros AC y AB respectivamente. SP es diámetro.





Los puntos A, Q, P; C, Q, S; R, S, A; R, P, B están alineados. (Prop. 1 del *Libro de los Lemas*: Si en dos circunferencias tangentes construimos diámetros paralelos, sus extremos están alineados con el punto de tangencia).
T es la intersección de AR y CD.
En el triángulo (ABT):
TC y BR son alturas que se cortan en P, ortocentro del triángulo, por lo que debe ser AP $\perp$ BT.
Como también AP$\perp$ CS tenemos que CS//BT $\rightarrow$ ST/AT = CB/AB.
Los triángulos (TSP) y (TAC) son semejantes $\rightarrow$ ST/AT = SP/AC.
De lo anterior: SP/AC = CB/AB $\rightarrow$ SP = $2r_1r_2/r$.
El radio de la circunferencia PQR es entonces r_1r_2/r.
El razonamiento se puede reiterar para la otra circunferencia llegándose al mismo radio.
Esta es la demostración de Arquímedes.

Se puede hacer una demostración alternativa recurriendo al siguiente *Previo*:

CH altura en un triángulo ABC $\rightarrow AC^2 - BC^2 = AH^2 - BH^2$

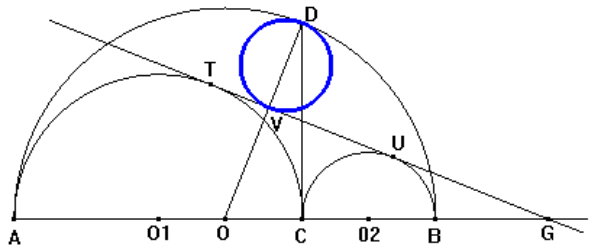
Aplicando el teorema de Pitágoras en (AHC) y (BHC):
$AC^2 - BC^2 = (AH^2 + HC^2) - (HC^2 + BH^2) = AH^2 - BH^2$

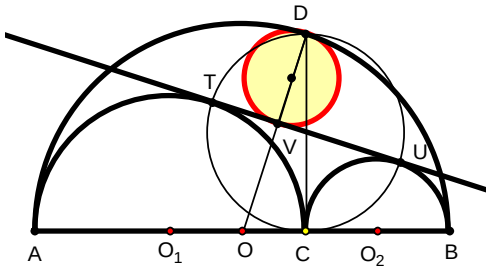
$O_1O = AO - AO_1 = (r_1 + r_2) - r_1 = r_2$
Llamando x al radio de la circunferencia tangente a CD y a las semicircunferencias AC y AB:
$O_1O + OH + x = r_1 \rightarrow OH = r_1 - O_1O - x = r_1 - r_2 - x$
En (O_1OP) con altura PH:
$O_1P^2 - OP^2 = O_1H^2 - OH^2 \rightarrow$
$\rightarrow (r_1 + x)^2 - [(r_1 + r_2) - x]^2 = (r_1 - x)^2 - (r_1 - r_2 - x)^2$
$\rightarrow (r_1 + x)^2 - [(r_1 + r_2) - x]^2 = (r_1 - x)^2 - (r_1 - r_2 - x)^2$
$\rightarrow r_1^2 + 2r_1x + x^2 - (r_1 + r_2)^2 + 2(r_1 + r_2)x - x^2 = r_1^2 - 2r_1x + x^2 - (r_1 - r_2)^2 + 2(r_1 - r_2)x - x^2 \rightarrow 2r_1x + 2(r_1 + r_2)x + 2r_1x - 2(r_1 - r_2)x = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$
$\rightarrow (2r_1 + 2r_1 + 2r_2 + 2r_1 - 2r_1 + 2r_2)x = (r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2$
$\rightarrow 4(r_1 + r_2)x = 4r_1r_2$
$\rightarrow x = r_1r_2/(r_1 + r_2)$

Gemela 3

La circunferencia de diámetro máximo tangente a TU y a la circunferencia de diámetro AB es la 3er gemela.

$TU \cap OD = \{V\}$, $TU \cap AB = \{G\}$.
$OV/O_1T = GO/GO_1 \rightarrow OV = GO \times O_1T/GO_1 = (GB + 2r_2 + (r_1 - r_2))r_1/(GB + 2r_2 + r_1) =$
$= (r_1^2 + r_2^2)/(r_1 + r_2)$.
$VD = OD - OV = (r_1 + r_2) - (r_1^2 + r_2^2)/(r_1 + r_2) = 2r_1r_2/r$.

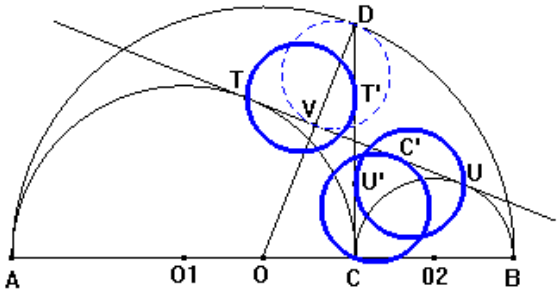


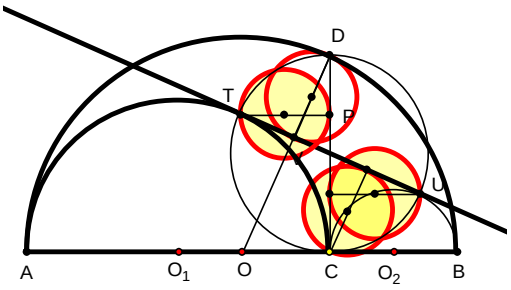


Gemelas 4, 5 y 6

C' el pie de la perpendicular a TU por C. La circunferencia de diámetro CC' es la 4ª gemela.
T', U' los pies de las perpendiculares a CD trazadas por T y U respectivamente. Las circunferencias de diámetros TT' y UU' son la 5ª y 6ª gemelas.

(CUDT) es rectángulo.

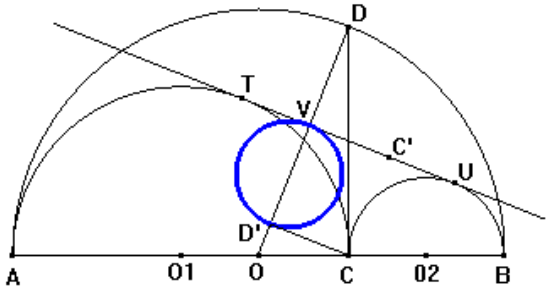


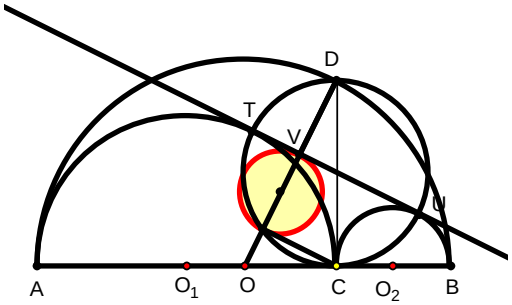


Gemela 7

D' el pie de la perpendicular trazada por C a OD. La circunferencia de diámetro VD' es la
7ª gemela.

(CC'VD') es rectángulo → VD' = CC'.

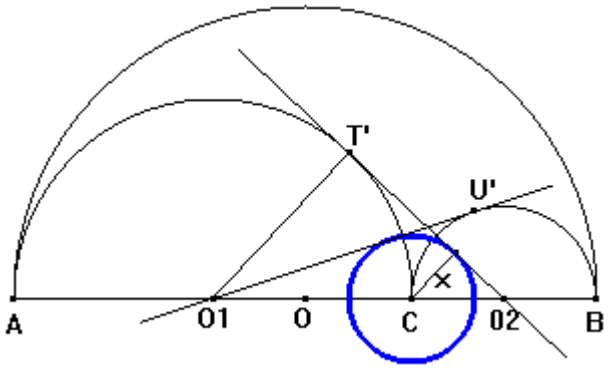


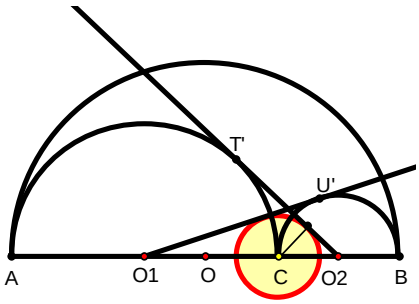


Gemela 8

O_2T' tangente a la circunferencia de diámetro AC. La circunferencia de centro C y tangente a O_2T' es la 8ª gemela. Esta 8ª gemela también es tangente a la tangente por O_1 a la circunferencia de diámetro CB.

$O_2C/O_2O_1 = x/O_1T' \rightarrow x = r_1r_2/(r_1 + r_2) = r_1r_2/r$.

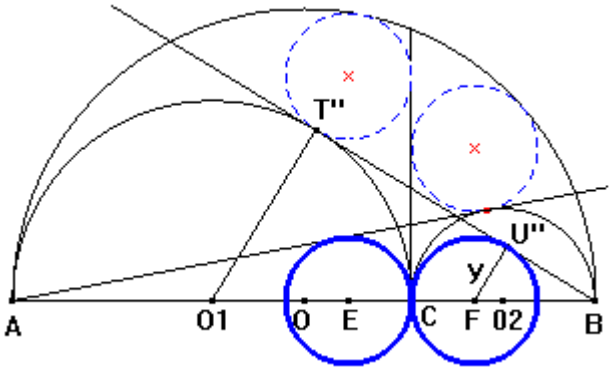


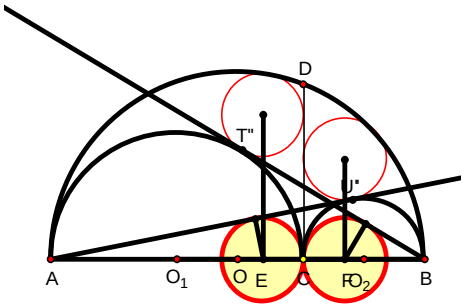


Gemelas 9 y 10

BT'', AU'' tangentes a las circunferencias de diámetro AC y CB respectivamente. F, E las proyecciones sobre AB de los centros de las circunferencias de diámetros S'P' y SP. Las circunferencias con centro F y tangente a BT'' y con centro E y tangente a AU'' son la 9ª y 10ª gemelas.

$y/O_1T'' = BF/BO_1 \rightarrow y = [(2r_2 - r_1r_2/r)r_1]/(r_1 + 2r_2) = r_1r_2/r.$

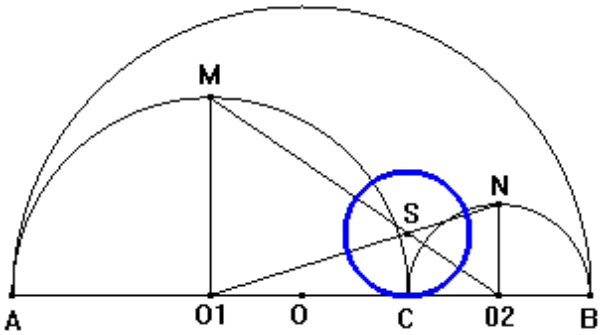


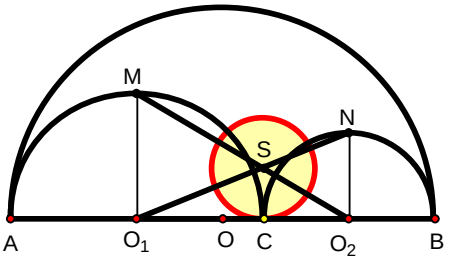


Gemela 11

O_1N y O_2M se cortan en S. La circunferencia de centro S y radio SC es la 11ª gemela.

Demostremos que SC es perpendicular a AB: consideremos s ⊥ AB por S, s ∩ AB = {S'} →
$(r_1 + r_2)/O_1S' = O_1O_2/O_1S' = O_1N/O_1S = O_1S/O_1S + SN/O_1S = 1 + r_2/r_1 = (r_1 + r_2)/r_1 \rightarrow$
$O_1S' = r_1 \rightarrow S' = C.$
$SC/NO_2 = O_1C/O_1O_2 \rightarrow SC = r_1r_2/r.$

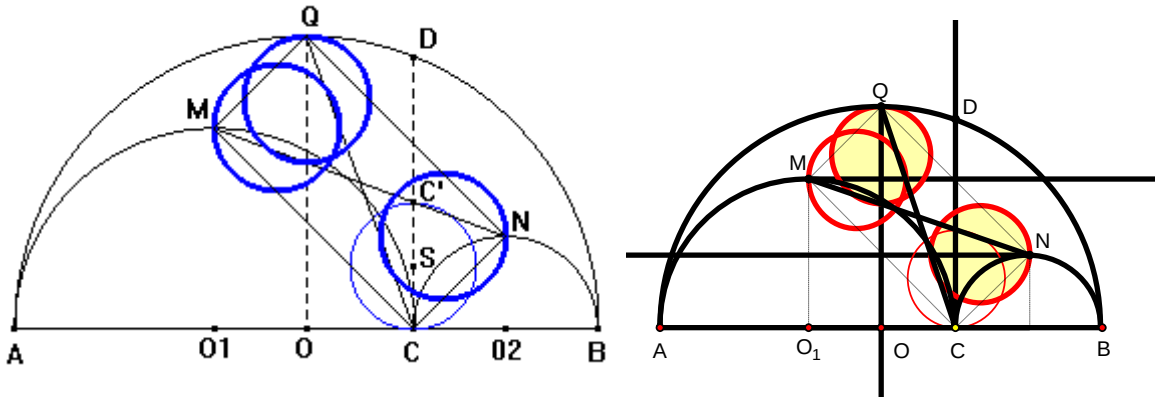




Gemelas 12, 13 y 14

La bisectriz de NQM corta a MN en Q', la bisectriz de CNQ corta a CQ en N' y la bisectriz de QMC corta a CQ en M'. Las circunferencias de diámetros QQ', NN', MM' son la 12ª, 13ª y 14ª gemelas.

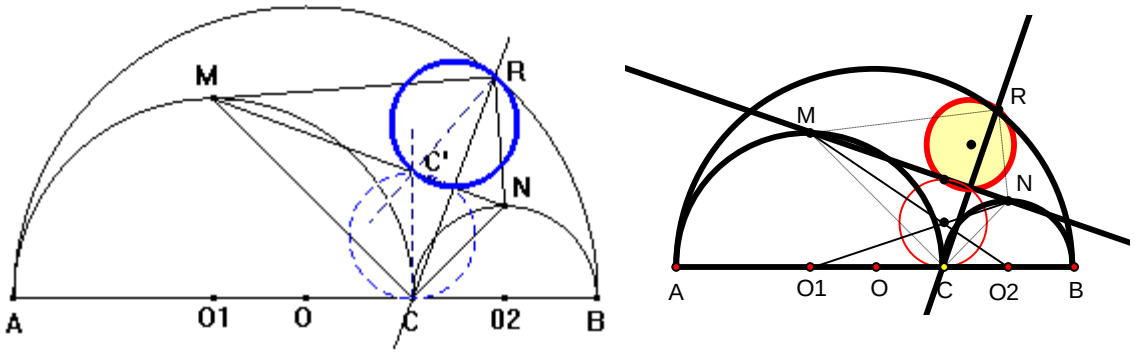
Si biz MCN ∩ MN = {C'}, demostremos que S es punto medio de CC'.
$SM/SO_2 = SO_1/SN = r_1/r_2$.
$O_1N/O_1S = O_1S/O_1S + SN/O_1S = 1 + r_2/r_1 = (r_1 + r_2)/r_1$.
$MO_2/MS = MS/MS + SO_2/MS = 1 + r_2/r_1 = (r_1 + r_2)/r_1$.
$\rightarrow O_1S/O_1N = MS/MO_2 = r_1/(r_1 + r_2)$.
$C'S/NO_2 = MS/MO_2$
$CS/NO_2 = O_1S/O_1N$
$\rightarrow C'S/NO_2 = CS/NO_2 \rightarrow C'S = CS$.
Ahora alcanza con recordar que (CNQM) es rectángulo.



Gemela 15

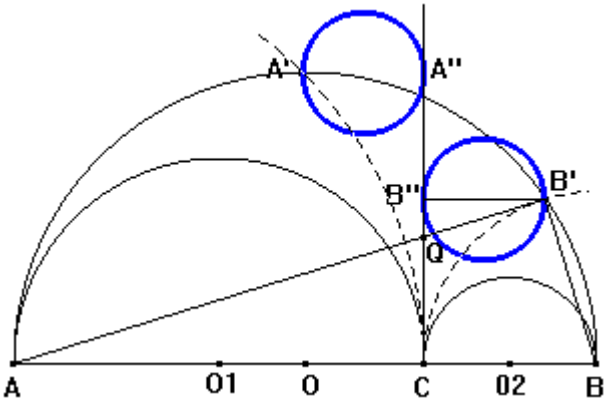
La perpendicular por C a MN corta a la semicircunferencia de diámetro AB en R, la bisectriz de NRM corta a MN en C'. La circunferencia de diámetro RC' es la 15ª gemela.

Basta recordar que los triángulos (MCN) y (MRN) simétricos.

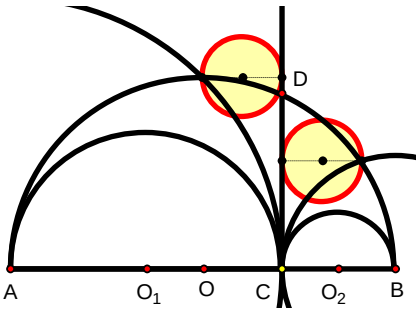


Gemela 16 y 17

A', B' los puntos de intersección de la semicircunferencia de diámetro AB con las circunferencias de centros A y B y radios AC y BC respectivamente. A'', B'' las proyecciones de A', B' sobre la recta CD. Las circunferencias de diámetros A'A'' y B'B'' son la 16ª y 17ª gemelas.



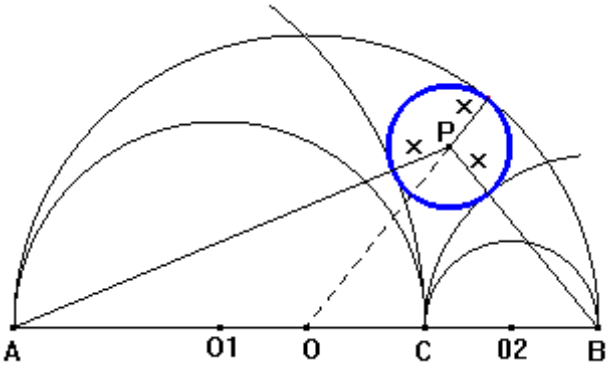
En (ABB'):
$AB' = \sqrt{(AB^2 - BB'^2)} =$
$= \sqrt{[(2r_1 + 2r_2)^2 - (2r_2)^2]} =$
$= 2\sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}$.
$AB' \cap CD = \{Q\}$.
(AB'B) y (AQC) son semejantes $\rightarrow$
$\rightarrow QC/AC = BB'/AB'$
$\rightarrow QC = AC \times BP/AP =$
$= (2r_1)(2r_2)/ 2\sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}$
$\rightarrow QC = 2r_1r_2 / \sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}$ y como
$QC = QB'$ tenemos $QB' = 2r_1r_2 / \sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}$.

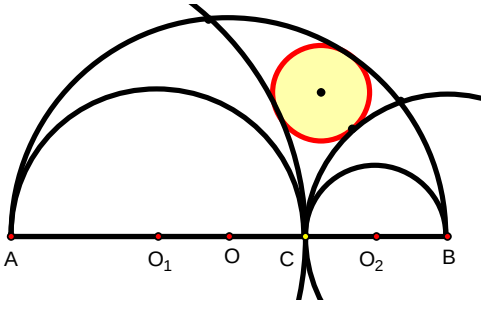


(ABB') y (B'QB'') son semejantes
$\rightarrow B'B''/B'Q = AB'/AB \rightarrow$
$\rightarrow B'B'' = AB' \times B'Q/AB$
$\rightarrow B'B'' = [2\sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}. 2r_1r_2 / \sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2)}]/2(r_1 + r_2)$
$\rightarrow B'B'' = 2r_1r_2 /(r_1 + r_2)$
$\rightarrow B'B'' = 2r_1r_2 /r$.

Gemela 18

La circunferencia inscripta en la región limitada por la semicircunferencia de diámetro AB y las circunferencias de centros A, B y radios AC, BC respectivamente, es la 18ª gemela.

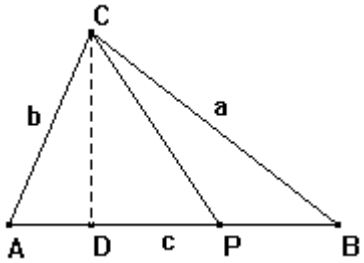




En la demostración se usará el *teorema de Stewart*:
Si P pertenece al lado AB de un triángulo ABC $\rightarrow a^2 \times AP + b^2 \times BP = CP^2 \times c + AP \times BP \times c$.

A partir del teorema del coseno
en (PBC): $a^2 = BP^2 + CP^2 - 2.\ BP.\ PD$
en (APC): $b^2 = AP^2 + CP^2 - 2.\ AP.\ PD$
Multiplicando la primera igualdad por AP y la segunda por PB y luego sumando tenemos

$$a^2.\ AP + b^2.\ BP = CP^2.\ (AP + PB) + AP.\ BP.\ (AP + PB)$$
$$a^2.\ AP + b^2.\ BP = CP^2.\ c + AP.\ BP.\ c$$



Cuando P es punto medio de AB, CP es la mediana m_c y se puede expresar en función de los lados del triángulo: $a^2.\ c/2 + b^2.\ c/2 = m_c^2.\ c + (c/2).\ (c/2).\ c$

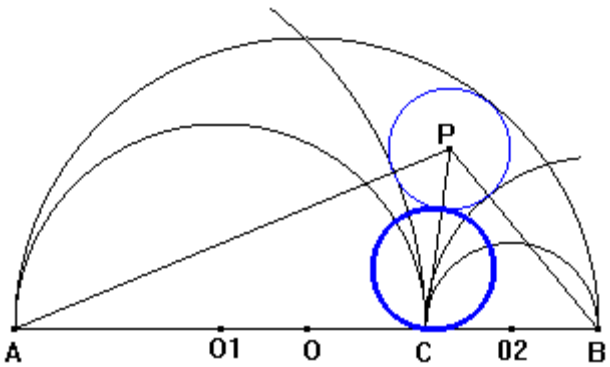
$$[(a^2 + b^2)/2]\ c = (m_c^2 + c^2/4).\ c$$
$$m_c^2 = (a^2 + b^2)/2 - c^2/4$$

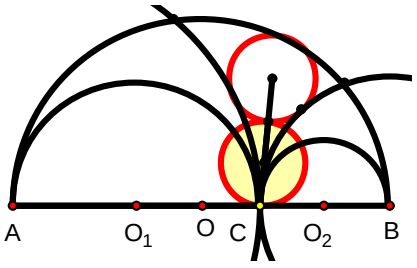
En (ABP), siendo x la medida del radio de la candidata a 18ª gemela, se cumple:

$$OP^2 = (BP^2 + AP^2)/2 - AB^2/4$$
$$\rightarrow [(r_1 + r_2) - x]^2 = [(2r_2 + x)^2 + (2r_1 + x)^2]/2 - [2(r_1 + r_2)]^2/4$$
$$\rightarrow (r_1 + r_2)^2 - 2(r_1 + r_2)x + x^2 = [4r_2^2 + 4r_2x + x^2 + 4r_1^2 + 4r_1x + x^2]/2 - (r_1 + r_2)^2$$
$$\rightarrow (r_1 + r_2)^2 - 2(r_1 + r_2)x = 2(r_1^2 + r_2^2) + 2(r_1 + r_2)x - (r_1 + r_2)^2$$
$$\rightarrow 4(r_1 + r_2)x = 2(r_1 + r_2)^2 - 2(r_1^2 + r_2^2)$$
$$\rightarrow 2(r_1 + r_2)x = (r_1 + r_2)^2 - (r_1^2 + r_2^2)$$
$$\rightarrow x = 2r_1r_2/2(r_1 + r_2)$$
$$\rightarrow x = r_1r_2 / r$$

Gemela 19

La menor circunferencia tangente a la 18ª gemela y que pasa por C es la 19ª gemela.





Usando la igualdad de Stewart en (ABP):
$[2r_2 + r_1r_2/(r_1 + r_2)]^2\ (2r_1) + [2r_1 + r_1r_2/(r_1 + r_2)]^2\ (2r_2) = CP^2.2(r_1 + r_2) + 2r_1.\ 2r_2.\ 2(r_1 + r_2) \rightarrow$

$\{[2r_2\,(r_1 + r_2\,) + r_1r_2\,]/(r_1 + r_2\,)\}^2\,(2r_1) + \{[2r_1\,(r_1 + r_2\,) + r_1r_2\,]/(r_1 + r_2\,)\}^2\,(2r_2) =$
$CP^2.2(r_1 + r_2\,) + 4r_1r_2.\ 2(r_1 + r_2\,) \rightarrow$

$\{[4r_2^{\,2}\,(r_1 + r_2\,)^2 + 4r_1r_2^{\,2}\,(r_1 + r_2\,) + r_1^{\,2}\,r_2^{\,2}\,]/(r_1 + r_2\,)^2\}.r_1 +$
$\{[4r_1^{\,2}\,(r_1 + r_2\,)^2 + 4r_1^{\,2}r_2\,(r_1 + r_2\,) + r_1^{\,2}\,r_2^{\,2}\,]/(r_1 + r_2\,)^2\}.r_2 =$
$CP^2.(r_1 + r_2\,) + 4r_1r_2\,(r_1 + r_2\,)$
$\rightarrow$

$[4r_1r_2^{\,2}\,(r_1 + r_2\,)^2 + 4r_1^{\,2}r_2^{\,2}\,(r_1 + r_2\,) + r_1^{\,3}\,r_2^{\,2} + 4r_1^{\,2}r_2\,(r_1 + r_2\,)^2 + 4r_1^{\,2}r_2^{\,2}\,(r_1 + r_2\,) + r_1^{\,2}\,r_2^{\,3}\,]/(r_1 + r_2\,)^2 =$
$CP^2.(r_1 + r_2\,) + 4r_1r_2\,(r_1 + r_2\,)$
$\rightarrow$

$[4(r_1 + r_2\,)^2\,(r_1r_2^{\,2} + r_1^{\,2}r_2\,) + 8r_1^{\,2}r_2^{\,2}\,(r_1 + r_2\,) + r_1^{\,3}\,r_2^{\,2} + r_1^{\,2}\,r_2^{\,3}\,]/(r_1 + r_2\,)^2 =$
$CP^2.(r_1 + r_2\,) + 4r_1r_2\,(r_1 + r_2\,)$
$\rightarrow$

$[4r_1r_2\,(r_1 + r_2\,)^3 + 8r_1^{\,2}r_2^{\,2}\,(r_1 + r_2\,) + r_1^{\,2}\,r_2^{\,2}\,(r_1 + r_2\,)]/(r_1 + r_2\,)^2 =$
$CP^2.(r_1 + r_2\,) + 4r_1r_2\,(r_1 + r_2\,)$
$\rightarrow$

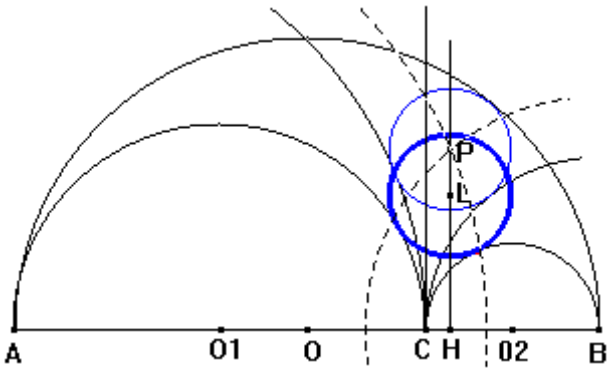
$[4r_1r_2\,(r_1 + r_2\,)^2 + 8r_1^{\,2}r_2^{\,2} + r_1^{\,2}\,r_2^{\,2}\,]/(r_1 + r_2\,) = CP^2.(r_1 + r_2\,) + 4r_1r_2\,(r_1 + r_2\,) \rightarrow$

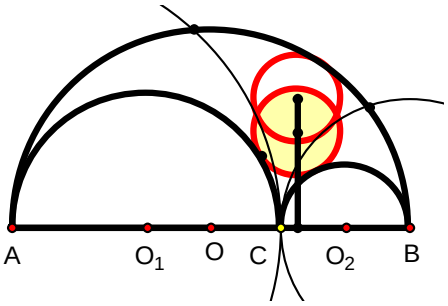
$[4r_1r_2\,(r_1 + r_2\,)^2 + 8r_1^{\,2}r_2^{\,2} + r_1^{\,2}\,r_2^{\,2}\,]/(r_1 + r_2\,) - 4r_1r_2\,(r_1 + r_2\,) = CP^2.(r_1 + r_2\,) \rightarrow$

$9r_1^{\,2}r_2^{\,2}\,/(r_1 + r_2\,) = CP^2.(r_1 + r_2\,) \rightarrow CP^2 = 9r_1^{\,2}r_2^{\,2}\,/(r_1 + r_2\,)^2 \rightarrow CP = 3r_1r_2\,/(r_1 + r_2\,).$

Gemela 20

Por el centro de la 18ª gemela trazamos una recta perpendicular a AB. La circunferencia con centro sobre dicha recta y tangente simultáneamente a las semicircunferencias de diámetros AC y CB es la 20ª gemela.





Considerando un sistema de coordenadas con AB como eje de abscisas y CD como eje de ordenadas tenemos: A($-2r_1$,0), B($2r_2$,0).
La circunferencia ($C_{A,AP}$), de centro A y radio AP, tiene ecuación:

$$x^2 + y^2 + 4r_1x - r_1^2r_2\,(4r_1 + 5r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2 = 0$$

La circunferencia ($C_{B,BP}$), de centro B y radio BP, tiene ecuación:

$$x^2 + y^2 - 4r_2x - r_1r_2^{\,2}\,(5r_1 + 4r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2 = 0$$

La intersección de estas dos circunferencias contiene al punto P de abscisa:

$(C_{A,AP}\,) - (C_{B,BP}\,)$: $(4r_1 + 4r_2\,)x + [\,r_1^{\,2}r_2\,(4r_1 + 5r_2) - r_1r_2^{\,2}\,(5r_1 + 4r_2\,)]/(r_1 + r_2\,)^2 = 0 \rightarrow$

$4\,(r_1 + r_2\,)x + [\,r_1r_2\,.\,4\,(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\,)]/(r_1 + r_2\,)^2 = 0 \rightarrow$

$(r_1 + r_2\,)x + r_1r_2\,(r_2 - r_1\,)]/(r_1 + r_2\,) = 0 \rightarrow$

$x = r_1r_2\,(r_1 - r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2$

Si H es la proyección de P sobre AB tenemos que $CH = r_1r_2\,(r_1 - r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2$
L centro de la 'futura' 20ª gemela.
En (O_1HL): $LH^2 = (r_1 + x)^2 - O_1H^2$
En (O_2HL): $LH^2 = (r_2 + x)^2 - O_2H^2$

$\rightarrow (r_1 + x)^2 - O_1H^2 = (r_2 + x)^2 - O_2H^2 \rightarrow$

$\rightarrow r_1^{\,2} + 2r_1x + x^2 - O_1H^2 = r_2^{\,2} + 2r_2x + x^2 - O_2H^2 \rightarrow$

$\rightarrow r_1^{\,2} - r_2^{\,2} + O_2H^2 - O_1H^2 = 2(r_2 - r_1)x \rightarrow$

usando el valor de CH hallado:

$\rightarrow r_1^{\,2} - r_2^{\,2} + [r_2 - r_1r_2\,(r_1 - r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2\,]^2 - [r_1 - r_1r_2\,(r_1 - r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2\,]^2 = 2(r_2 - r_1)x$

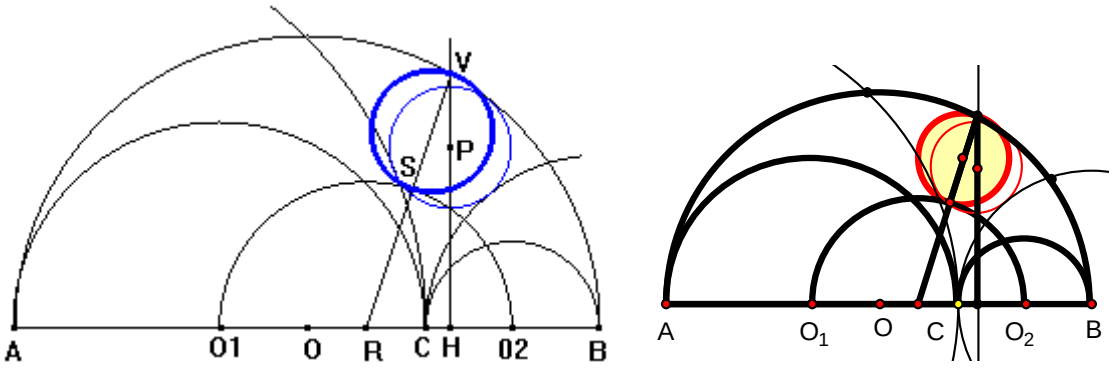
$\rightarrow$

$\rightarrow r_1^{\,2} - r_2^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2^{\,2}\,(r_1 - r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2 + [\,r_1r_2\,(r_1 - r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2\,]^2$
$- r_1^{\,2} - 2r_1^{\,2}r_2\,(r_1 - r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2 - [\,r_1r_2\,(r_1 - r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2\,]^2 = 2(r_2 - r_1)x \rightarrow$

$x = (r_1\,r_2^{\,2} + r_1^{\,2}r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2 = r_1\,r_2\,(r_1 + r_2\,)/(r_1 + r_2\,)^2 \rightarrow x = r_1\,r_2\,/(r_1 + r_2\,) \rightarrow x = r_1\,r_2\,/r.$

Gemela 21

La recta perpendicular a AB por el centro de la 18ª gemela corta a la semicircunferencia de diámetro AB en V. La menor circunferencia que pasa por V y es tangente a la semicircunferencia de diámetro O_1O_2 es la 21ª gemela.



R es centro de la circunferencia de diámetro O_1O_2.
$O_1R + RC = O_1C \rightarrow RC = O_1C - O_1R =$
$= r_1 - (r_1 + r_2)/2 = (r_1 - r_2)/2$
$RH = RC + CH =$
$= (r_1 - r_2)/2 + r_1r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2$
Usando la igualdad de Stewart en el triángulo (ABV) para el punto R:
$BV^2.\ AR + AV^2.\ BR =$
$= RV^2.AB + AR.\ BR.\ AB$
y el teorema del cateto en ABV:
$BH.\ BA.\ AR + AH.\ AB.\ BR = RV^2.\ AB + AR.\ BR.\ AB \rightarrow$
$BH.\ AR + AH.\ BR = RV^2 + AR.\ BR \rightarrow$
$[2r_2 - r_1r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2].[(r_1 + (r_1 + r_2)/2] + [2r_1 + r_1r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2].[(r_2 + (r_1 + r_2)/2] =$
$RV^2 + [r_1 + (r_1 + r_2)/2].[r_2 + (r_1 + r_2)/2]$
$\rightarrow$

$RV^2 = 2r_1r_2 + 2r_2(r_1 + r_2)/2 - r_1^2r_2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2 - (r_1 + r_2)r_1r_2(r_1 - r_2)/2(r_1 + r_2)^2 +$
$2r_1r_2 + 2r_1(r_1 + r_2)/2 - r_1r_2^2(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_2)r_1r_2(r_1 - r_2)/2(r_1 + r_2)^2 -$
$[r_1r_2 + r_1(r_1 + r_2)/2 + r_2(r_1 + r_2)/2 + (r_1 + r_2)^2/4] \rightarrow$

$RV^2 = 4r_1r_2 + (r_1 + r_2)^2 - r_1r_2(r_1 - r_2)^2/(r_1 + r_2)^2 - r_1r_2 - (r_1 + r_2)^2/2 - (r_1 + r_2)^2/4 \rightarrow$

$RV^2 = 3r_1r_2 + (r_1 + r_2)^2/4 - r_1r_2(r_1 - r_2)^2/(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$

$RV^2 = [12r_1r_2(r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_2)^4 - 4r_1r_2(r_1 - r_2)^2] / 4(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$

$RV^2 = \{4r_1r_2[3(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2] + (r_1 + r_2)^4\} / 4(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$

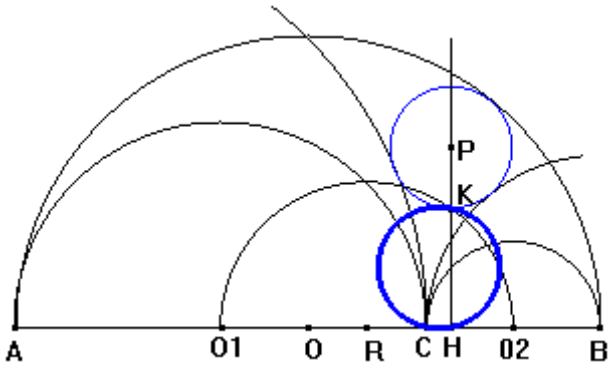
$RV^2 = \{4r_1r_2[2(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2] + (r_1 + r_2)^4\} / 4(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$

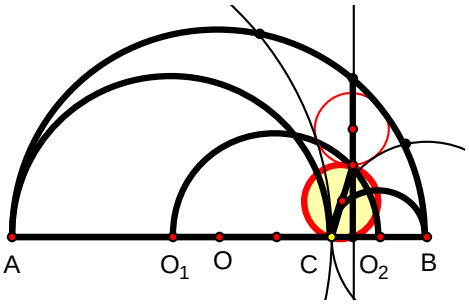
$RV^2 = [8r_1r_2(r_1 + r_2)^2 + 16r_1r_2 + (r_1 + r_2)^4] / 4(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$
$RV^2 = [(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2]^2 / 4(r_1 + r_2)^2 \rightarrow$
$RV = [(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2] / 2(r_1 + r_2)$

$SV = RV - RS = [(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2] / 2(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2)/2 \rightarrow$
$SV = [(r_1 + r_2)^2 + 4r_1r_2 - (r_1 + r_2)^2] / 2(r_1 + r_2) \rightarrow$
$SV = 4r_1r_2 / 2(r_1 + r_2) \rightarrow$
$SV = 2r_1r_2 / (r_1 + r_2)$

Gemela 22

La recta perpendicular a AB por el centro de la 18ª gemela corta a la semicircunferencia de diámetro O_1O_2 en K. La circunferencia de diámetro CK es la 22ª gemela.





Usando la igualdad de Stewart en (O_1O_2K) para el punto C:

$$O_2K^2.\ r_1 + O_1K^2.\ r_2 = KC^2.\ (r_1 + r_2) + r_1\, r_2\, (r_1 + r_2)$$

y ahora usando el teorema del cateto en el mismo triángulo:

$$(O_2H.\ O_1O_2)\ r_1 + (O_1H.\ O_1O_2)\ r_2 = KC^2.\ (r_1 + r_2) + r_1\, r_2\, (r_1 + r_2)$$

$$(r_1 + r_2)\ [\ r_2 - r_1r_2\, (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2\ ]\ r_1 + (r_1 + r_2)\ [\ r_1 + r_1r_2\, (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2\ ]\ r_2 = KC^2.\ (r_1 + r_2) + r_1\, r_2\, (r_1 + r_2) \rightarrow$$

$$[\ r_2 - r_1r_2\, (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2\ ]\ r_1 + [\ r_1 + r_1r_2\, (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2\ ]\ r_2 = KC^2 + r_1\, r_2 \rightarrow$$

$$KC^2 = r_1\, r_2 - r_1^2r_2\, (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2 + r_1r_2 + r_1r_2^2\, (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)^2 - r_1\, r_2 \rightarrow$$

$$KC^2 = [\ r_1\, r_2\, (r_1 + r_2)^2 - r_1^2r_2\, (r_1 - r_2) + r_1r_2^2\, (r_1 - r_2)\ ]\ /\ (r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$KC^2 = r_1\, r_2\, [\ (r_1 + r_2)^2 - r_1\, (r_1 - r_2) + r_2\, (r_1 - r_2)\ ]\ /\ (r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

$$KC^2 = 4\ r_1^2r_2^2\ /\ (r_1 + r_2)^2 \rightarrow$$

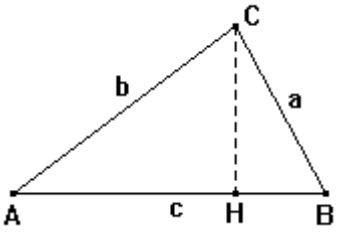
$$KC = 2r_1r_2\ /\ (r_1 + r_2)$$

Gemela 23

W pertenece a la semicircunferencia de diámetro O_1O_2 y es centro de la circunferencia tangente a las semicircunferencias de diámetros AC y CB. La menor circunferencia que pasa por W y es tangente a AB es la 23ª gemela.

En un triángulo ABC, lados a, b, c y altura CH se cumple:

$$CH = 2\sqrt{[s\,(s-a)(s-b)(s-c)]}\,/c \quad \text{siendo } s = (a+b+c)/2$$



Aplicando Pitágoras en (BHC) y (AHC):

$a^2 = (c - AH)^2 + CH^2$

$b^2 = AH^2 + CH^2$ de donde

$a^2 - b^2 = c^2 - 2c.AH \rightarrow AH = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$

por lo tanto $CH = \sqrt{\{b^2 - [(b^2 + c^2 - a^2)/2c]^2\}} \rightarrow$

$CH = \{\sqrt{[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]}\}/2c \rightarrow$

$CH = \{\sqrt{[(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]}\}/2c \rightarrow$

$CH = [\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}]/2c \rightarrow$

$CH = \{\sqrt{[(b + c)^2 - a^2][(a^2 - (b - c)^2]}\}/2c \rightarrow$

$CH = [\sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}]/2c \rightarrow$

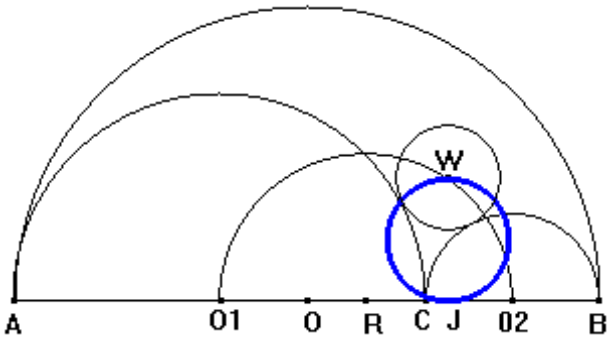
Como $a + b + c = 2s \rightarrow$ $-a + b + c = 2(s - a)$

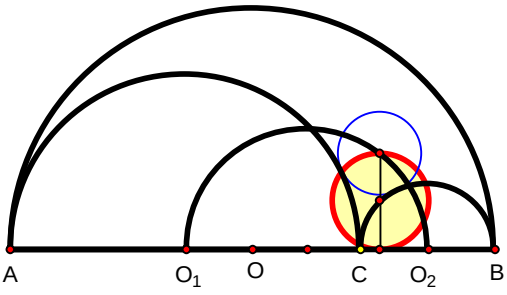
$a - b + c = 2(s - b)$

$a + b - c = 2(s - c) \rightarrow$

$CH = [\sqrt{2s\,2(s-a)2(s-b)2(s-c)}]/2c \rightarrow$

$CH = [2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}]/c$





Llamando x al radio de la circunferencia de centro W que es tangente a las semicircunferencias de diámetros AC y CB, usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$(r_1 + x)^2 + (r_2 + x)^2 = (r_1 + r_2)^2 \rightarrow x^2 + (r_1 + r_2)x = r_1r_2 \quad (*)$$

Usando la expresión hallada para la altura de un triángulo en función de sus lados en el triángulo (O_1O_2W)

$WJ = 2\sqrt{[(r_1 + r_2 + x)\,r_1\,r_2\,x]}/(r_1 + r_2) \rightarrow$

$WJ = 2\sqrt{\{r_1\,r_2\,[x^2 + x\,(r_1 + r_2)]\}}/(r_1 + r_2) \rightarrow$

sustituyendo por lo obtenido en la ecuación (*):

$WJ = [2\sqrt{(r_1^2r_2^2)}]/(r_1 + r_2) \rightarrow$

$WJ = 2r_1r_2/(r_1 + r_2)$

Referencias

Bankoff, L. (1994). The marvelous arbelos. En R. K. Guy and R. E. Woodrow (Eds.), *The Lighter Side of Mathematics*, pp. 247-253. U. S. A.: MAA.

Dodge, C. W. (1994). Reflections of a problem editor. En J. Milo Anthony (Ed.), *In Eves' Circle*, pp. 63-72. U. S. A.: MAA.

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías. Tomo 1.* México: Uteha.

Heath, T. L. (1953). Book of Lemmas. En T. L. Heath (Ed.), *The Works of Archimedes*, pp. 301-318. U.S.A.: Dover.

Schoch, T. (1998). A dozen more arbelos twins.
http://www.biola.edu/academics/undergrad/math/woopy/arbel2.htm.

Shively, L. S. (1939). *An Introduction to Modern Geometry*. U.S.A.: John Wiley & Sons.

Woo, P. (1998). The arbelos.
http://www.biola.edu/academics/undergrad/math/woopy/arbelos.htm.

GEOGEBRA, MATEMÁTICA E ARTE: ABORDAGENS E CONTRIBUIÇÕES A FAVOR DO ENSINO E APRENDIZADO DOS CONTEÚDOS E CONCEITOS.

Paulo Estevam Denadai[1] - Adriana de Almeida Melotte[2] - Carlos Roberto Cazini Junior[3] - Fábio Nogueira Queiroz[4] - Rodrigo Antonio Fernandes[5] - Vera Adriana Huang Azevedo Hypolito[6]

Paulo.e.d@hotmail.com[1] - adrianamelotte@hotmail.com[2] - carlos.r.cazini@gmail.com[3] - fabio_nq@yahoo.com.br[4] - rodrigobasket13@hotmail.com[5] - verahypolito@yahoo.com.br[6]
FATEC Brasil[1] - ETEC Brasil[2] - FATEC Brasil[3] - FATEC Brasil[4] – FATEC Brasil[5] – ETEC Brasil[6]

Modalidade: Educação.
Nível educativo: Fundamental.
Palavras chave: Geogebra; Arte; Matemática; Tecnologia.

Resumo
Ensinar nos dias atuais é uma grande arte. Arte de mediar conceitos e conhecimentos, de transmitir valores e amar ao próximo. Também é a arte de romper paradigmas de culturas arraigadas, despertando os professores para novos métodos de ensino, utilizando as novas tecnologias. E, a maior dessas artes, a mais árdua e difícil, fica por conta de associar tudo isso aos conceitos e ensinamentos da Matemática, pois, no atual ambiente escolar, as crianças têm enormes dificuldades com esta disciplina. A versatilidade e potencialidade das tecnologias contribuem para que se possa repensar como ensinar a matemática que os alunos necessitam aprender, disponibilizando diversas possibilidades para os discentes. Destarte, este trabalho busca abordar questões relacionadas ao ensino da Matemática mediada pelo uso de ferramentas tecnológicas, como o software Geogebra, destacando a interdisciplinaridade com a Arte. Por meio desse software, o aluno poderá visualizar e associar a matemática enquanto produz um desenho artístico e, ao mesmo tempo relacionará conceitos e conteúdos de ambas às disciplinas. Propor uma aprendizagem mais significativa por meio da união da Arte, Matemática e Tecnologia, demonstrando que o homem continua a produzir arte utilizando a matemática, porém, agora, com o auxílio da tecnologia é a maior justificativa deste texto.

Abstract

Teaching today is a great art. Art to mediate concepts and knowledge, to transmit values and love the next. It is also the art of breaking paradigms of rooted cultures, awakening teachers to new teaching methods using new technologies. And, the biggest one of these arts, the most arduous and difficult one, is on account of linking all the concepts and teachings of mathematics, because, in the current school environment, children have great difficulty with this discipline. The versatility and the potentiality of technologies contribute to rethink how to teach mathematics which the students need to learn, offering several possibilities for them. Thus, this work seeks to address issues related to mathematics teaching mediated by the use of technological tools such as the software Geogebra, highlighting the interdisciplinary with the Art. Through this software, students can view and associate mathematics while producing an artistic drawing and, at the same time they will relate concepts and contents of both disciplines. Propose a more meaningful learning through the union of Art, Mathematics and Technology, showing that man continues to produce art using math, but now, with the aid of technology is the major justification of this text.

Introdução

A humanidade ao longo de sua evolução vem trabalhando objetos abstratos, necessitando para isso uma representação concreta. Com o passar do tempo foram criados símbolos (códigos) e modificados para serem interpretados por todos. A Matemática foi a Ciência que mais gerou formas cognitivas de pensamento entre os sujeitos e suas atividades, "(...) permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático (...)" (DAMM, 1999, p. 137).

A matemática é uma ciência fundamental para todas as atividades, dos tempos mais remotos até hoje. Sua descoberta surgiu aos poucos por meio de vários povos, não se sabe com precisão a sua origem. Acredita-se que a história se iniciou há alguns milhares de anos. A certeza que se tem é que o homem começou a contar para depois formar os números lentamente, pela prática da contagem. Pesquisadores acreditam que os antepassados contassem até dois. Embora de modo bastante primitivo, começava a surgir então à noção de senso numérico (ROSA *et al* 2012).

Com o passar dos tempos o homem associou os dedos das mãos à quantidade de elementos de um conjunto, surgindo assim nossa primeira *máquina de calcular.* Ainda hoje se encontram algumas tribos do Pacífico que utilizam as mãos para expressar os números. Para dizer dez, dizem duas mãos, e vinte representam por um homem completo, utilizando a representação dos dedos das mãos e dos pés.

Esse sistema de numeração possui a seguinte nomenclatura:

Um **Tai**

Dois	**Lua**
Três	**Tolu**
Quatro	**Vari**
Cinco	**Iuna** (mão)
Seis	**otari** (mão + um)
Sete	**olua** (mão + um)
Oito	**otulu** (mão + um)
Nove	**ovari** (mão + um)
Dez	**iuna iuna** (duas mãos)

Tabela 1
Fonte: Jocélia Rosa (2012)

Essa era uma contagem na base cinco, usando os dedos podiam contar conjuntos de até vinte elementos. Com a necessidade de contar quantidades cada vez maiores, as técnicas foram sendo alteradas; dentre elas, utilizava-se fazer marcas em madeiras, pedras, barro e ossos. Nesse sentido Rosa *et al* (2012) destaca que:

> Na Tchecoslováquia foi encontrado um osso de lobo com profundas incisões totalizando um número de 55, o interessante é que as marcas estavam dispostas em grupos de cinco. Tal fato ressalta a correspondência que o homem primitivo fazia com os dedos das mãos (p. 08).

Concomitantemente as primeiras práticas de contagem, em alguns registros, estavam ligadas ao pastoreio. Alguns vestígios indicam que o rebanho era controlado usando um monte de pedras. Separava-se uma pedra para cada ovelha solta, e ao retornar, voltavam-se as pedras para o monte, sobrando pedras indicava a falta de animal, faltando sabia que seu rebanho havia aumentado. Portanto, a palavra *cálculo,* para alguns historiadores é derivada do latim ***cálculus*** que significa pedra. A partir dessa ideia surgiu o *ábaco*. Sua versão primitiva foi usada no Oriente Médio por volta de 2500 a.C. e evoluiu aperfeiçoado pelos chineses onde até hoje é utilizado.

Já para os babilônicos a numeração era sexagesimal (base 60), o que deu origem à contagem de tempo, usada também nos cálculos trigonométricos, mais especificamente, no ciclo trigonométrico com as unidades em graus, minutos e segundos. Evidências indicam que resolviam equações algébricas e previam a existência de eclipses com exatidão, usavam o ponto para representar o número zero, sendo a primeira civilização a

utilizar tal representação (ROSA *et al*, 2012). A matemática atual vem de um longo processo de evolução da história humana, com conceitos de números, grandezas e formas.

Contudo, simultaneamente a Matemática a Arte sofreu evolução na forma de representar, mas, o intuito que é o de contar história. A Arte e as mais diversas ciências sempre estiveram entrelaçadas e associadas, buscando relações e harmonias nesse binômio. Eisner (1973) afirmava antes mesmo do surgimento dos recursos tecnológicos hoje disponíveis que "artistas e escritores buscam novos meios artísticos para exprimir novas realidades" (p. 233). Verifica-se hoje que uma das formas mais difundidas entre os jovens e adolescentes é o Mangá. Sendo assim, é importante conhecer um pouco mais sobre essa arte milenar.

A palavra Mangá significa rabisco, ou ainda imagens involuntárias. A origem do Mangá vem com o trabalho do artista de ukiyo-e (escritura do mundo flutuante) Katsushika Hokusai, criador do Hokusai Mangá, uma série de 15 volumes de livros ilustrados de 1814 a 1878. A história do Mangá começou bem antes do século XIX. Foi no século XII que surgiu o emaki-mono, era uma gravura de aproximadamente dez metros, um rolo de pergaminho, uma das mais antigas formas de narrativa visual do mundo (VASCONCELLOS, 2006).

Educação, matemática, arte e tecnologia com algumas transformações

O ato de ensinar vem se transformando ao longo do tempo, buscando novas formas de permitir ao aluno um aprendizado mais completo e que venha atender suas necessidades enquanto cidadão e enquanto profissional. Neste sentido, nos deparamos com uma visão mais completa e integrada dos diversos assuntos abordados em sala de aula nas escolas, sejam elas do nível mais básico até as universidades. Além de mudanças relacionadas à quebra de paradigmas, percebe-se uma necessidade imensa de tornar o ambiente educacional mais atrativo ao aluno, neste novo contexto social no qual vivemos. Um dos destaques deste novo momento são as tecnologias da informação e comunicação que oferecem a cada dia novas formas de interação entre informação, pessoa e conhecimento.

Neste contexto, a utilização de sistema tradicional de ensino baseado em matérias com programas pré-definidos, não despertam interesses tanto científicos como analíticos, também inibem o senso crítico e a criatividade para novos projetos.

Freire (1987, p. 51) destaca que este tipo de educação:

> É uma educação "domesticadora", "bancária", que "deposita" no aluno informações, dados, fatos, uma educação em que o professor é quem detém o saber, a autoridade, é quem dirige o processo e representa um modelo a ser seguido.

Não há mais espaço para uma escola que não se preocupa em contextualizar o conteúdo à realidade do aluno e à realidade além das paredes da sala de aula. O aluno atual, por natureza, é questionador, quer saber o porquê de tudo; assim o professor não pode simplesmente ignorar esse fato e continuar apenas passando conteúdo, sem se preocupar com sua aplicabilidade.

Diante disto, os educadores vêm acompanhando nas últimas décadas do século XX muitas inovações quando se fala em ensino, dentre elas, a interdisciplinaridade favorece a realidade social e dimensões socioculturais da comunidade humana (MEDEIRO, 2006), possibilitando ao aluno uma relação mais ampla com o complexo e de rápidas transformações.

Associado a evolução do ensino, Oliveira (2005) destaca que os meios eletrônicos operam uma ruptura cognitiva que constitui uma verdadeira revolução psicológica susceptível de modificar radicalmente a nossa relação com o mundo.

Este é um momento em que se encontra um novo espaço para a comunicação, depara-se com diversas inovações tecnológicas como as representações visuais. Essas tecnologias proporcionam novas formas de sentir, de interpretar e interagir com a arte. A imagem pode tornar visível por meio eletrônico, diferentemente da imagem apresentada antes do surgimento tecnológico computacional, onde os artistas só poderiam interpretar e interagir com a arte através do físico.

Eisner (1973, p. 233) afirmava antes mesmo do surgimento dos recursos tecnológicos hoje disponíveis que "artistas e escritores buscam novos meios artísticos para exprimir novas realidades".

Hoje, se vê diversas formas e métodos de expressão artística. Para a arte feita com o uso dos recursos digitais, é preciso uma análise e estudo para serem expressas neste contexto contemporâneo. As artes digitais são comuns no cotidiano e é necessário considerar essas inovações estudando as ramificações e especificidades que estes recursos fornecem.

Maia (2008) mostra que as tecnologias estimulam a criação de uma nova cultura, de um novo modelo de sociedade. Uma sociedade se caracteriza pela velocidade da permanente atualização do homem para acompanhar essa evolução.

No ambiente educacional, quando se deseja trabalhar a disciplina de artes com o uso de tecnologia, não se pode dispensar o uso das mídias, pois no ambiente tecnológico se depara com infinidades de recursos e produções digitais que enriquecem as possibilidades para expressar a arte.

Ferraz e Fusari (2002, p. 44) afirmam que "(...) a ampliação dos saberes dos jovens em arte, pode-se procurar desvelar os componentes artísticos através da leitura, apreciação, interpretação e análise mais crítica dessas produções comunicativas".

Quando se fala sobre o ensino da arte com o uso de tecnologias, é indispensável conhecer os princípios da arte e compreender como as tecnologias se desenvolveram, corroborando para o enriquecimento da capacidade crítica, para elaborar questões e abordagens a serem discutidas com todos os alunos.

Dentre essas tecnologias está o uso do Geogebra, uma ferramenta desenvolvida por Markus Hohenwarter, como tese de mestrado em Matemática Educacional e Ciência Computacional na Universidade de Salzburg, na Áustria. Tendo sua continuidade no trabalho de pós Doutorado de seu artífice. Geogebra é um software *Livre* (gratuito e de código aberto), desenvolvido em linguagem Java, por ser uma linguagem multiplataforma, isto é, pode ser executado na maioria dos Sistemas Operacionais (Windows, Linux, OS e muitos outros). Sendo assim, é uma ferramenta de apoio desde o ensino fundamental ao superior, combinando álgebra, estatística, geometria, efetuando cálculos e muito mais em um único software.

Por meio do Geogebra é criada uma figura, a qual é a formação básica para a construção de imagem, de personagem nas histórias em quadrinhos (Mangás). Neste caso tem a imagem de um jovem cujas características principais são olhos grandes, fisionomia brava, cabelos longos e espetados. Portanto Geogebra é uma ferramenta, na qual se podem montar imagens com a utilização de comandos matemáticos para gerar formas tais como: segmentos de reta, parábolas, arcos e outros conforme mostrado na figura1 abaixo. Acreditando-se para tanto que se possa despertar no aluno o interesse pela matemática e proporcionar a interdisciplinaridade, pensou-se na junção e na construção de elementos relacionados ao Mangá, por meio do Geogebra. O resultado aparece a seguir:

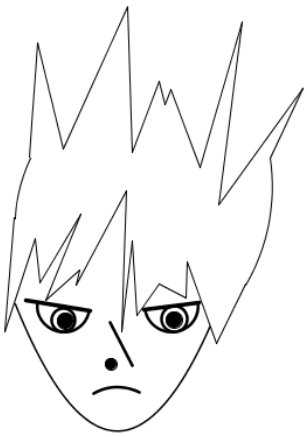


Figura1
Fonte: Autor

Verifica-se que a figura criada assemelha-se muito aos personagens usados nos Mangás, mostrando aos alunos a relação da Matemática com a Arte e com a Vida. Visto que hoje o Mangá é uma das formas mais difundidas entre os jovens e adolescentes.

Por meio da aplicação de funções (anexo 1), os alunos podem, em um primeiro momento, utilizar a matemática de forma lúdica, destruindo a barreira da dificuldade que muitos têm com o uso e aplicação desta ciência. Desta forma, os alunos primeiro aprendem a utilizar o Geogebra como numa brincadeira para depois visualizar os conceitos matemáticos por trás de suas criações (desenho digital), conforme figura2 abaixo.

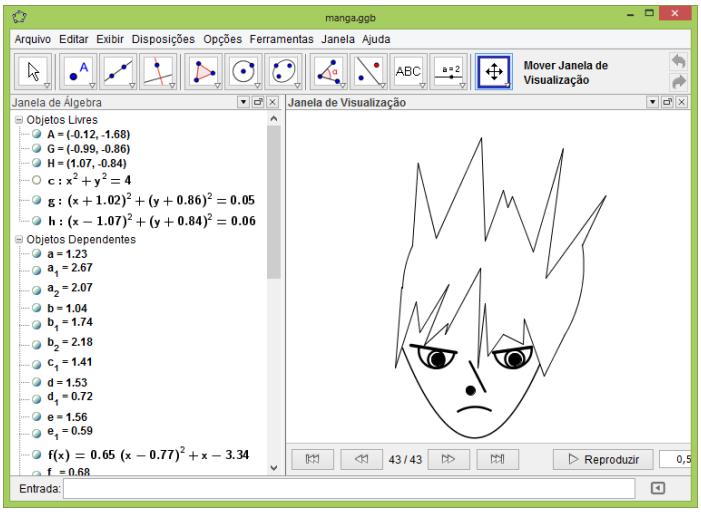


Figura2
Fonte: Autor

Assim, o professor está modificando paradigmas. Ao invés de dar uma aula tradicional, expondo conceitos teóricos, muitas vezes indecifráveis para o aluno, ele transforma sua

prática trabalhando por meio de técnicas de visualização e da arte com o uso do Geogebra de forma a conquistar esse mesmo aluno utilizando-se de sua realidade e problematizando para que ele abstraia os conceitos desejados, fortalecendo seu conhecimento.

Referencias:

Freire, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 17 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

Fusari, M. F. de Rezende e; Ferraz, M. H. **Metodologia do ensino da arte.** São Paulo: Cortez, 1999.

Maia, Urânia. **O ensino da arte na era da tecnologia digital**. Disponível em: <https://twiki.dcc.ufba.br/bin/view/EDC708/ArteDigital> Acesso em 15/08/2012.

Medeiro, Adriana Paula. **Arte e Matemática no ensino fundamental**: um estudo sobre a relação da geometria e da arte. UNIMESP – Centro Universitário Metropolitano de São Paulo; novembro de 2006.

Oliveira, Rosa Maria. **Novas Tecnologias, novas fronteiras de Criação Artística:** Percursos e Desafios. 2005, 8 p.

Rosa, Jocélia et al. **História da Matemática no Ensino da Matemática.** 2012. Disponível em:
<http://educacaomatematica.vilabol.uol.com.br/histmat/texto1.htm >, acesso em 14/05/2012.

Vasconcellos, Pedro Vicente F. **Mangá-dô:** os caminhos das histórias em quadrinhos japonesas. 2006. Disponível em: <http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/8973/8973_3.PDF> acesso em 06/09/2012.

Anexos

Para início da figura deve começar com a construção um círculo, para isso o comando utilizado é:
$x^2+y^2=4$

Na sequência construir o queixo utilizando parábola com a função:
Função[0.65(x - 0.77)² + x - 3.34, -1.92, 1.74]

Para os olhos:
Segmento[(-1.71,-0.48),(-0.5,-0.68)]
Semicírculo[(-0.53,-0.68),(-1.49,-0.52)]
Segmento[(0.5,-0.67),(1.53,-0.53)]
Semicírculo[(1.51,-0.53),(0.53,-0.67)]
$(x+1.02)^2+(y+0.86)^2=0.05$
$(x-1.07)^2+(y+0.84)^2=0.06$
G=(-0.99401,-0.8636)
H=(1.06853,-0.84466)

Para o nariz:
A=(-0.12,-1.68)
Segmento[(-0.13,-0.91),(0.28,-1.72)]

Para a boca:
ArcoCircular[(0.02,-3.04), (0.42,-2.22), (-0.43,-2.28)]

Para os cabelos:
Segmento[(-1.93,1.07),(-2.11,-1.08)]
Segmento[(-2.11,-1.08),(-1.55,0.68)]
Segmento[(-1.55,0.68),(-1.45,-0.15)]
Segmento[(-1.45,-0.15),(-0.68,1.15)]
Segmento[(-0.68,1.15),(-1.34,-0.48)]
Segmento[(-1.34,-0.48),(-0.71,0.09)]
Segmento[(-0.71,0.09),(-0.78,-0.2)]
Segmento[(-0.78,-0.2),(0.17,1.58)]
Segmento[(0.17,1.58),(0.08,-1.09)]
Segmento[(0.08,-1.09),(0.29,0.64)]
Segmento[(0.29,0.64),(0.36,-0.77)]
Segmento[(0.36,-0.77),(0.78,-0.18)]
Segmento[(0.78,-0.18),(1.3,-0.45)]
Segmento[(1.3,-0.45),(1.32,0.23)]
Segmento[(1.32,0.23),(1.86,-1.3)]
Segmento[(1.86,-1.3),(2.41,-0.18)]
Segmento[(2.88,2.19),(3.5,3.51)]
Segmento[(3.5,3.51),(1.9,1.32)]
Segmento[(1.9,1.32),(2.36,4.78)]
Segmento[(2.36,4.78),(1.56,2.02)]
Segmento[(1.56,2.02),(1.01,3.5)]
Segmento[(1.01,3.5),(0.9,3.21)]
Segmento[(0.9,3.21),(0.78,3.65)]
Segmento[(0.78,3.65),(0.29,2.3)]
Segmento[(0.29,2.3),(0.19,5.06)]
Segmento[(0.19,5.06),(-1.02,2.37)]
Segmento[(-1.02,2.37),(-1.5,4.38)]
Segmento[(-1.5,4.38),(-1.65,2.21)]
ArcoCircular[(1,0.96), (-1.64,2.19), (-1,1.02)]
ArcoCircular[(-0.82,1.68),(2.41,-0.2), (2.2,2.11)]

GEOGEBRA: INSTRUMENTO PEDAGÓGICO PARA O DESENVOLVIMENTO DE COMPETÊNCIAS E HABILIDADES EM MATEMÁTICA

Cibelle de Fátima Castro de Assis
cibelle@dce.ufpb.br
Universidade Federal da Paraíba - Brasil

Modalidade: Comunicação
Nivel educativo: Formação e atualização docente
Palavras chave: Competências – Geogebra – Atividades – Função

Resumo
O objetivo deste trabalho é apresentar propostas de utilização do Geogebra para o ensino de Matemática sob o ponto de vista das Competências e Habilidades relativas ao aluno do Ensino Médio brasileiro referente ao conteúdo Função do 1º Grau.Analizamos duas atividades a partir do ereferencial teórico construído a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000) e de pesquisas desenvolvidaspor Laborde (2008), Goos(2011), Amado & Carreira (2008) sobre os modos de utilização dos softwares de Geometria Dinâmica. Ao fim do estudo pudemos concluir que o Geogebra é um instrumento pedagógico que auxilia o desenvolvimento de competências e habilidades mas que para atender às exigencias das orientações nacionais são necessárias diferentes atividades com objetivos distintos, intencionalmente construídas para esse fim. A problematização de uma atividade proposta no Geogebra é uma questão importante no processo de formação do profesor de Matemática e que deve ser explorada sob a pena do não reconhecimento das reais potencialidades da geometría dinâmica. Acreditamos que as atividades revelam não apenas o nível de conhecimento do conteúdo do profesor, familiaridade ou diferentes concepções de uso do GeoGebra mas, principalmente, a concepção do proceso ensino-aprendizagem e a clareza dos objetivos do ensino da Matemática.

Introdução

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o Ensino Médio brasileiro, além da consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos pelos alunos durante o nível Fundamental de forma que lhes possibilite o prosseguimento nos estudos, tem como finalidades a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania; a formação ética; o desenvolvimento da autonomia intelectual e pensamento crítico e ainda, a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos relacionando a teoria com a prática no ensino de cada disciplina. (BRASIL,1996).

Essa definição de propósitos revela um amplo espectro de Competências e Habilidades que se dão na realização do trabalho escolar disciplinar preconizados pelos documentos nacionais de referência curricular para o Ensino Médio brasileiro. Nesse sentido,

segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (2002) e as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ (BRASIL,2002), o ensino da Matemática como de outras disciplinas escolares, contribue para o desenvolvimento nos alunos de habilidades relacionadas às competências da Representação e Comunicação, da Investigação e Compreensão e também da Contextualização Sociocultural. O conhecimento e a articulação dessas competências e habilidades integrados à uma proposta metodológica devem integrar a formação do professor de Matemática desse nível escolar.

Atualmente, estudos sobre a proposta metodológica de integrar o uso de tecnologias ao currículo escolar revelam contribuições para a compreensão e o desenvolvimento do pensamento matemático. Segundo os PCNEM (BRASIl, 2002, p.41), o impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com máquinas. Esse impacto exigirá do ensino de Matemática um "redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o individuo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento."

Softwares educacionais como o GeoGebra exemplificam essa tendência no ensino de Matemática porque se apresentam como instrumentos pedagógicos que facilitam e promovem a investigação, a exploração e a experimentação de conceitos, ideias e objetos da Matemática (GOOS, 2008).

Por outro lado, outros estudos evidenciam a necessidade de uma reflexão mais profunda na construção de atividades e discussão com os professores em formação sobre a utilização desses recursos uma vez que as reais potencialidades dos softwares podem não ser devidamente exploradas (LABORDE, 2011). Assim, a necessidade de refletirmos quais as potencialidades e limitações da tecnologia e de seus recursos no planejamento e proposição das atividades. Nesse sentido, ao considerarmos a linguagem do software GeoGebra e um recorte conceitual, é pertinente questionarmos: quais as contribuições do GeoGebra para o desenvolvimento das competências e habilidades relativas ao estudo de Funções Polinomiais do 1º grau no Ensino Médio?

Nesta pesquisa direcionaremos nossas reflexões sobre dois exemplos de atividades construídas no GeoGebra nas quais localizamos possibilidades para o desenvolvimento de Competências e Habilidades relativas ao estudo das Funções Polinomiais de 1º Grau ancorados nos documentos nacionais de orientação curricular. Este estudo trata-se, portanto, de uma pequisa bibliográfica.

Competências e Habilidades em Matemática requeridas no Ensino Médio

Segundo os PCN+(BRASIl, 2002), aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de Competências e Habilidades que são essencialmente formadoras à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas argumetando, analisando, avaliando, tirando conclusões próprias, tomando decisões, generalizando e para muitas outras ações necessarias à sua formação.

Nesse sentido, o conhecimento em Matemática no Ensino Médio, juntamente com as demais disciplinas da área *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias,* pode contribuir para a formação desses alunos colaborando para o desenvolvimento de habilidades relacionadas às competências citadas que, como metas, devem ser perseguidas na formação escolar (BRASIl, 2002):

Representação e Comunicação:

- Ler e interpretar textos de Matemática utilizando representações matemáticas (equações, gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas);
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica e vice-versa e exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta e produzir textos matemáticos adequados;
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação bem como instrumentos de medição e de desenho.

Investigação e Compreensão:

- Identificar o problema (compreender enunciados e formular questões) e procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta;
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos;

- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades;
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Contextualização Sociocultural:

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real;
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento;
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade;
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Segundo os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 121), o estudo das *Funções*:

> [...] permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática.

Quanto ao tratamento deste conteúdo, o mesmo documento orienta para uma abordagem que propicie (BRASIL, 2002, p.122):

- Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões;
- Compreender o conceito de função associando-o a exemplos da vida cotidiana;
- Associar diferentes funções e seus gráficos correspondentes;
- Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas;
- Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.

Considerando as orientações nacionais para um “ensino por competências” preocupado com a integração dos jovens alunos do Ensino Médio em uma sociedade da informação crescentemente globalizada, concordamos que é impotante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional, contextos esses que ganham novos contornos e exigem cada vez mais competências em Matemática.

O software GeoGebra como instrumento pedagógico no Ensino Médio

As atividades a seguir apresentam diferentes propostas para a abordagem do conteúdo *função polinoial do 1º Grau* utilizando o GeoGebra. Estão direcionadas para diferentes níveis de conhecimento e para diferentes objetivos de aula.

Na *Atividade 1 - Explorando os elementos de uma Função do 1º Grau*, utilizamos dois seletores associando-os aos coeficientes angular *a* e linear *b* da função $f(x) = ax + b$. O intervalo de variação do seletor foi posto de -5 à 5 com incremento 1 (Figura 1). Incialmente, os alunos podem explorar livremente a construção mesmo sem ter muita consciência das suas ações. No entanto, a proposta da atividade deve ser direcionada para a exploração dos coeficientes *a* e *b* da função de modo que os alunos percebam a interferência de cada um no gráfico da função.

Na *Atividade 2 – Simulando um carro*, temos dois seletores que representam um velocímetro que varia de 0 a 100 Km/h e um cronômetro, variando de 0 a 600 minutos referentes à um carro. O gráfico representa o deslocamento do carro em função do tempo para uma velocidade média definida pelo seletor. A tabela associa valores do tempo T em horas com valores da distância D em Km. Esta atividade foi retirada e adaptada do site www.mathcasts.org/mtwiki/InterA/CarRaceSimulator.

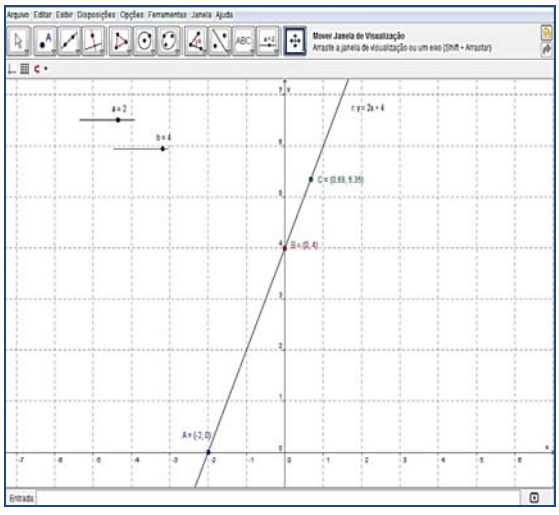


Figura 1 – Atividade 1 no GeoGebra

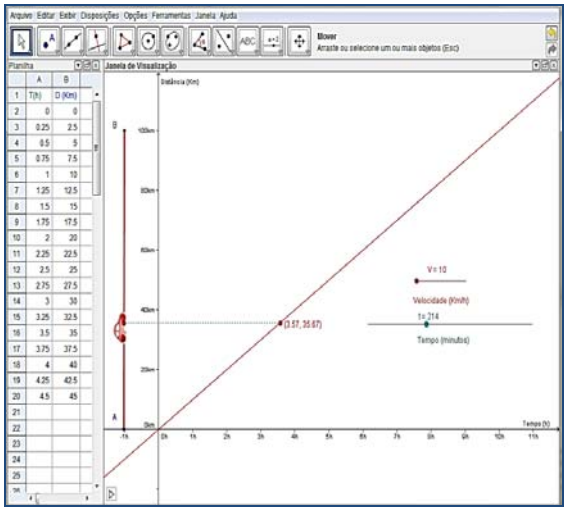


Figura 2 – Atividade 2 no GeoGebra

Recomendamos, neste momento, a leitura das questões propostas para as duas atividades no anexo deste artigo.

Sob o olhar das Competências e Habilidades em Matemática, exemplificamos de que forma os questionamentos propostos nas atividades associados ao GeoGebra podem colaborar no desenvolvimento das competências anteriormente apresentadas.

Sobre a competência da *Representação e Comunicação,* a atividade 2, ao trabalhar com a tabela ou com os seletores, os alunos devem perceber as grandezas que estão sendo tratadas e representadas no plano cartesiano e ainda fazer a transformação de horas em minutos, exigindo assim, o reconhecimento de símbolos, códigos e nomeclatura da linguagem científica. Isto pode ser verificado nas questões 1,2,3 e 4.

As atividades 1 e 2 propõem a articulação dos símbolos e códigos da Matemática no exercício da leitura e da interpretação do enunciado escrito na linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas) e vice-versa. Na Atividade 1 , especificamente nas questões 1 (c e d), 2, 3, 4(c), 5, 6 e 8. Na atividade 2, nas questões 3 e 5(c e d).

Na atividade 1, nas questões 1 (c e d), 6 e 8, o aluno deve escolher entre as formas em que os dados estão apresentados aquela que melhor justifica o comportamento da função. Por exemplo, utilizando a tabela os alunos podem analisar o comportamento de uma função crescente, ou seja, à medida que tomamos valores maiores para x, o mesmo ocorre com as respectivas imagens. Ou seja, para todo $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) < f(x_2)$. Isso seria possível no GeoGebra devido a possibilidade de obter rapidamente pares ordenados (*x*, *f(x)*) de cada reta movendo-se um ponto C construído sobre a reta que atualiza-se para quaisquer valores de a e b. Encaminhamento equivalente se daria para uma função decrescente. Também deve fazer uma escolha entre o seletor ou a equação da reta para apresentar uma forma geral para o ponto B nas questões 4 (c) e 5.

Utilizando a contrução de uma tabela os alunos podem analisar o comportamento de uma função crescente, ou seja, à medida que tomamos valores maiores para x, o mesmo ocorre com as respectivas imagens. Ou seja, para todo $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) < f(x_2)$. Isso seria possível no GeoGebra devido a possibilidade de obter rapidamente pares ordenados (*x*, *f(x)*) de cada reta movendo-se um ponto C construído

sobre a reta que atualiza-se para quaisquer valores de a e b. Encaminhamento equivalente se daria para uma função decrescente.
No que diz respeito à Competência da *Investigação e Compreensão* em Matemática, as atividades 1 e 2 estimulam a busca por estratégias próprias para enfrentamento dos questionamentos propostos fazendo uso de um repertório matemático em vários campos do conheciento como álgebra, geometria ou estatística.

Na Atividade 2, percebe-se o estímulo ao aluno pela identificação das informações relevantes como estratégia de enfrentamento da situação problema apresentada. De fato, temos dados em uma tabela, dados que podem ser obtidos a partir dos seletores e ainda a leitura dos pares ordenados. Esta habilidade é solicitada nas questões 4, 7, 8 e 9.

Na Atividade 1 os alunos são levados a identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades. Isto pode ser percebido no estímulo à generalizações da definição de crescimento ou decrescimento de uma função, na relação entre o coeficiente angular da função e o crescimento ou decrescimento da mesma, na generalização das ordenadas do ponto intereseção B = (0,y) = (0,b) da reta com o eixo Y. Esses aspectos estão presentes, por exemplo, nas questões 2, 4.c e 9. Já na Atividade 2, os alunos podem ser levados a associar o modelo linear de função $f(x) = ax$ e seu gráfico com a situação do problema proposto, bem como a relação inversamente proporcional da velocidade e do tempo gasto em um deslocamento. Devido a diversidade de possibilidades permito pelo GeoGebra, é possível conduzir os alunos para esse caminho da investigaçãoe descoberta Note esta intenção nos itens c), d) e e) da questão 7.

Na atividade 2, nas questões 8 e 9, é possível fazer previsões e estimativas sobre o tempo gasto e a velocidade necessária para Marina chegar em seu trabalho. Esses questionamentos podem desenvolver nos alunos a habilidade de selecionar, utilizar “instrumentos” de medição e de cálculo para as estimativas e para erros decorrentes dessas estimativas.

A Atividade 2, permite o estabelecimento entre conhecimentos disciplinares e interdisciplinares ao articular fenômenos e teorias dentro da própria Matemática e entre a Matemática e a Física. Com o auxílio do GeoGebra, a simulação de fenômenos

dificilmente observáveis em um contexto de sala, contribui para que o aluno adquira uma compreensão de mundo da qual a Matemática é parte integrante.

Considerações Finais

Ao fim deste trabalho, podemos afirmar que não esgotamos a discussão das possibilidades de questionamentos, tanto em termos de conteúdos matemáticos quanto nas Competências e Habilidades, possíveis em cada atividade. Nos dedicamos apenas àquelas em que o GeoGebra pode ser o diferencial. Este trabalho evidencia como os recursos do GeoGebra potencializam, juntamente com propostas e atividades estruturadas, o desenvolvimento de habilidades da competência da *Representação e Comunicação* e da *Investigação e Compreensão* no estudo das funções de 1º grau em Matemática, mesmo em se tratando de atividades diferentes e com objetivos distintos. De fato, é a possibilidade da experimentação, da visualização e da articulação entre os registros de representação dos obejtos matemáticos que o GeoGebra torna-se um instrumento pedagógico para o ensino desta disciplina. Para finalizar, reforçamos a necessidade de reflexões como essa que apresentamos na formação de professores de Matemática. Uma discussão crítica sobre o planejamento de atividades e sobre as potencialidados/limitações de um software de Geometria Dinâmica para o enisno da Matemática em qualquer nível escolar.

Referências bibliográficas

Amado, N. e Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por profesores estagiários de Matemática: diferenças na prática de sala de aula. In A. Canavarro, D. Moreira e M. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática*, pp. 286 – 299. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Brasil (2000). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio*: Matemática. Brasília: MEC/SEB.

Brasil (2002). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais* – PCN+; Brasília,MEC/SEB.

Goos, M. (2011). Technology Integration in Secondary Mathematics: Enhancing the Profissionalisation of Prospective Teachers. In O. Zaslavsky e P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowlwdge for Teaching Secondary Mathematics*: Tasks to Enhance Prospective and Practing Teacher Learning, pp. 209 – 226.

Laborde, C. (2008). Multiple dimension involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. In: A. Canavarro, D. Moreira e M. Rocha (Orgs), *Tecnologias e Educação Matemática*, pp. 36 – 52. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

ANEXOS

Anexo A. Atividade 1 - *Explorando os elementos de uma Função do 1º Grau*

1. Fixando um valor positivo para o seletor b:
    a. Movimente o seletor a entre os valores 0 à 5, o que você observa?
    b. Movimente o seletor a entre os valores -5 à 0 o que você observa?
    c. Para os valores negativos do seletor a, a função é crescente ou decrescente? Justifique graficamente tomando valores para x. Apresente ao grupo suas ideias.
    d. Para os valores positivos do seletor a, a função é crescente ou decrescente? Justifique graficamente tomando valores para x. Apresente ao grupo suas ideias.
2. O que acontece com a reta quando a = 0?
3. Fixando um valor negativo para o seletor b, responda as perguntas anteriores. Alguma diferença? Qual? Onde?
4. Escolha um valor positivo para o seletor a e movimente apenas o seletor b entre os valores 0 à 5.
    a. O que você observa?
    b. Mantendo o mesmo valor do seletor a escolhido no tópico anterior, movimente o seletor a entre os valores -5 à 0. O que você observa?
    c. Existe uma forma geral para o ponto B? Alguma semelhança com os valores exibidos no seletor ou na equação das retas obetidas?
5. Se o valor de a fosse negativo, o que mudaria nas respostas do item 4?
6. Mantenha os seletores selecionados nos seguintes valores: a = 2 e b = 3. Qual a função obtida algebricamente? Exiba a equação da reta e verifique sua resposta. Esta função é crescente ou decrescente?
7. Qual a relação entre os seletores e os coeficientes angular e linear da função?
8. Agora mantenha os seletores selecionados nos seguintes valores: a = 2 e b = -3. Qual a função obtida algebricamente? Esta função é crescente ou decrescente?
9. Qual a interferência do coeficiente linear no gráfico da função do 1º grau? E do coeficiente angular?

Anexo B. Atividade 2 – Simulando um carro

Diariamente Marina dirige seu carro vermelho à distância de 100 quilômetros de sua casa (A) para o trabalho (B). Ela dirige todo o percurso em velocidade constante. No visor do carro, um cronômetro exibe o *número de horas passadas* e um GPS exibe o *número de Km que o carro está de sua casa (A).*

1. Observando o plano cartesiano, o que representa: O eixo das abscissas (x)? O eixo das ordenadas (y)?
2. O que representam os seletores azul e vermelho?
3. O que representa cada par ordenado?
4. A velocidade do carrinho é sempre constante ou variável? De onde parte o carrinho?
5. A velocidade de 100 km/h é permitida em que tipo de rua na sua cidade? Cite exemplos.
6. Ao passar por uma lombada eletrônica o que ela indica: a velocidade média ou a instantânea?
7. Observando a tabela, responda:
   a) Ao posicionar o velocímetro em 30 km/h, qual a distância percorrida em 3h?
   b) Posicione o velocímetro em 10 km/h, qual a distância percorrida em 3h?
   c) Qual a relação entre as grandezas tempo e distância? São proporcionais?
   d) É possível determinar alguma função que determine a distância percorrida por esse carrinho em função do tempo considerando a velocidade de 30 km/h?
   e) É possível obter uma função que generalize o movimento deste carrinho para qualquer velocidade? Como chamamos as funções desse tipo na Matemática?
8. Hoje Marina saiu de sua casa às 09:00. Ela redefine o cronômetro a 0, e define seu velocímetro a 16 km/h. Quais são os dois números exibidos à 09:45 no visor do carro? A que horas Marina chega em seu trabalho? O que estamos desconsiderando no percurso de Marina?

9. Em um certo dia, Marina sai de casa às 8:40h e precisa chegar ao seu trabalho às 10:40h. Qual a velocidade que ela precisa para chegar em seu trabalho exatamente as 10:40h? O que estamos desconsiderando no percurso de Marina?

INICIÁNDONOS EN LAS DEMOSTRACIONES…

Marcela Platero – Verónica Pagliaccio – Patricia di Pantaleo
marcelaplatero26@gmail.com – vpagliaccio@yahoo.com.ar –
patriciadipantaleo@gmail.com
Escuela Cristiana Vida. Nivel Medio – ISFD N° 6 – Instituto María Auxiliadora –
Neuquén - Argentina

Modalidad: Comunicación
Nivel Educativo: Medio
Palabras claves: figuras planas – construcción – exploración – argumentación

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar una experiencia de clase, realizada por alumnos de 2° año de Nivel Medio (cuyas edades oscilan entre los 14 y 15 años) de la ciudad de Neuquén Capital. Tiene como objetivo central trabajar en las argumentaciones que dan inicio a las demostraciones geométricas.

Consideramos que uno de los objetivos de la enseñanza de la Geometría es que los alumnos aprendan a validar sus conjeturas. En este caso en particular, propusimos que lo hicieran a partir de la construcción y exploración de las distintas actividades que se les presentan, mediante el uso del GeoGebra.

Estamos convencidas que los alumnos deben enfrentarse a situaciones en las que "pongan en juego" sus conocimientos, para que, a partir del "hacer", puedan determinar la validez o no de lo producido y de las relaciones que se han ido estableciendo. Recordando permanentemente, en este proceso exploratorio, que no todo lo que se "ve" resulta ser siempre verdadero.

Introducción

Como docentes, vemos a diario en nuestras clases, que los alumnos aprenden una serie de procedimientos y algoritmos que les permiten "resolver" determinados problemas, a los que en general, no les encuentran sentido. Coincidimos con Itzcovich (2005, p.9-10) de que el trabajo geométrico ha ido perdiendo espacio y sentido. Entre las posibles razones de esta pérdida podemos mencionar, la dificultad, por parte de los docentes, de encontrar suficientes situaciones o problemas que representen verdaderos desafíos, que dejan una huella de conocimientos y habilidad en el alumno. Bien sabemos que en general, en las clases de geometría hay un predominio de vocabulario y definiciones y pocas veces es claro el sentido que adquieren los conocimientos geométricos.

¿Toda actividad es un problema geométrico para los alumnos? Carmen Sessa (2008) en "Acerca de la enseñanza de la geometría" afirma, que para que una situación sea un problema geométrico para los alumnos, es necesario que:

- Implique un cierto nivel de dificultad, presente un desafío, tenga algo de "novedad" para los alumnos.
- Exija usar los conocimientos previos, pero que estos no sean totalmente suficientes.
- Para resolverlos, se deban poner en juego las propiedades de los objetos geométricos.
- El problema ponga en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico, sino a un espacio conceptualizado representado por las figuras-cuerpos.
- En la resolución de problemas, los dibujos no permitan arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.
- La validación de la respuesta dada al problema –es decir, la decisión del alumno acerca de la verdad o falsedad de la respuesta– no se establezca empíricamente, sino que se apoye en las propiedades de los objetos geométricos; aunque en algunas instancias exploratorias, se puedan aceptar otros modos de corroborar.
- Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras produzcan un nuevo conocimiento acerca de estos últimos.

En este sentido, es que estamos incorporando a la clase de geometría situaciones en las que los alumnos validen sus procedimientos. Para Sadovsky (2004), la validación no es sólo saber si el resultado coincide o no con lo esperado, es fundamentar (no recitar propiedades ni teoremas), es saber dar razones de por qué estas herramientas resuelven el problema. Deben ser los alumnos los que validen sus producciones, apelando al conocimiento.

El hecho de que los demás pares acepten la explicación, supone una evolución en sus conocimientos porque están aceptando un argumento. También es importante en la clase, mencionar y analizar los argumentos que no son correctos.

Incorporamos el uso del GeoGebra en la resolución de las actividades, porque consideramos que la construcción de las figuras que los alumnos han de trabajar, los ayudarán a recurrir a propiedades que deben tener en cuenta al momento de argumentar. No nos olvidemos, que construir con GeoGebra es establecer relaciones geométricas entre los objetos que intervienen, que se mantendrán al modificar las condiciones iniciales. Es por esto, que consideramos que este recurso es otra herramienta que suma a la exploración y hace más evidentes ciertas conclusiones y a la vez refuerza la

posibilidad de argumentar y argumentarse y a partir de la experimentación se obtienen resultados, de los que deberán analizar su verdad o falsedad.

Destinatarios

Los destinatarios de la actividad son alumnos de 2º Año de Nivel Medio de la ciudad de Neuquén Capital, adolescentes cuyas edades oscilan entre 14 y 15 años. Dichos alumnos, ya han trabajo los contenidos mínimos necesarios para la resolución de las mismas.

Actividades propuestas

Las actividades seleccionadas han sido recopiladas de diferentes textos escolares. Están disponibles en el Anexo 1.

El objetivo principal es trabajar la argumentación que los alumnos produzcan para dar respuesta a las diferentes consignas. En ninguna actividad hay datos numéricos, ya que se apunta a la construcción y a las propiedades propias de las figuras que se van a trabajar.

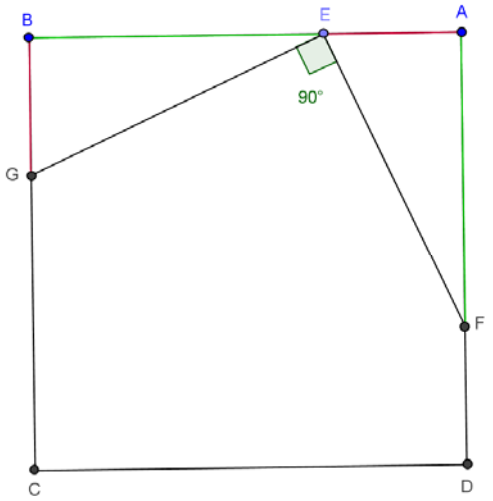
Producciones de los alumnos

Ante la primera actividad, se los ve preocupados ya que no tienen datos numéricos y "creen" que no se puede resolver.

Les sugerimos que construyan la figura con el GeoGebra. Varios trabajaron con la cuadrícula o los ejes, para "construir" el cuadrado ABCD. Al verificar la representación obtenida, cuando movíamos algún objeto libre de la construcción, éste debía mantener las propiedades que lo caracterizan, pero esto no sucedía, lo que indicaba que la representación no había sido construida teniendo en cuenta las propiedades geométricas del cuadrado. Es momento oportuno para realizar una intervención y recordar que cuando construimos con un software de geometría dinámica, los objetos libres son los que nos permiten hacer modificaciones a partir de movimientos mientras que los objetos dependientes son aquellos que fueron definidos explícitamente a partir de propiedades.

Construyen, ahora sí la figura de la actividad y comienzan a trabajar. Ante la duda y la falta de argumentos para poder afirmar si el ángulo GEF es recto, la gran mayoría mide dicho ángulo para comenzar a trabajar sobre "algo" cierto. Para sorpresa de muchos, la

amplitud del ángulo es de 90º, así que hay que comenzar a buscar los argumentos que nos ayudarán con dicha afirmación…

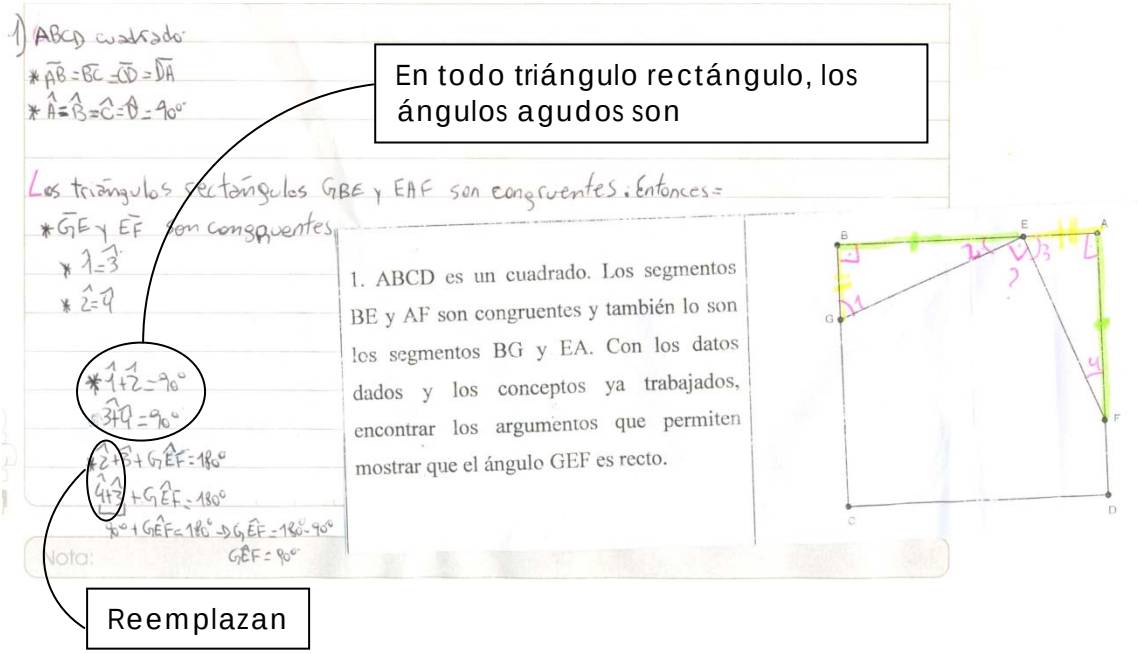


si superpongo los triangulos GBE y EAF son iguales
los dos son rectangulos
las hipotenusas son iguales
los angulos agudos de cualquier triangulo rectangulo son complementarios
no se como seguir...medi el angulo GEF y efectivamente es recto

Producción de Solange y

(Como la actividad no fue terminada en clase, les queda para seguir trabajando como tarea.)

Tomamos el trabajo de María de los Ángeles. Lo que podemos ver es que puede obtener la amplitud del ángulo, pero las justificaciones están incompletas. Por ejemplo, utiliza propiedades de los triángulos rectángulos que no indica. Plantea igualdades, ciertas, que tampoco están explicadas.



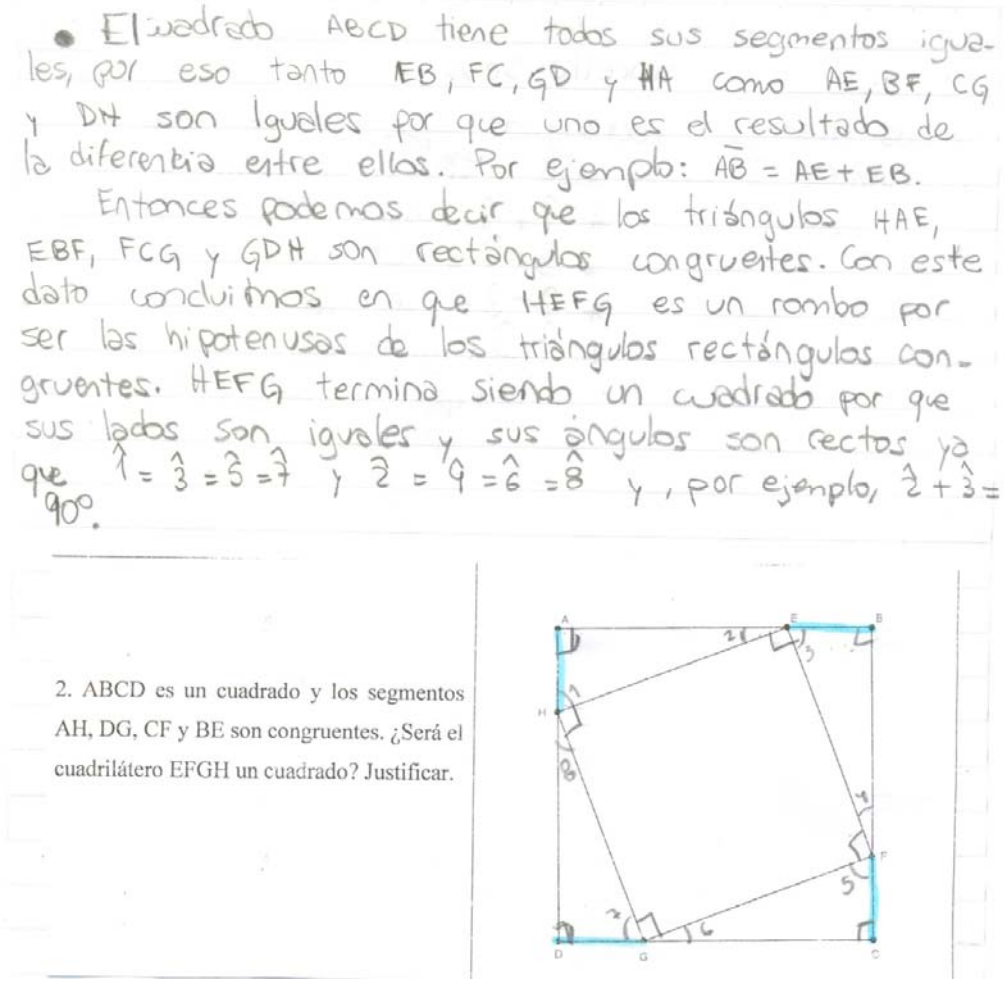
(En los cuadros de texto están las observaciones que hicimos en la puesta en común.)

Se pone énfasis en que se debe dejar el registro escrito en la hoja en la que se está trabajando, ya que puede pasar que en otro momento, se le realice alguna pregunta al respecto y no recuerden lo que realizaron.

La actividad 2, la realizaron en clase.

En todas las producciones que recibimos por parte de los alumnos, no utilizaron el GeoGebra para confirmar que EFGH es efectivamente un cuadrado. Justifican no haberlo usado, ya que la actividad es muy "parecida" a la actividad anterior.

- Producción de Fiorella:

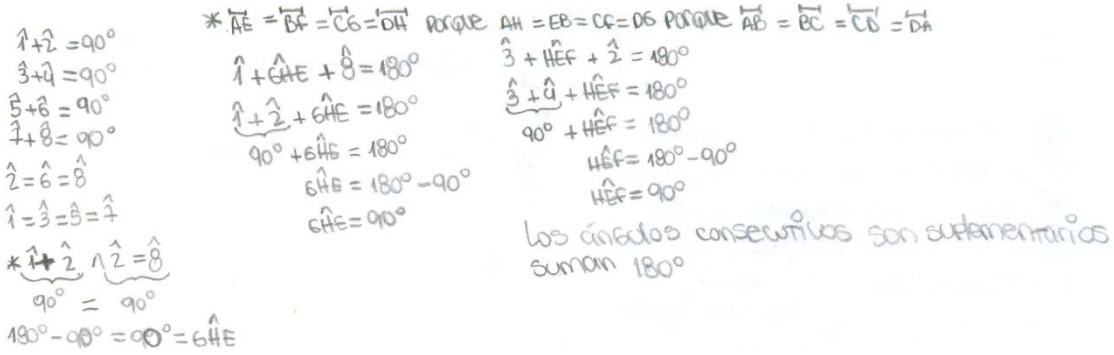

El cuadrado ABCD tiene todos sus segmentos iguales, por eso tanto EB, FC, GD y HA como AE, BF, CG y DH son iguales por que uno es el resultado de la diferencia entre ellos. Por ejemplo: $\overline{AB} = AE + EB$.

Entonces podemos decir que los triángulos HAE, EBF, FCG y GDH son rectángulos congruentes. Con este dato concluimos en que HEFG es un rombo por ser las hipotenusas de los triángulos rectángulos congruentes. HEFG termina siendo un cuadrado por que sus lados son iguales y sus ángulos son rectos ya que $\hat{1} = \hat{3} = \hat{5} = \hat{7}$ y $\hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8}$ y, por ejemplo, $\hat{2} + \hat{3} = 90°$.

2. ABCD es un cuadrado y los segmentos AH, DG, CF y BE son congruentes. ¿Será el cuadrilátero EFGH un cuadrado? Justificar.

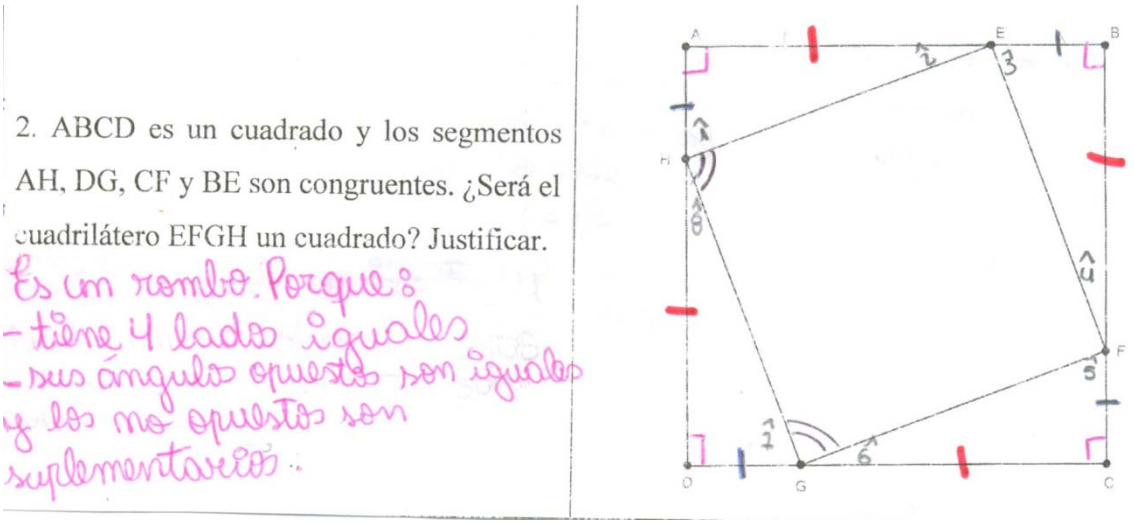
Firella, "prueba" que EFGH es un cuadrado siguiendo el razonamiento de la actividad 1, utiliza los mismos argumentos y no realiza ningún cálculo. Necesitamos de un encuentro con la alumna, ya que la justificación no está completa.

- Producción de Florencia:


$\hat{1}+\hat{2}=90°$
$\hat{3}+\hat{4}=90°$
$\hat{5}+\hat{6}=90°$
$\hat{7}+\hat{8}=90°$
$\hat{2}=\hat{6}=\hat{8}$
$\hat{1}=\hat{3}=\hat{5}=\hat{7}$
$*\hat{1}+\hat{2} \wedge \hat{2}=\hat{8}$
$90° = 90°$
$180° - 90° = 90° = G\hat{H}E$

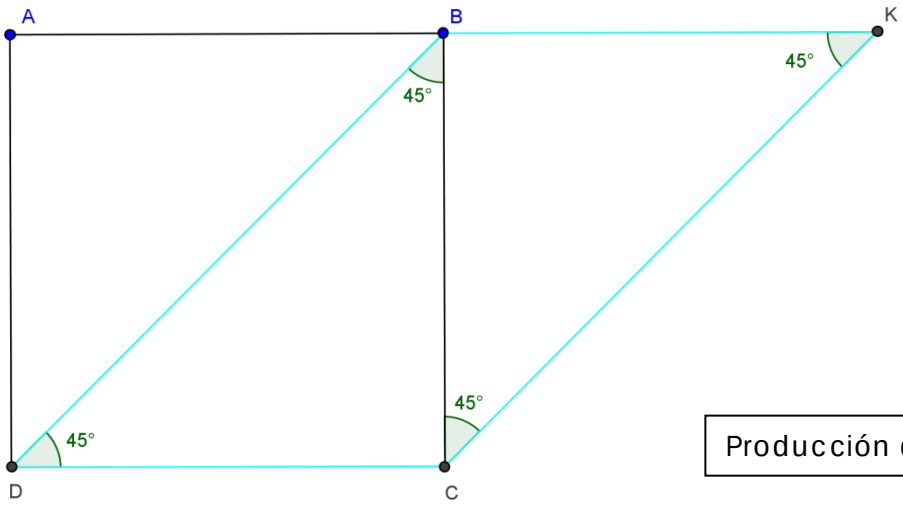
$*\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$ porque $AH = EB = CG = DG$ porque $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$
$\hat{1} + G\hat{H}E + \hat{8} = 180°$
$\hat{1} + \hat{2} + G\hat{H}E = 180°$
$90° + G\hat{H}E = 180°$
$G\hat{H}E = 180° - 90°$
$G\hat{H}E = 90°$

$\hat{3} + H\hat{E}F + \hat{2} = 180°$
$\hat{3} + \hat{4} + H\hat{E}F = 180°$
$90° + H\hat{E}F = 180°$
$H\hat{E}F = 180° - 90°$
$H\hat{E}F = 90°$
Los ángulos consecutivos son suplementarios sumam 180°



La justificación de Florencia, también, tuvimos que concluirla con una entrevista, por el registro escrito podíamos inferir que prueba que el cuadrilátero EFGH es un cuadrado, probando antes que EFGH es un rombo y utilizando sus propiedades.

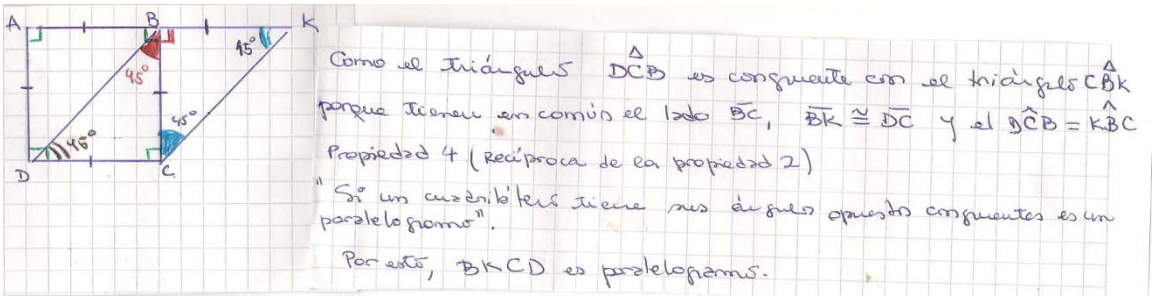
Para la Actividad 3, tenemos una deserción importante, solo 5 alumnos intentan resolverla, el resto de los alumnos, manifiesta no encontrar los "argumentos" justos para afirmar que la figura es un paralelogramo y aseguran que con verla, es suficiente.



Producción de

DB es diagonal del cuadrado
ABD y BCD son triangulos rectangulos congruentes tambien isosceles y igual al BKC por construccion
BK=DC y DB=CK
el segmento BK es paralelo a DC por la construccion
todos los angulos agudos de los triangulos rectangulos son de 45°
nos falta descubrir que el segmento DB es paralelo a CK

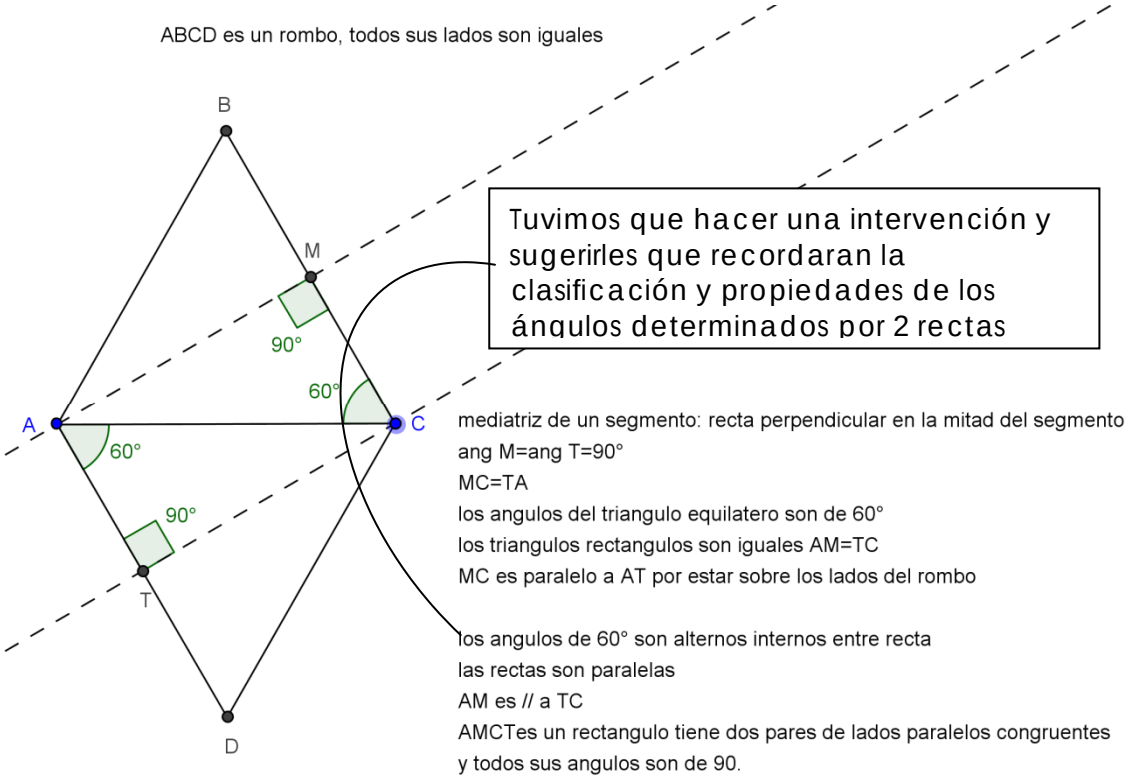
A la clase siguientes, nos sorprende Rocío diciendo que ella probó que DBKC es un paralelogramo y que no hizo nada, ya que encontró un libro (con el que había estudiado su mamá) que le daba "argumentos justos" para decir que el cuadrilátero era un paralelogramo. (El libro al que hace mención Rocío es el TAPIA Matemática 2.)



Sus compañeros quedaron sorprendidos, porque habían encontrado la amplitud de los ángulos, pero no supieron cómo utilizar esta información. Ellos intentaron mostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo a partir de la definición del mismo, es decir, probando que los lados opuestos son congruentes y paralelos.

Comienza aquí un nuevo desafío, buscar propiedades que los ayuden a "decir" con que figura están trabajando sin "hacer nada", solo mencionando propiedades.

Esto lo podemos ver reflejado en la resolución de la actividad 4, los argumentos son bien específicos y nuestra intervención es concreta para que puedan utilizar la información que han ido obteniendo.



Hay que seguir trabajando la redacción de las argumentaciones y la notación especificamente matemática.

Conclusiones finales

Nuestros alumnos están acostumbrados a un trabajo geométrico más algebraico que de construcción y argumentación. Así que se convierte en todo un desafío introducir la justificación de los procedimientos. Debemos seguir enfatizando en clase, que expliquen sus producciones, que utilicen el vocabulario matemático adecuado, que sean ordenados en su proceder y, fundamentalmente, que le encuentren sentido y significado a lo que se está realizando, y que no se convierta en una mera resolución para cumplir con una tarea asignada.

Es nuestro objetivo, para el próximo año, seguir elaborando y reformulando actividades donde nuestros alumnos identifiquen y utilicen propiedades que les permitan producir nuevas relaciones y de esta manera ir obteniendo soluciones a diferentes problemas, tanto del campo numérico como del geométrico. Una muestra de esto es el Anexo 2.

En conclusión, seguiremos trabajando con el GeoGebra en el aula, ya que a diferencia de las representaciones realizadas en lápiz y papel, las figuras geométricas a estudiar se caracterizan por “tener vida”, se las puede arrastrar y deformar en la pantalla de la computadora, que seguirán conservando las propiedades geométricas con las que fueron construidas.

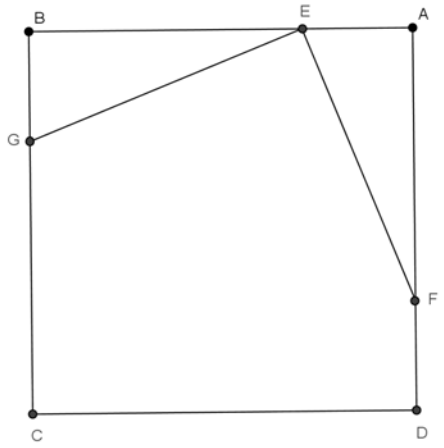
Desde un principio sabíamos que no era una tarea sencilla, nuestros alumnos no están acostumbrados a que les pidamos justificaciones de lo que desarrollan y si lo hacemos, en general, es en forma oral. No pretendemos una demostración formal, pero sí que puedan expresarse correcta y coherentemente, que puedan redactar siguiendo una lógica de razonamiento y no ideas sueltas sin ninguna relación. Éste sigue siendo nuestro objetivo…

Referencias bibliográficas

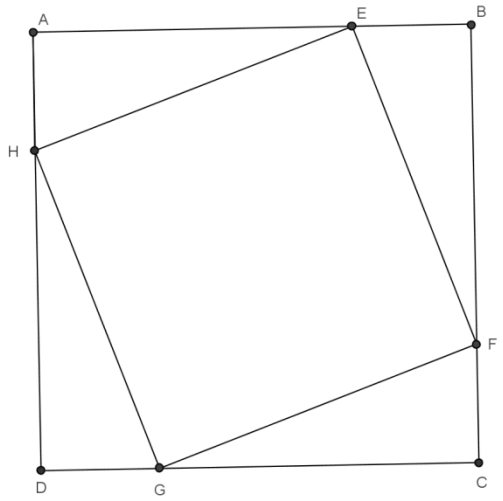
- "Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica" (on line), en Revista Latinoamericana de Matemática, Vol. 13 Nº 4 (I), año 2010, consultado 31/08/2012. Disponible en http://www.clame.org.mx/relime.htm
- "Para estar seguros El conocimiento matemático en la clase" (on line), en revista La educación en nuestras manos N° 71, año 2004, consultado 28/08/2012. Disponible en http://www.suteba.org.ar/para-estar-seguros-el-conocimiento-matemtico-en-la-clase-1316.html
- Itzcovich, H (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Itzcovich, H (2009). Acerca de la enseñanza de la geometría. En Itzcovich, H (Coord.), *La matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*, Capítulo. 6, pp. 169-203. Buenos Aires: Aique Educación.

Anexo 1

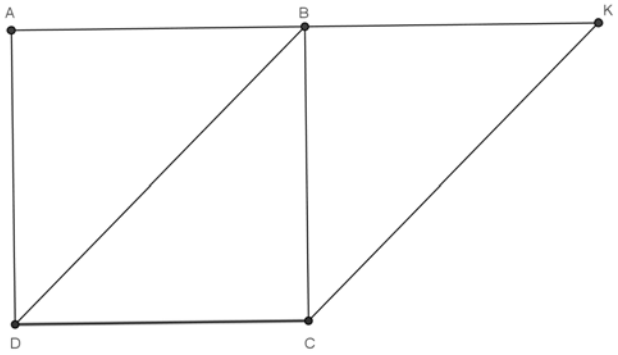
1. ABCD es un cuadrado. Los segmentos BE y AF son congruentes y también lo son los segmentos BG y EA. Con los datos dados y los conceptos ya trabajados, encontrar los argumentos que permiten mostrar que el ángulo GEF es recto.



2. ABCD es un cuadrado y los segmentos AH, DG, CF y BE son congruentes. ¿Será el cuadrilátero EFGH un cuadrado? Justificar.



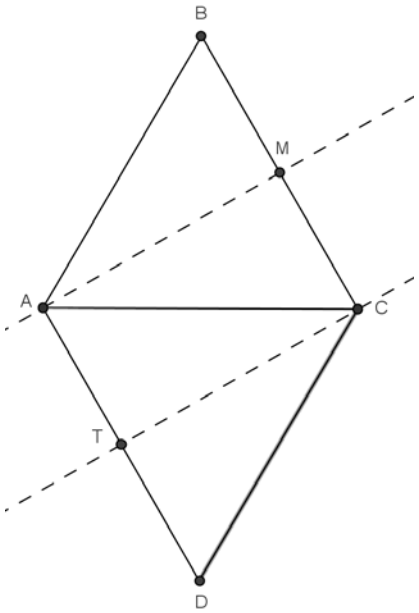
3. ABCD es un cuadrado y BKC es un triángulo rectángulo isósceles. Decidí si es cierto que el cuadrilátero BKCD es un paralelogramo. Justificar.



4. ABCD es un cuadrilátero que fue construido a partir de dos triángulos equiláteros congruentes, ABC y ACD.

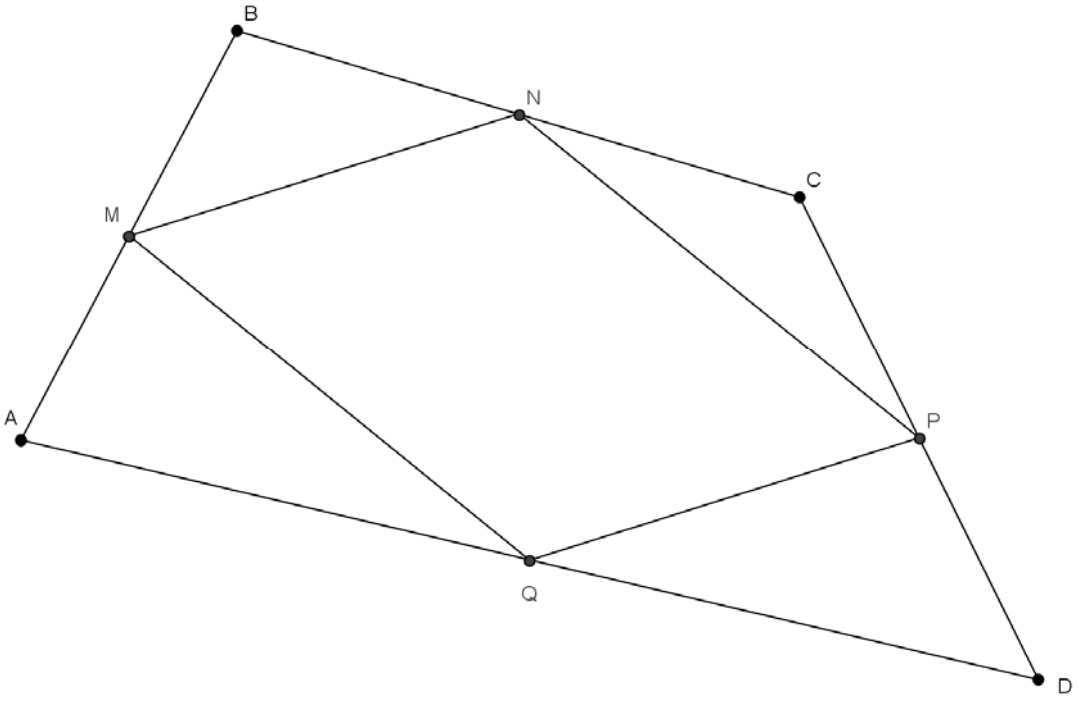
a) ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABCD? Justificar.

b) Se trazaron las mediatrices de los lados BC y AD del rombo. El cuadrilátero AMCT, ¿podrá ser un rectángulo? Justificar.



Anexo 2

1. a) Dado un cuadrilátero convexo ABCD. Los puntos medios M, N, P y Q son puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Indique los argumentos que aseguran que MNPQ es un paralelogramo.



b) ¿Qué tipo de cuadrilátero debería ser ABCD para que el cuadrilátero

i) MNPQ sea un rombo? Justificar.

ii) MNPQ sea un rectángulo? Justificar.

iii) MNPQ sea un cuadrado? Justificar.

2. Dado un cuadrilátero convexo ABCD. Los puntos medios M, N, P y Q son puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente.

a) ¿Hay alguna relación entre el perímetro de MNPQ y las diagonales de ABCD? Justificar.

b) ¿Hay alguna relación entre el área del cuadrilátero ABCD y el área del cuadrilátero MNPQ? Justificar.

GEOGEBRA: OBJETO DE APRENDIZAGEM NO PROCESSO DE ENSINO DA MATEMÁTICA

Ana Luiza Garcia - Dayse Helena Begosso– Fábio Nogueira de Queiroz – Fadir Salmen - Mariani Margarida Bento – Rosemeiry do Castro Prado
nanagarcia.garcia@gmail.com - daysebegosso@hotmail.com - fabio_nq@yahoo.com.br - fadir.salmen@globo.com - marianebento@hotmail.com
FATEC-Ourinhos, São Paulo-Brasil

Modalidade: CB.
Nivel educativo: Primaria (6 a 11 anos)
Palavras chaves: Geogebra, ensino-aprendizagem, educação-tecnológica.

Resumo

As mudanças sociais ocorridas ao longo dos tempos e o enorme avanço das tecnologias fomentaram novas formas de ensinar e aprender, concorrendo com a socialização do saber e uma possível busca pela melhoria da qualidade da educação.

Apesar do surgimento das tecnologias da informação e comunicação (TICs) e a discussão sobre sua a utilização, ainda são escassos os estudos que analisam os benefícios da aplicabilidade dessas tecnologias em ambientes educacionais.

Elas envolvem concepções, paradigmas e desafios a serem discutidos, pensados e considerados, mas acima de tudo, representam uma demanda da sociedade tecnológica.

Nesse cenário em que o ensino da matemática pode se beneficiar da utilização dessas novas tecnologias pautando-se, sobretudo, na busca da construção do conhecimento pelo aluno, há o surgimento de práticas mediadas pelo professor, habilitando-o de novas competências capazes de quebrar paradigmas e ajudar o aluno a formar juízo de valores.

Ferramentas como o software Geogebra podem colaborar com a aprendizagem matemática. Consequentemente, este trabalho apresenta questões relativas ao ensino de saberes matemáticos mediados pelo software e traz um relato de uma atividade realizada com professores e alunos de uma escola na cidade de Ourinhos, São Paulo, Brasil, analisando os possíveis ganhos da metodologia inovadora no ambiente escolar.

1- O professor de matemática no Brasil e sua formação: elementos norteadores ao ensino e aprendizado dos saberes.

Houve um tempo em que ser professor era sinônimo de satisfação pessoal, respeito, orgulho e ascendência profissional a ponto do nosso Imperador Pedro II sempre dizer, enquanto caminhava pelas imediações do Colégio que recebeu o seu nome, no Rio de Janeiro, que se não fosse imperador gostaria de ser professor!

Ao que tudo indica, o aparecimento da cátedra no Brasil tem sua constituição histórica no ensino superior quando, em 1808, com achegada do Príncipe Regente, D. João VI, é expedida a carta Régia, criando escolas superiores para os brasileiros que não podiam estudar na Europa e autorizando a escolha de professores para ministrarem suas aulas.

Os concursos à cátedra de professor já geraram disputas acirradas e a concorrência pelo cargo mais alto da hierarquia do magistério foi cercada de muito formalismo e competição, pois se acreditava que o segredo da eficiência do ensino superior estava no professor e que, embora muitas vezes este curso não oferecesse todas as condições práticas para a formação do estudioso, o professor poderia despertar e provocar no aluno o gosto pelos estudos (Prado, 2003).

Para se chegar a um cargo tão cobiçado como o do catedrático do magistério, era necessário cumprir alguns trâmites formais que evidenciavam a posição de destaque e os privilégios que esse profissional iria adquirir. Além da extensa documentação exigida, como exemplares da tese do candidato (uma centena deles), as provas se dividiam em defesa de tese, escrita e didática (Prado, 2003).

Muitos candidatos vinham de outros Estados, de trem, trazendo em uma mala os seus pertences e, em outra, seus documentos e títulos e enfrentavam noite adentro as provas exaustivas e que podiam contar com a presença do público, com exceção da prova escrita (Prado, 2003). Contudo, todo sacrifício era válido, pois afinal, ser professor era o sonho de todo intelectual da época!

E, mesmo com tanta competição e rigidez não eram estas condições suficientes para garantir a apreensão de conceitos que levassem os alunos ao sucesso dos ensinamentos da Matemática. Sempre houve certa repulsa e temor a esta disciplina, provocando altos índices de reprovação e retenção dos estudantes.

Com o passar dos tempos, verifica-se que o cenário não é diferente, muito pelo contrário. Hoje, os profissionais que atuam no magistério passam um momento delicado e difícil. Ser professor há tempos deixou de ser sinônimo de motivação profissional. Sobram vagas de licenciatura nas melhores universidades do país. Concursos são abertos para o preenchimento de vagas no magistério e não se tem candidatos aptos ao preenchimento das vagas, sejam por não aparecerem ou porque os que concorrem ao cargo não conseguem atingir os requisitos mínimos exigidos.

Percebe-se que elementos externos àqueles que norteiam o ambiente escolar interferem de modo direto nos ensinamentos que competem à instituição. No caso da Matemática, os próprios símbolos e signos que representam seus objetos (DAMM, 1999), a questão da epistemologia do professor no cotidiano escolar (Becker, 1993), apontando que o trabalho de quem ensina está intimamente relacionada com a própria ciência ensinada, a má formação preparação dos alunos em anos anteriores, o nível sócio-econômico e cultural baixos, a excessiva carga curricular, dificuldades na língua materna ou,

simplesmente, a dificuldade intrínseca da própria matemática (RIBEIRO; CABRITTA, 2002),contribuem para agravar as dificuldades de transimissão e aquisição do saber a ser ensinado.

Assim, mais do que nunca, lançar mãos de estratégias pedagógicas, psicológicas e da tecnologia passou a ser um grande desafio de estudiosos e professores, buscando respaldo em teorias que possam entender a construção do comportamento cultural, social e psicológico dos alunos, levando-se em conta outros intervenientes no processo educacional e que estão ligados diretamente à formação dos profissionais que irão atuar no ensino da Matemática.

2 - A tecnologia e a educação no cenário atual de ensino.

A informática vem crescendo rapidamente no mundo, e atualmente não é mais vista apenas como um instrumento de ajuda das tarefas, mas uma tendência mundial em diversos segmentos e áreas sociais. Ela já está presente em todas as áreas do conhecimento, como na educação, auxiliando no momento da aprendizagem, inclusive podendo ajudar crianças com dificuldades desde alfabetização até deficiências. Pode-se observar na explicação de Coburn et. al.(1988) que “o computador pode ser usado em uma variedade de montagens e tratados de variadas formas orientadas por diferentes filósofos educacionais”. É comum encontrar nas escolas recursos tecnológicos para auxílio da aquisição dos saberes escolares. Com o avanço tecnológico, nos primeiros anos da fase inicial do ensino básico, a criança já pode ter contato e aprender a utilizar o computador como ferramenta de aprendizagem.

A inserção da tecnologia no ambiente escolar deveria ocorrer porque há uma grande preocupação não só por parte dos docentes em tornar suas aulas mais atraentes para seus alunos, mas também por parte do governo em entender que é justamente a escola que conseguirá preparar seus alunos para uma sociedade que cada vez mais exige e necessita de sujeitos capazes de interferir no meio em que estão inseridos.

Em se tratando de tecnologia pode-se fazer uma comparação entre o mundo atual e o passado. Segundo Desgualdo (2008), antigamente as brincadeiras das crianças eram na rua, elas pulavam amarelinha, jogavam bola entre outras brincadeiras. Com as diversas mudanças ocorridas, principalmente as mudanças tecnológicas, elas deixaram de fazer isso e passaram a ter outros tipos de entretenimento e, dentre eles, a utilização de computadores e seus softwares.

No ensino educacional é visto que os docentes estão utilizando ou sendo cobrados a utilizarem a tecnologia como instrumento e ferramenta de ensino. Lara (2003), afirma que ultimamente os jogos e os softwares educacionais vêm ganhando espaço dentro das escolas, numa tentativa de tornar as aulas mais agradáveis e interessantes.

A princípio, o aluno poderá ser atraído pela novidade, mas com o decorrer do tempo daquilo que era novidade em apropriação constante da ferramenta tecnológica, torna-se necessário que haja um conteúdo e uma metodologia pedagógica suficientemente estruturada para que o conhecimento, a disponibilidade e a vontade do professor em fazer com que suas aulas se tornem um diferencial e não sejam desperdiçadas.

Segundo Prado (2004), os instrumentos são ferramentas que podem auxiliar no trabalho de ensino-aprendizagem:

> Os instrumentos são elementos interpostos entre o trabalhador e o objeto de seu trabalho, ampliando as possibilidades de transformação da natureza. São feitos especialmente para atingir uma finalidade e certo objetivo. O triturador elétrico, por exemplo, corta mais e melhor que a mão humana, carregando consigo a função para a qual foi criado e o modo de utilização desenvolvido durante a história do trabalho coletivo; é um objeto social e mediador da relação entre o indivíduo e o mundo. (PRADO, 2004, p. 116).

Vale ressaltar, que se trata muito além do que consumir tecnologia. É usar a tecnologia a favor da construção de conceitos e de aprendizados. É pensar em estratégias que possibilitem significados e apreensões de objetos de ensino.

3 - O Geogebra e o ensino de conteúdos da matemática

As atividades elaboradas por professores com a utilização e por meio de softwares, propõe o uso de aplicativos como *GeoGebra* - software de matemática dinâmica gratuito e multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema - tendem a mostrar outra forma de interligar assuntos da disciplina com aspectos interativos. A finalidade destes aplicativos é ensinar cálculos de Álgebra e Geometria, auxiliando de forma concreta na construção de gráficos e funções, verificar teoremas, conjecturas, demonstração e acima de tudo, gerar caminhos que conduzem à construção de conhecimentos.

Diciplinas como o Cálculo Diferencial e Integral podem ter problemas resolvidos com o auxílio da ferramenta e possibilitar autonomia para o aprendizado do aluno. Paranhos (2009) salienta que na aprendizagem e na resolução de problemas de Matemática é fundamental o desenho de esboços, figuras, diagramas e a construção de modelos para que se possa melhor entender conceitos e futuramente discutir os resultados obtidos com seus cálculos.

Contudo, montar figuras representativas a todo exercício ou ficar alterando os dados e redesenhando é uma tarefa que ocupa tempo de aula e muitas vezes podem deixar seu foco quando o professor está no quadro. Logo, com o uso e a visualização de gráficos e matérias no aplicativo, pode ocorrer de forma prática, visto a grande facilidade da manipulação da ferramenta.

Na Figura 1, tem-se a tela do GeoGebra possibilitando a visualização de gráficos:

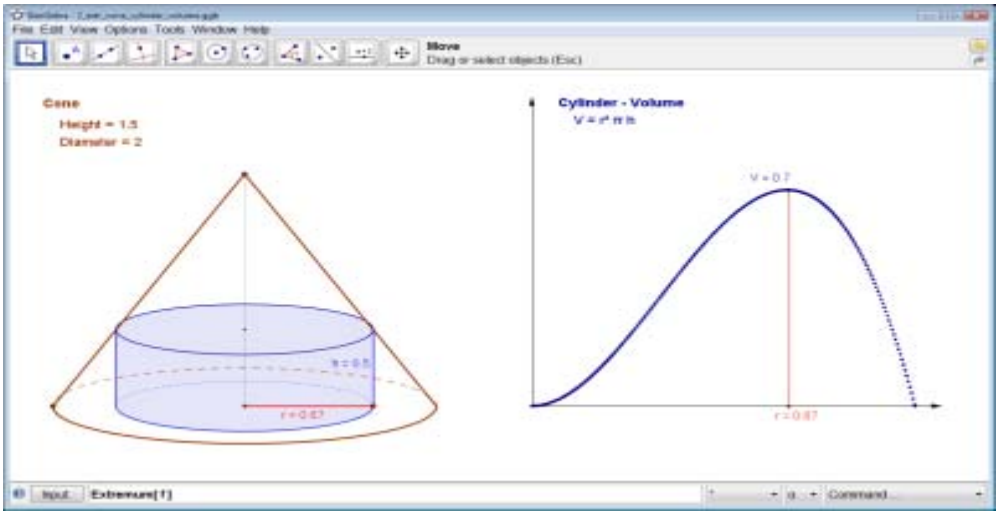


Figura 1: Visualização de Gráficos no Geogebra - Fonte: Nóbriga (2010)

No GeoGebra, por exemplo, podem ser construídos gráficos e por meio de simples movimentos de arrastar, pode-se ganhar novos valores e levantar conjecturas a respeito do conceito estudado, ser perder as características intrínsecas aos objetos e entes matemáticos.

4 - Conclusão: O relato de uma atividade no GeoGebra

Verificando-se os benefícios da utilização do software GeoGebra, um grupo de alunos do 5° Termo, do curso de Licenciatura em Análise de Sistemas da Faculdade de Tecnologia de Ourinhos, elaborou uma atividade para 23 crianças com idade média de 10 anos. Antes da aplicação da atividade, foi realizada uma visita técnica no mês de

abril de 2012, para observar o ensino por meio da tecnologia, a partir dessa visita foi constatado que o software GeoGebra, encontrava-se instalado em todas as máquinas, facilitando a aplicabilidade do exercício com essas crianças.

No dia 20 de agosto de 2012, o grupo retornou a entidade educacional, com o objetivo de transmitir seu conhecimento por meio do software GeoGebra, a atividade se desenvolveu apartir de situações-problemas, em que os alunos analizavam os perímetros dos quadrados e retângulos, com a ajuda do grupo de alunos da licenciatura e duas professoras auxiliadoras.

No decorrer da atividade, notou-se que as crianças não tiveram problemas em identificar visualmente uma figura geométrica, no caso, um quadrilátero, mas 84% não sabiam calcular o perímetro de um quadrado. De uma forma ilustrativa, lúdica e divertida foi explicado como elas deveriam resolver o problema com a utilização do software. Após as crianças concluírem as atividades propostas verificou-se que 100% delas, sabiam calcular com êxito os perímetros pedidos.

Conclui-se com base nos gráficos que seguem anexos neste trabalho que o software GeoGebra, é uma excelente ferramenta de Ensino-Aprendizagem.

Referências Bibliográficas.

- Beker, F. A (1997). *A epistemologia do professor – O cotidiano da escola*. Petrópolis: Vozes.
- Coburn, Peter et al. (1988). *Informática na Educação.* Tradução de Gilda Helena Bernardino de Campos Novis. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
- Damm, R.F. (1999). *Registros de Representação*. *In: Educação Matemática: Uma introdução*. Silvia Maria Machado et all (Org). (pp. 135-153). São Paulo: EDUC.
- Desgualdo, Marianna (2008). *A Importância Do Brincar No Desenvolvimento Da Criança*. Disponível em: www.webartigos.com/articles/4448/1/A-Importancia-Do-Brincar-No-Desenvolvimento-Da-Crianca/pagina1.html. Acesso em: Agosto/2010.
- GeoGebra. Disponível em*: <http://www.geogebra.org/cms>*. Acesso em: 01 de outubro, 2012.
- Lara, Isabel Cristina Machado (2003). *Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série*. São Paulo: Editora Rêspel.
- Moran José Manuel, Masseto Marcos T, Behrens Marilda Aparecida, *Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica*. 13.ed, Campinas, Papirus, 2007.

- Nóbriga, Jorge Cássio Costa; Araújo, Luís Cláudio Lopes de. *Aprendendo Matemática com o GeoGebra*. São Paulo: Editora Exato, 2010.

- Paranhos, Marcos de Miranda. *Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral*. 2009, 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

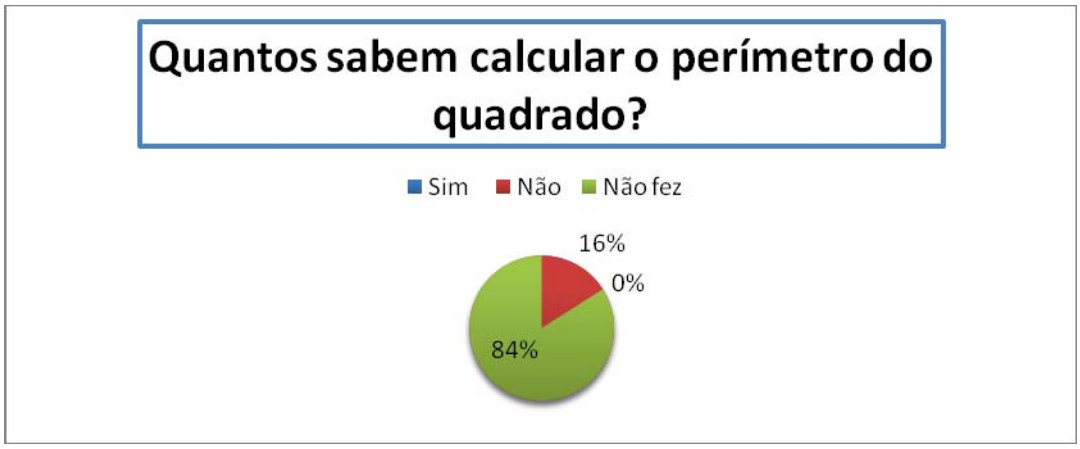
- Prado, Rosemeiry de Castro. *O Comportamento Humano e o Desenvolvimento da Aprendizagem Mediante o Uso dos Instrumentos*. *ENCONTROS: Estudos Acadêmicos*. n.5, p.114-120, 2004.

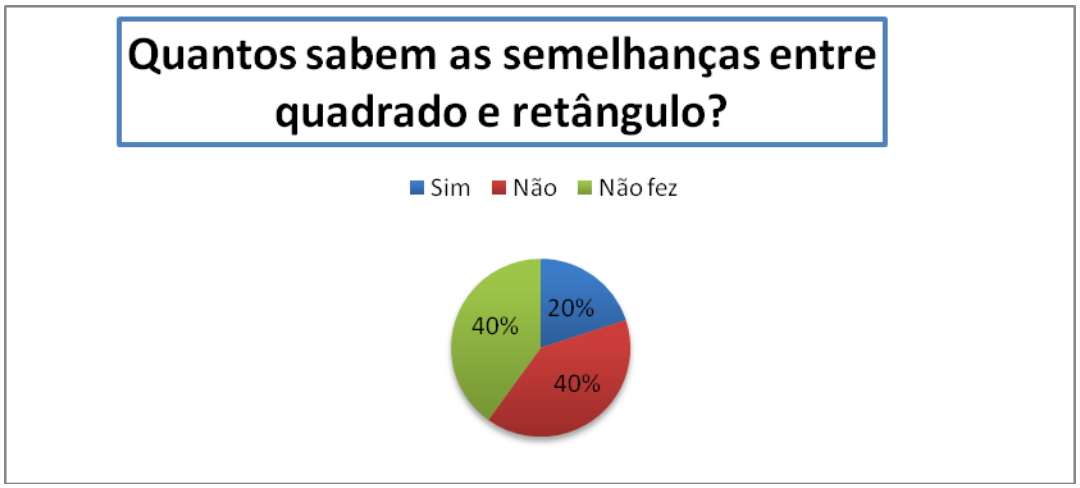
- Rangel Mary, *Métodos de Ensino para a Aprendizagem e a Dinamização das Aulas*. 3.ed, Campinas, Papirus, 2005.

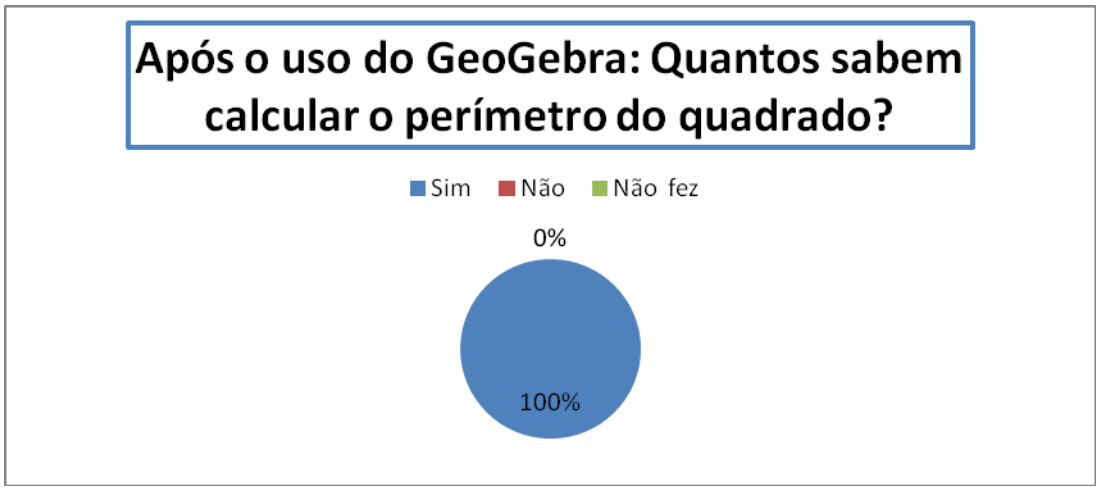
- Ribeiro, A.; Cabrita, I. (2002) *Abordagem dos numerais decimais no 1º ciclo do ensino básico sustentada por atividades significativas de resolução de problemas*. In: Ponte, J. P. *et al* (ou org). *Atividades de Investigação na Aprendizagem e na Formação dos Professores*. Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. Secção de Educação Matemática. 1 (1), 125-134.

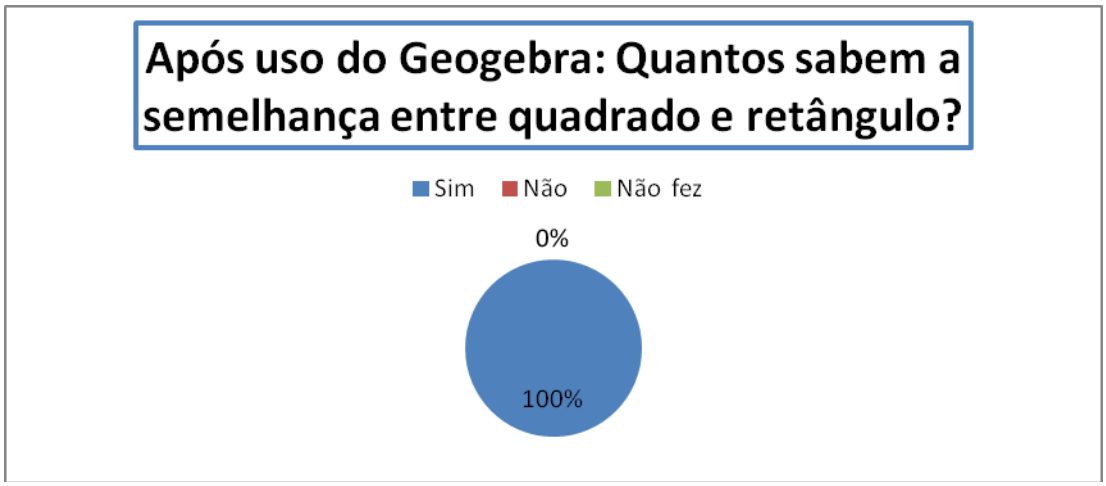
Anexo:

Quantos têm conceitos espontâneos de quadrado?
Sim
Não
Não fez
16%
0%
84%


Quantos sabem calcular o perímetro do quadrado?
Sim
Não
Não fez
16%
0%
84%


Quantos sabem as semelhanças entre quadrado e retângulo?
Sim
Não
Não fez
20%
40%
40%


Após o uso do GeoGebra: Quantos sabem calcular o perímetro do quadrado?
Sim
Não
Não fez
0%
100%


Após uso do Geogebra: Quantos sabem a semelhança entre quadrado e retângulo?
Sim
Não
Não fez
0%
100%

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE DIFINIÇÕES E TEOREMAS: O CASO DA ANÁLISE REAL

Francisco Regis Vieira Alves – Hermínio Borges Neto
fregis@ifce.edu.br – herminio@multimeios.ufc.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE,
Universidade Federal do Ceará - UFC

Modalidad: Comunicacion
Nivel educativo: Universitário
Palabras clave: Interpretação geométrica, Definições e Teoremas, Análise Real, Geogebra.

Resumo
Reconhecidamente, a complexidade e a natureza dos conceitos em Análise Real proporcionam uma mudança de percepção, na transição dos estudos do Cálculo para a Análise Real. Por outro lado, registramos na própria História da Matemática, o esforço de figuras emblemáticas do passado, no sentido de transmitir/significar aos seus contemporâneos suas ideias matemáticas pertinentes às definições, propriedades e teoremas desta teoria. Deste modo, a tecnologia e, notadamente, o software Geogebra, pode proporcionar o entendimento e a descrição geométrico-dinâmica de definições e teoremas importantes, tais como: definição de valor de aderência de uma sequência, definição de imagem limitada/ilimitada, definição de existência de limites, definição de função côncava/convexa, definição de continuidade uniforme, definição de funções lipschitizianas, o teorema de Rolle, do Valor Médio, o teorema de Cauchy, Regra de L´Hopital, etc. Assim, com o arrimo do Geogebra, discutiremos situações e construções geométricas que podem proporcionar o entendimento de ideias fundamentais neste contexto de ensino.

1. Introdução

De modo irrefutável, a complexidade e o crescente formalismo dos conteúdos de *Análise Real* proporcionam, até mesmo para as mentes mais hábeis e talentosas, incompreensões e o choque entre ideias intuitivas, informais, que adquirimos acerca de determinados conceitos, mesmo antes de um treinamento formal, com ideias abstratas, generalizadoras, estruturais e inerentes a determinados conteúdos à teoria subjacente.

Com efeito, registramos na própria História da Matemática, situações em que o conhecimento intuitivo de matemáticos emblemáticos do passado, descrito, num momento inicial, por meio de gráficos e figuras, contrariou, *a posteriori*, o conhecimento formal, o qual, com respeito ao estabelecimento de definições e teoremas, exigiu séculos para sua evolução ao estádio atual do conhecimento matemático.

Assim, neste trabalho, trazemos algumas definições e teoremas relevantes em *Análise Real*, passíveis de interpretação com um aparato computacional. Tal expediente acentua o raciocínio heurístico no entendimento de situações recorrentes no contexto do ensino.

2. A interpretação geométrica dos conceitos de Análise ao longo da história

Numa literatura especializada (BURNS, 2004; DAVIDSON & DONSIG, 2010; DUGAC, 2003; EDWARDS, 1979; HAIRER & WANNER, 2008; PEDERSEN, 1980; STAHL, 1999), encontramos com relativa facilidade, no contexto da discussão em História da Matemática - HM, exemplos do esforço de matemáticos eminentes do passado, na tentativa de significar e transmitir suas ideias aos seus contemporâneos por intermédio de gráficos e/ou figuras que detinham importante valor heurístico.

Neste sentido, os autores Hairer & Wanner (2008) fornecem inúmeros exemplos de figuras e diagramas que foram utilizados como veículos para a transmissão e convencimento, por parte de seus conceptores, dos seus pares. Por exemplo, na figura 1, esses autores comentam os desenhos devidos ao Marques de *L´Hospital* (1696), presentes na obra intitulada *Analyse des infiniment petit*.

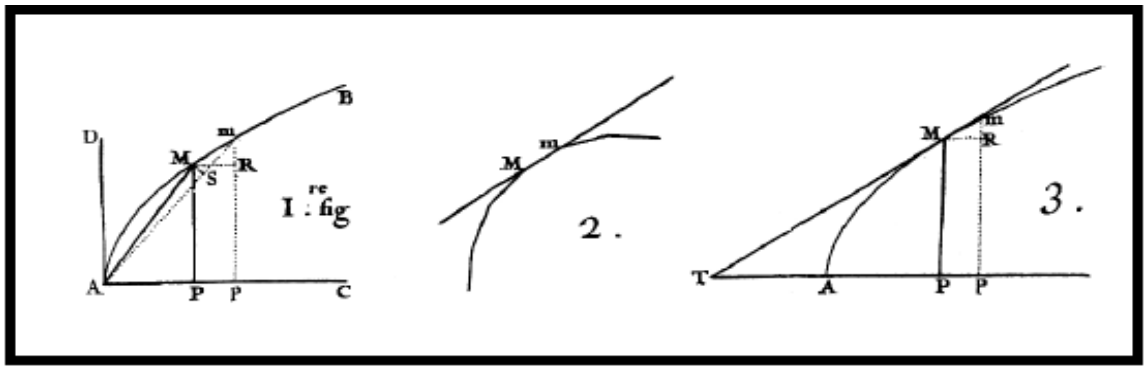


Figura 1: Hairer & Wanner (2008, p. 83) apresentam figuras (desenhos) produzidos por *L´Hospital*

Hairer & Wanner (2008, p. 83) explicam ainda que "Newton (1665) e Joh. Bernoulli (1691/1692) foram os primeiros a estudar o significado geométrico da segunda derivada.". Na figura 2, do lado esquerdo, observamos a interpretação de gráficos de funções e o comportamento da segunda derivada. Do lado direito, destacamos um desenho atribuído, conforme Haires & Wanner, ao matemático Joh. Bernoulli.

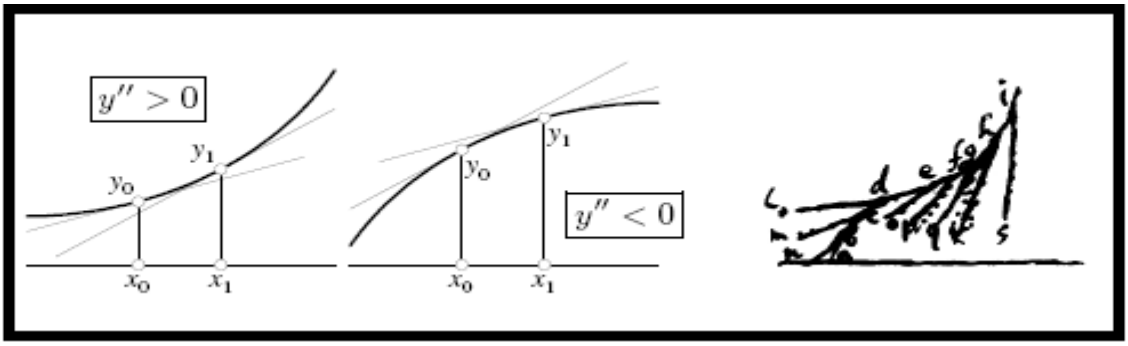


Figura 2: Hairer & Wanner (2008, p. 91) discutem o diagramas de Bernoulli

Hodiernamente, reconhecemos um dos apanágios da tecnologia, no sentido de ressignificar e descrever conceitos complexos e intrincados. Deste modo, na próxima

seção, exploramos as potencialidades do *software Geogebra*, com a intenção precípua de agregar, a um teorema ou definição formal, sua respectiva significação geométrica.

3. Exemplos de Definições matemáticas

Identificamos muitas mudanças (BERGÉ, 2006) pertinentes às exigências conceituais dos conceitos em *Análise Real* com respeito aos do Cálculo. Nesse sentido, registramos o aumento do rigor e da complexidade de definições formais envolvidas. Nossa primeira definição diz respeito à noção de função em uma variável real $f : IR \to IR$ com *imagem limitada*, nas vizinhanças de um ponto. Na figura 1, exibimos o gráfico de duas funções que possuem uma imagem limitada $\left(|f(x)| \le k\ ,\ \forall x \in \mathrm{IR}\right)(*)$ numa vizinhança (perfurada) da origem, ou seja, escrevemos de modo *standard* que $V_0(\delta) = (-\delta, \delta) - \{0\}$.

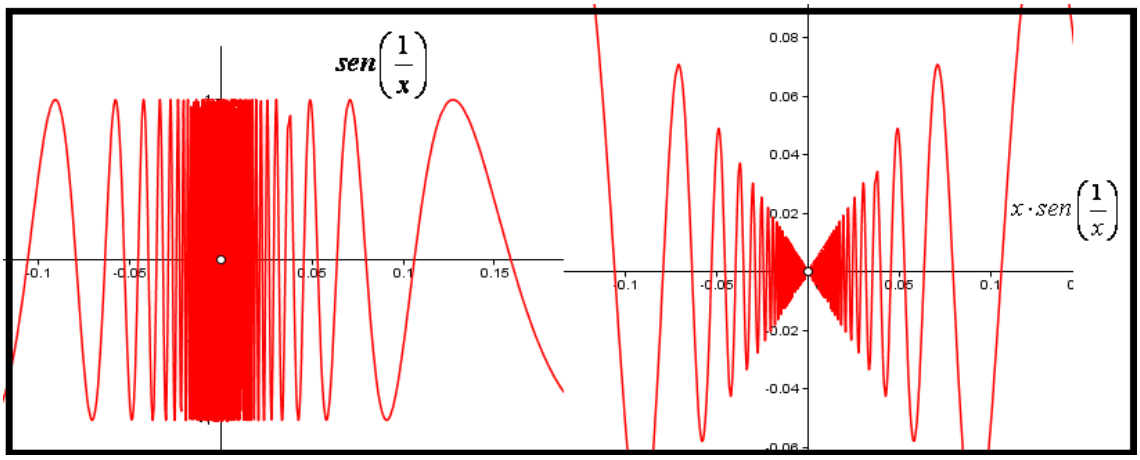


Figura 3: Imagem limitada de funções nas vizinhanças da origem V_0 na reta

Por outro lado, ao considerarmos a função $\frac{1}{x} \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ que, com o apoio do *Geogebra*, depreendemos possuir uma imagem ilimitada (não satisfaz a condição *), ou seja, não conseguimos nenhuma vizinhança $V_0(\delta)$, para qualquer $\delta > 0$, (um disco ou circunferência no plano) que contenha completamente o gráfico nesse trecho.

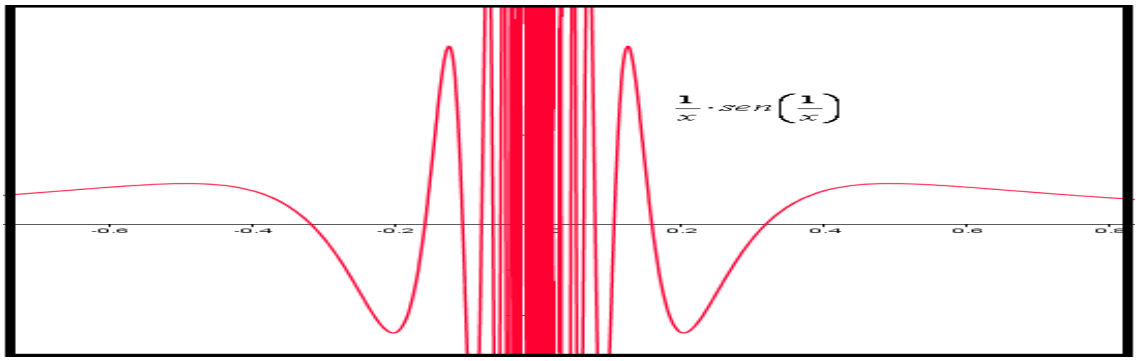


Figura 4: Descrição da definição de imagem ilimitada de uma função na origem

Com o recurso do *software*, conseguimos explorar a noção de convergência de uma sequência de números reais $(x_n)_{n\in IN}$ e de suas subseqüências $\left(x_{n_k}\right)_{n_k\in IN'\subset IN}$. De fato, consideremos a sequência $x_n=(-1)^{n-1}\cdot n/(n^2+1)$, conduzimos o aluno a perceber a existência de duas subseqüências $\left(x_{n_k}\right)_{n_k\in IN'}$ e $\left(x_{n_k}\right)_{n_k'\in IN''}$, que se aproximam para o mesmo *valor de aderência*, que neste caso é 0. Por outro lado, no caso da sequência $y_n=sen\left(n\cdot\pi/2\right)$, o aluno deve suspeitar da existência de três *valores de aderência* correspondentes a três subseqüências distintas. Neste caso, os valores de aderência destas subsequências estão no conjunto $\{-1,0,1\}$ que corresponde a tal comportamento.

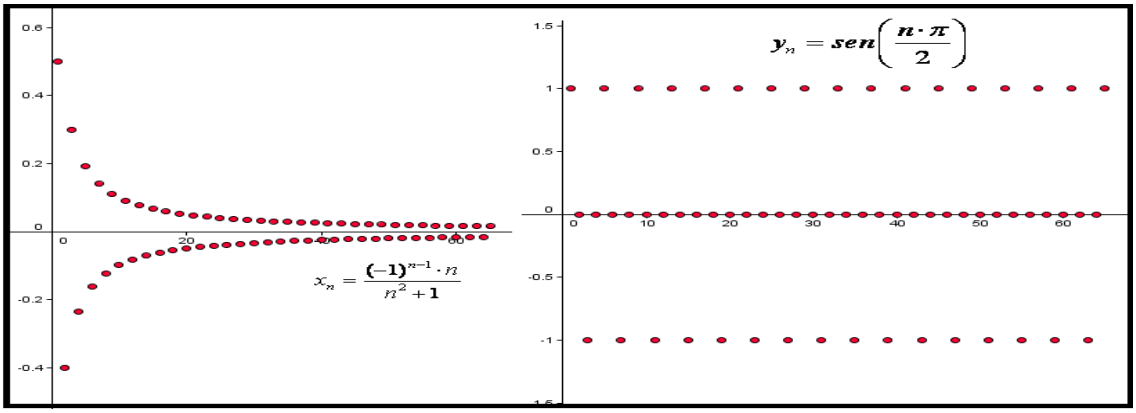


Figura 5: Descrição de valores de aderência de uma sequência com o *Geogebra*

No contexto de *Análise Rea*l, desenvolvemos o estudo de *funções côncavas* (para cima ou para baixo) e *estritamente côncavas* (para cima ou para baixo). A definição formal de concavidade de uma função $y=f(x)$, para cima, de modo estrito, pode ser descrito por $f(x)<l(x)$, onde $l(x)$ é uma reta que passa por dois pontos do gráfico de f, num intervalo (a,b). Na fig. 6, divisamos a mudança de concavidade segundo a definição.

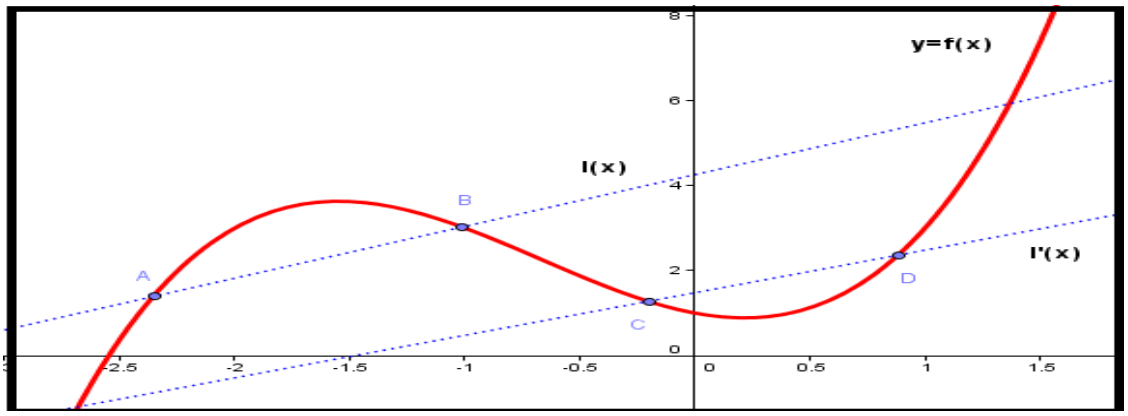


Figura 6: Descrição da definição de concavidade (estrita) de uma função

4. Exemplos de alguns teoremas em Analise Real

Vamos considerar uma situação extrema da necessidade do cálculo de $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(sen(x)+\cos^3(x))}{(x^2+1)(x-3)}$ ou $\lim_{x\to 0}\frac{x^2(sen(x)+\cos^3(x))}{(x^2+1)(x-3)}$. Vale analisar o gráfico da figura abaixo de modo local e global. Neste sentido, passamos a observar as funções $\frac{2x^2}{(x^2+1)(x-3)}$, $\frac{x^2(sen(x)+\cos^3(x))}{(x^2+1)(x-3)}$ e $\frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-3)}$. Na figura 7, para prever o comportamento do primeiro limite (não existe), necessitamos de uma análise global dos gráficos. Por outro lado, na inspeção do segundo limite (que tende a zero), carecemos, do mesmo modo, de uma análise local, nas vizinhanças da origem $V_0(\delta)=(-\delta,\delta)-\{0\}$.

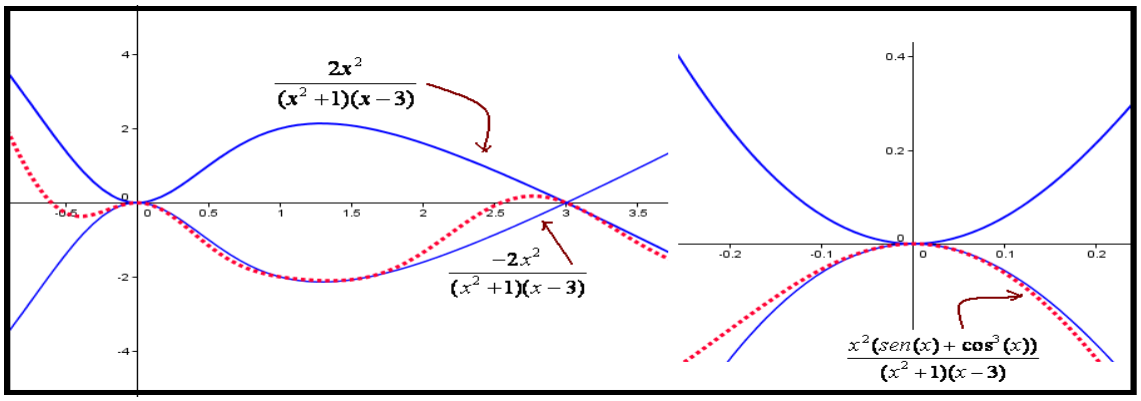


Figura 7: Descrição geométrica do teorema do sanduíche em Análise Real

Um teorema recorrentemente aplicado em *Análise Real* possibilita a descrição da existência de um limite, quando buscamos analisar o comportamento (local) do produto de duas funções $f(x)\cdot g(x)$, na condição em que $\exists\lim_{x\to a} f(x)$ e a outra função $g(x)$ cumpre a condição (*). Por exemplo, quando tomamos $f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos(\pi/x)\right| & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$, de imediato, neste caso, concluímos que $\lim_{x\to 0} x^2\left|\cos(\pi/x)\right|=0$.

Este teorema admite inúmeras aplicações. Por exemplo, Bourchtein & Bourchtein (2010, p. 302) consideram a seguinte função $f(x)=\begin{cases} x^2\cos(1/x) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ e que possui como derivada $f'(x)=\begin{cases} 2x\cos(1/x)+\sin(1/x) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$. Bourchtein & Bourchtein (2010, p. 302-303) discutem um teorema que descreve condições suficientes para a existência de extremos locais. Neste caso, a função há pouco mencionada, admite um ponto crítico em $x=0$ ($f'(0)=0$).

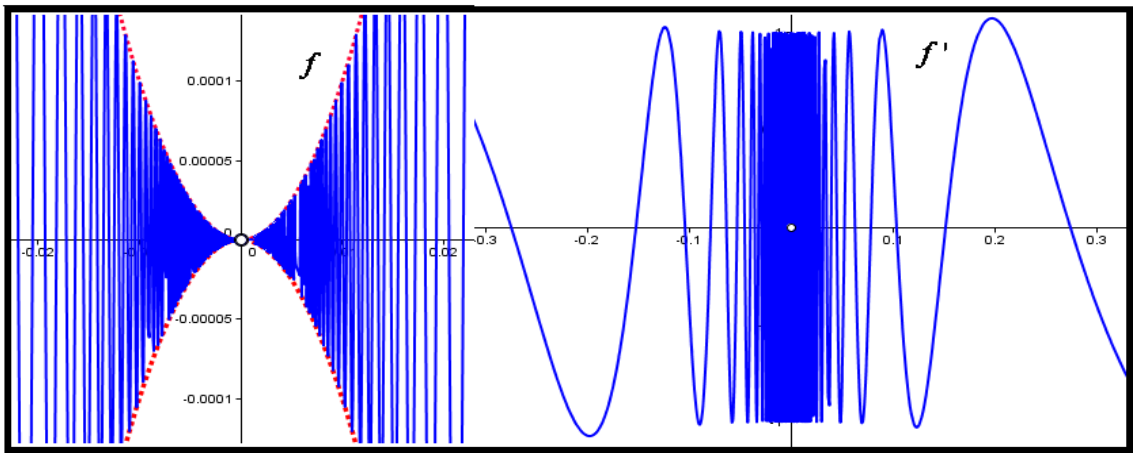


Figura 8: Função que não admite ponto extremo (máximo ou mínimo) na origem

Por outro lado, com base no gráfico da função f' apresenta valores positivos e negativos nas vizinhanças do ponto $(0,0)$. Bourchtein & Bourchtein (2010, p. 304) mencionam que esta função não preserva seu sinal em qualquer vizinhança unilateral do ponto $x=0$. Deste modo, concluem que $f(x)$ não possui nem máximo e nem mínimo local na origem, pois contamos apenas com condições necessárias para a identificação de pontos extremos. Por fim, consideremos agora $g(x)=\begin{cases} x^2\left(2+\cos\left(1/x\right)\right) \text{ se } x\neq 0 \\ 0 \text{ se } x=0 \end{cases}$ e sua derivada descrita por $g(x)=\begin{cases} 4x+2x\cos\left(1/x\right)+\text{sen}\left(1/x\right) \text{ se } x\neq 0 \\ 0 \text{ se } x=0 \end{cases}$. Nesse caso, Bourchtein & Bourchtein (2010, p. 305) comentam este caso que envolve uma função que admite um ponto crítico na origem ($g'(0)=0$), sua derivada muda de sinal nas vizinhanças da origem e, por outro lado, $g(x)$ admite mínimo nessa vizinhança. Deparamos aqui um contraexemplo para a identificação de pontos extremantes (fig. 9).

De fato, para divisarmos condições suficientes para tal, exige-se que uma função f seja uma função contínua numa vizinhança $x_0 \in V_{x_0} \subset IR$, onde x_0 é ponto crítico e, além disso, f' preserva seu sinal nesta vizinhança. Nestas condições, o teorema descreve, então, uma condição suficiente para identificação de um extremo local.

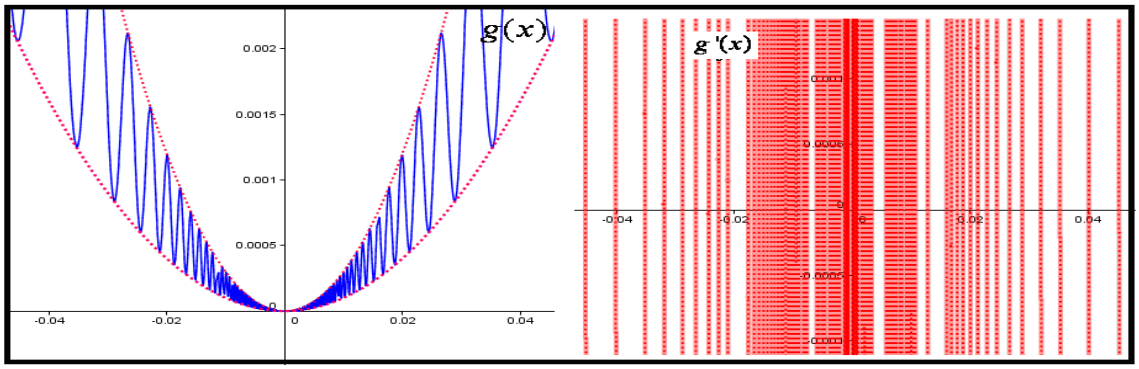


Figura 9: Um contraexemplo para teorema para identificação de pontos extremos

5. Considerações finais

Reconhecidamente, as dificuldades (BERGÉ, 2006) inerentes ao ensino/aprendizagem em *Análise Real* são relatadas em inúmeros estudos. Em nosso trabalho, evidenciamos a significação proporcionada pela exploração do *software Geogebra*, pertinente às definições e alguns teoremas essenciais nesta teoria, que adquirem um significado que ultrapassa os limites do formalismo e o olhar estrutural dos objetos matemáticos.

Neste sentido, demarcamos, inicialmente, na própria História da Matemática, o esforço dos matemáticos na transmissão de suas ideias apoiadas em diagramas, que detinham importante valor heurístico. Atualmente, registramos o repertório diversificado de possibilidades de exploração didática da tecnologia e, em nosso caso, o *software Geogebra* funciona como elemento impulsionador de uma reessignificação para definições formais e teoremas.

Assim, nesse trabalho, apresentamos alguns exemplos de situações atinentes às definições e teoremas que, com arrimo na tecnologia, admitem rápida descrição geométrica. Deste modo, buscamos estimular um olhar pormenorizado do aprendiz, no sentido de "enxergar" propriedades formais a partir da visualização dos gráficos que exibimos nas figuras ao longo deste texto. Tal abordagem pode proporcionar a evolução do significado conceitual agregado a cada situação, o que pode apoiar um entendimento posterior mais elaborado. Por outro lado, o simples domínio formal de inferências lógicas não garante uma compreensão efetiva dos conceitos aqui discutidos.

Referencias bibliográficas

Alves, F. R. V. (2012). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, 1. 65-79, Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index. Acessado em: 04 de Abril de 2012.

Bergé, Analia. (2006). Análisis institucional a propósito de la noción de complejidad del

conjunto de los números reales. *RELIME*, 9, 31-64. Disponível em: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2096730. Acessado em: 16 de Agosto de 2012.

Bourchtein. Andrei & Bourchtein. Louidmila. (2010). *Análise Real: funções de uma variável real*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna.

Burns. R. P. (2004). *Numbers and functions: steps into analysis*. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Davidson. K. R. & Donsig. A. P. (2010). *Real Analysis and Application: theory and practice*. New York: Springer.

Dugac. Pierre. (2003). *Histoire de L´Analyse: autour de la notion de limite et de ses voisinages*. Paris: Vuibert.

Edwards, C. H. Jr. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer.

Guidorizzi, H. (2010). *Um curso de Cálculo*. v. 1, Rio de Janeiro: Ao Livro técnico.

Lima, E. L. (2010). *Curso de Análise*. v. 1, Rio de Janeiro: Projeto Euclides.

Lima, E. L. (2010). *Curso de Análise na Reta* (2011, 2 de fev.). Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=programa-de-verao-2011-analise-na-reta.
Acessado em: 10 de julho de 2012.

Hairer. E. & Wanner. G. (2008). *Analysis by its History*. New York: Springer.

Pedersen, K. M. (1980). Techniques of the Calculus: 1630-1660. In: Grattan-Guinness, I. (Eds.) *From the Calculus to the Set Theory: an introductory history*. Capítulo 1, pp 10-47.

Stahl. Saul. (1999). *Real Analysis: a historical approach*. New York: John and Wiley and Sons.

Zorich. V. A. (2004). *Mathematical Analysis I*. New York: Springer.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA PARA A *REGRA DE L´HOPITAL* COM O AUXÍLIO DO *GEOGEBRA*

Francisco Regis Vieira Alves – Hermínio Borges Neto
fregis@ifce.edu.br – herminio@multimeios.ufc.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE
Universidade Federal do Ceará - UFC

Modalidad: Comunicación Breve
Nivel educativo: Universitário
Palabras clave: Interpretação geométrica, Regra de L´Hopital, Geogebra, Indeterminação matemática.

Resumo

A regra de L´Hopital permite que se evite o comportamento, em certos casos, imprevisível, de uma grande classe de funções no Cálculo em Uma Variável Real. Segundo alguns estudos, registram-se, nas demonstrações e caracterizações possíveis da referida regra, argumentos formais que sustentam sua fundamentação em Análise Real, os quais, nem sempre são acessíveis a todos os estudantes no primeiro ano de estudos acadêmicos no Brasil. Por outro lado, no exame de indeterminações do tipo 0^0, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, ∞^∞, 1^∞; *quando não se faz uso da tecnologia, promove-se à atividade algorítmico-procedimental, antes de um conhecimento conceitual, sobretudo, vinculado à visualização. Assim, nesta comunicação, abordamos alguns exemplos de limites, nos quais, por meio da inspeção do gráfico, conclui-se a necessidade e o entendimento da aplicação da regra, mediante a manifestação das indeterminações supracitadas, sobretudo, no quadro geométrico. A interpretação geométrica dos gráficos relacionados com as funções, cujas imagens produzem o comportamento indeterminado e/ou imprevisível, pode proporcionar, ao aprendiz, a compreensão conceitual do motivo de aplicação da regra.*

1. Introdução

A *regra de L´Hopital* demanda considerável tempo de estudo no primeiro contato com o Cálculo nas universidades brasileiras. Na abordagem indicada por autores de livros didáticos, registramos o forte apelo ao expediente algébrico e, por outro lado, ações isoladas do uso da tecnologia, com vistas à significação geométrica da regra que pode proporcionar o tratamento das *indeterminações matemáticas* de modo diferenciado.

Assim, neste trabalho, com o auxílio do *software Geogebra*, trazemos a discussão de alguns exemplos de limites vinculados ao surgimento das principais categorias dessas indeterminações. As situações problema envolvendo o cálculo destes limites não apresentam caráter de ineditismo, entretanto, a discussão, com o apoio do *software*, visa à promoção e o estímulo, por parte dos professores, de uma abordagem e/ou mediação didática diferenciada, que suaviza o caráter hegemônico de tarefas algorítmicas.

2. Sobre a Regra de L´Hospital nos livros didáticos no Brasil

No Brasil, os livros didáticos usuais (GUIDORIZZI, 2010; LEITHOLD, 1994; STEWART, 2004; SIMMONS, 1987) adotados no ensino deste conteúdo, privilegiam, de modo tradicional (ARTIGUE, 2002), o caráter algorítmico das tarefas e a aplicação automática do teorema que possibilita, na prática, evitarmos o tratamento direto de indeterminações ou *formas indeterminadas* do tipo 0^0, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, ∞^∞, 1^∞, $0\cdot(\infty)$, etc.

Nos cursos de Cálculo, a técnica conhecida que permite eliminar *indeterminações* como estas, é conhecida como *regra de L`Hopital*. Reparemos, entretanto, que a mesma "é utilizada como ferramenta para calcular limites indeterminados, sem a preocupação de uma justificativa, o que para o aprendizado matemático, é de certa forma um problema.". (BARBOSA, 2008, p. 12).

Destacamos então seu enunciado: supondo que $f(x)$ e $g(x)$ são diferenciáveis e $g'(x) \neq 0$ próximo do ponto $x = a$ (exceto possivelmente em a). Considerando ainda que $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \text{ e } \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \\ ou \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty \end{cases}$ (temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Então $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se o limite do lado direito existir (ou é $+\infty$ ou $-\infty$)

Vale observar que nas duas demonstrações mais divulgadas pelos livros didáticos (BARBOSA, 2008, p. 67), os conhecimentos de *Análise Real* são exigidos. Cabe mencionar, entretanto, um caso especial da regra (STEWART, 2001, p. 307) quando sabemos que no cálculo do limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ocorre que $f(a) = g(a) = 0$. Além disso, f' e g' são contínuas, com $g'(a) \neq 0$. Diante destas hipóteses, escrevemos:

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f'(x)}{\lim\limits_{x \to a} g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - 0}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - 0}{x - a}} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \therefore \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Certamente que todas as inferências partiram da condição inicial em que $\exists \lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x)$. E usando ainda a continuidade das derivadas,

estabelecemos ainda que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$ que possui um significado geométrico relativo ao quociente das declividades de retas no ponto $x=a$.

Por outro lado, Lima (2006, p. 91) enfraquece as hipóteses acima, tomando apenas funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis, com $f(a)=g(a)=0$. Segue então sua demonstração:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\neq a\ x\to a}\frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-0}{x-a}}{\frac{g(x)-0}{x-a}}\overset{\substack{definição\\ =\\ derivada}}{}\frac{f'(a)}{g'(a)}\therefore\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

No próximo segmento, introduziremos, em nossa discussão, a exploração do *software Geogebra*. Seu papel se destaca no sentido de proporcionar a evolução de habilidades cognitivas pertinentes à visualização, do *methaphorical insight* (OTTE, 2008), a da percepção de propriedades geométricas e topológicas no IR^2 (ALVES, 2012).

3. Explorando o significado geométrico com o *software Geogebra*

Como mencionamos na seção, anterior, as indeterminações do tipo 0^0, $0/0$, ∞/∞, ∞^0, ∞^∞, $0\cdot(\infty)$ são costumeiramente exploradas por autores de livros. Vamos, inicialmente, discutir os seguintes limites: (a) $\lim_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)/\left(1-\cos(x)\right)$, (b) $\lim_{x\to\infty}\ln(x)/\sqrt[3]{x}$, (c) $\lim_{x\to 0^+}[x\ln(x)]$, (d) $\lim_{x\to 0^+}\left[1+sen4x\right]^{\cot g(x)}$.

Vejamos o primeiro caso $\lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)/(1-\cos(x))$. Na figura 1, do lado esquerdo, descrevemos o gráfico da função $f(x)=(e^x+e^{-x}-2)/(1-\cos(x))$, descontínua no ponto $x=0$ (divisamos uma bola aberta). A *indeterminação* $0/0$ resulta dos valores assumidos pelas funções contínuas $e^x+e^{-x}-2$ e $1-\cos(x)$, no ponto $x=0$, como observamos na figura 1, do lado direito. Não existe, pois, $f(0)$ e não pode ser avaliado.

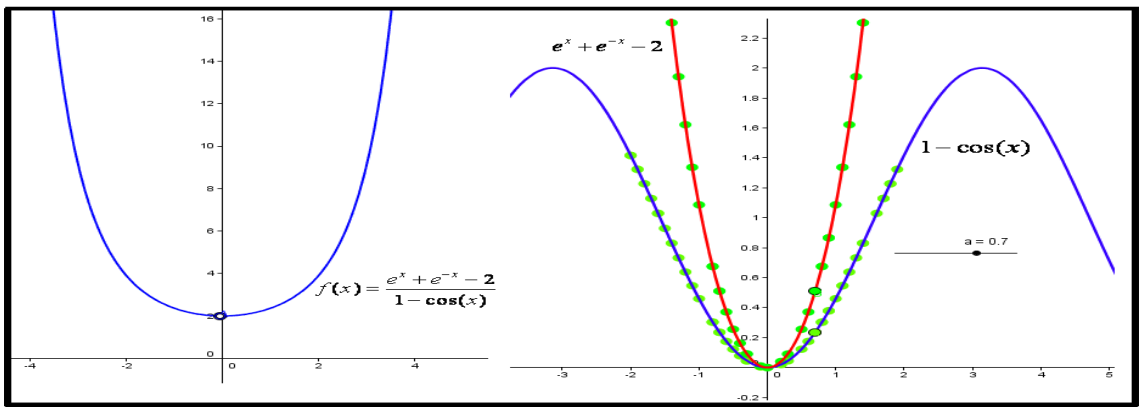


Figura 1: Descrição da manifestação da indeterminação por um via geométrica

A partir das figuras 1, do lado direito, percebemos que tanto a função $e^x + e^{-x} - 2$ como $1 - \cos(x)$ se aproximam de $y = 0$, na medida em que $x \to 0$. Pelo gráfico do lado direito, todavia, inferimos que $1-\cos(x)$ se aproxima mais rápido de zero do que $e^x + e^{-x} - 2$. Com origem nesta constatação de natureza geométrica, evidenciamos a necessidade de aplicação da regra, ante ao comportamento do quociente $(e^x + e^{-x} - 2)/(1-\cos(x))$.

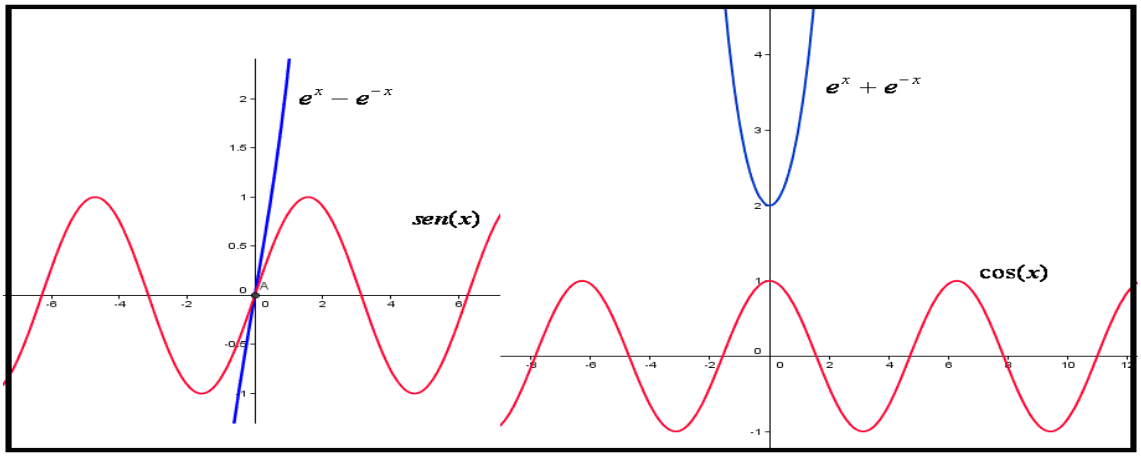


Figura 2: Identificação geométrica para a aplicação da regra de L´Hopital

Reparemos, agora, que no cálculo do limite (a), realizamos, costumeiramente, o seguinte procedimento: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{e^0 + e^{-0}}{\cos(0)} = \frac{2}{1} = 2$.

Nesta operação, aplicamos duas vezes a *regra de L`Hospital*, todavia, a partir dos dados das figuras 1 e 2, com arrimo na análise do comportamento dos gráficos, devemos adquirir o entendimento, de modo similar ao procedimento algorítmico, sobre a necessidade de aplicação da regra duas vezes. Por fim, na figura 2 (lado direito), observamos que $e^x + e^{-x} \to 2$ e $\cos(x) \to 1$, para $x \to 0$, e não há mais *indeterminação*.

Vamos considerar agora (b). No caso do limite $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$, vemos, por intermédio da figura 3 (lado esquerdo), que a imagem da função $\ln(x)/\sqrt[3]{x}$ decresce, tendendo a 0. E por intermédio do gráfico do lado direito (figura 3), depreendemos que estamos lidando com a ocorrência e/ou manifestação da seguinte forma de indeterminação ∞/∞.

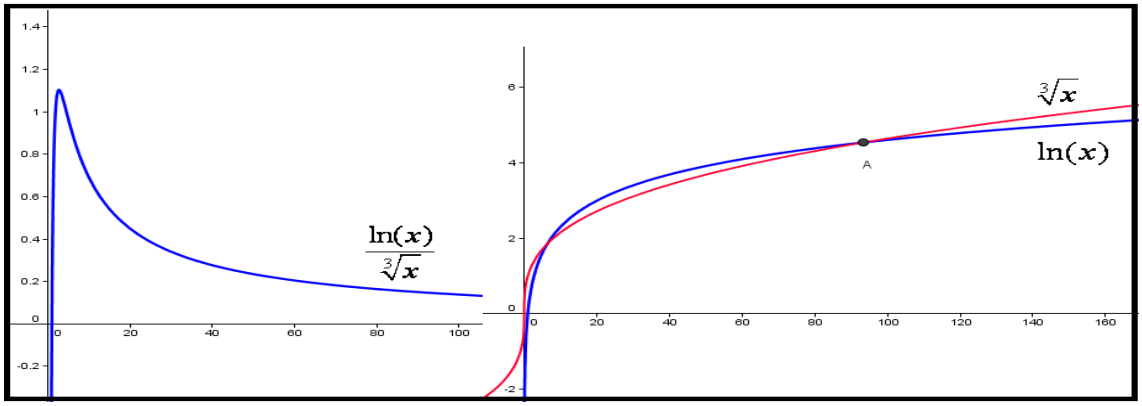


Figura 3: Com o auxílio do *Geogebra* identificamos a diferença de velocidade do crescimento da imagem da função

Por outro lado, na figura 3 (lado direito), divisamos que ambas as imagens das funções presentes na fração de (b) tenderem para $+\infty$, e, partir do ponto A, que constitui a interseção dos gráficos acima exibidos, os valores assumidos pela função do denominador $\sqrt[3]{x}$ crescem mais rapidamente do que a função $\ln(x)$ do numerador. Assim, para valores grandes de x, o símbolo ∞/∞ precisa ser interpretado de modo dinâmico e intuitivamente, como o infinito do denominador maior do que o infinito do numerador. Aplicando o procedimento, escrevemos: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}}=0.$

Confrontando os dados analíticos com os de natureza gráfica, compreendemos a razão pela qual aplicamos, nesse caso, a *regra de L´Hospital* somente uma vez (figura 4).

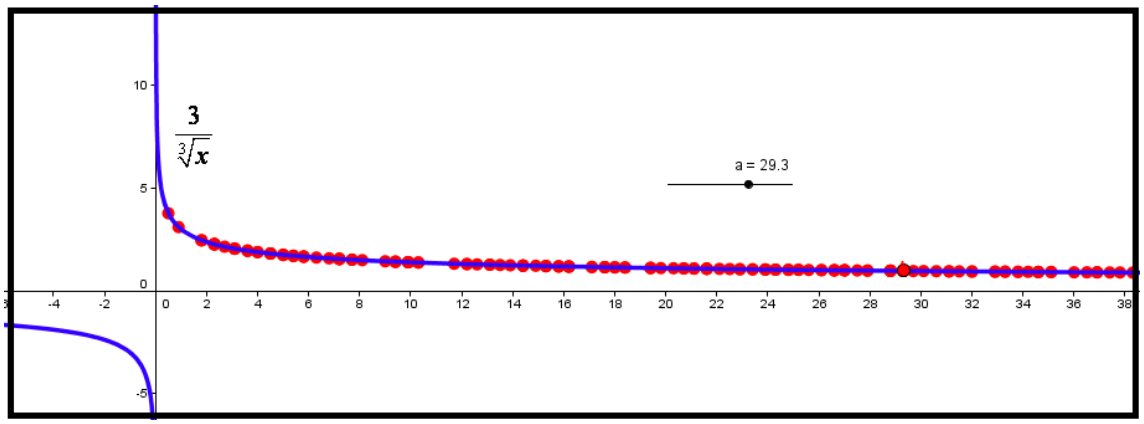


Figura 4: Comportamento de convergência para $x \to +\infty$

Na figura 4, depreendemos que, apesar de ser esperado que a imagem da função $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ se aproxime de zero, na medida em que $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$), a partir do gráfico, adquirimos o entendimento de que os valores de $x \in IR^+$ (eixo das abcissas) devem ser muito grandes, para que tenhamos a existência do limite e sua aproximação de zero.

No caso do limite (c), escrevemos $\lim_{x\to 0^+}[x\cdot\ln(x)]$. Compreendemos o sentido geométrico do surgimento desta *indeterminação*, quando divisamos o gráfico da figura 5, lado direito. Nele, vemos que, para valores $x\to 0^+$, a função $y=x$ tende para zero, enquanto que $\ln(x)\to-\infty$. Assim, deparamos uma *indeterminação* do tipo $0\cdot(-\infty)$.

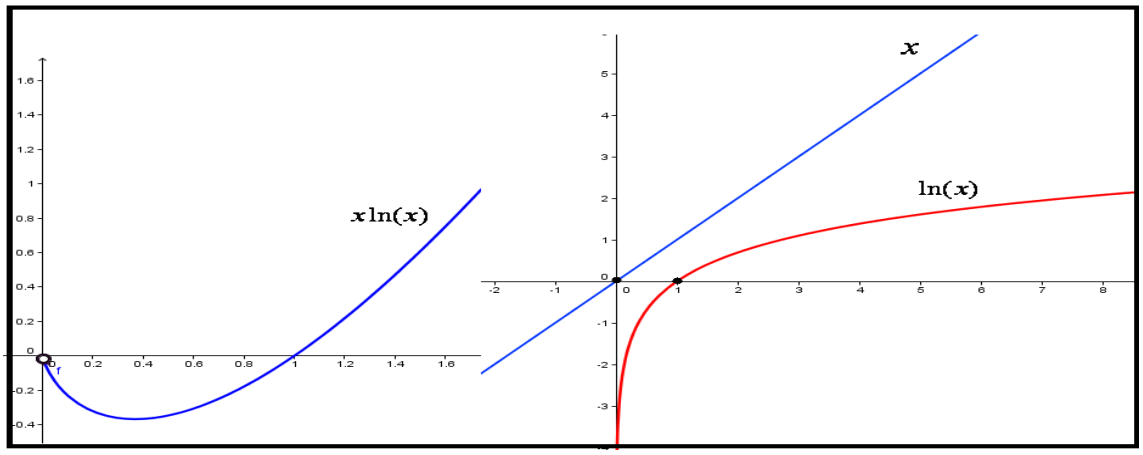


Figura 5: Descrição geométrica do comportamento da função na origem para $x\to 0^+$

Analiticamente, temos: $\lim_{x\to 0^+}[x\ln(x)]=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$. Reparemos que este valor é, pelo gráfico da figura 5, o valor do limite, todavia, diante da indeterminação, nada se pode concluir sem o uso da *regra de L´Hospital*.

Passaremos, agora, a considerar o limite (e). Com arrimo no gráfico, adquirimos o entendimento do comportamento geométrico da função $[1+sen4x]^{\cot g(x)}$. Neste caso, $[1+sen4x]\to 1$, na medida em que $x\to 0^+$ e $\cot g(x)\to+\infty$. Deste modo, com apoio na visualização gráfico (figura 6), adquirimos o entendimento geométrico do surgimento da indeterminação do tipo 1^{∞}. Por outro lado, analiticamente, consideremos $y=[1+sen4x]^{\cot g(x)}\ \therefore \ln y=\ln[1+sen4x]^{\cot g(x)}=\cot g(x)\cdot\ln[1+sen4x]$. Pela *regra de L´Hopital*, consideremos ainda $\ln y=\cot g(x)\cdot\ln[1+sen4x]=\dfrac{\ln[1+sen4x]}{tg(x)}$. Segue que

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln[1+sen4x]}{tg(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4\cos(4x)/1+sen4x}{\sec^2(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4\cos(4x)}{[1+sen4x]}\frac{1}{\sec^2(x)}=$$

$$=4\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(4x)}{[1+sen4x]}\frac{\cos^2(x)}{1}=4\frac{\cos(0)}{[1+sen0]}\frac{\cos^2(0)}{1}=4\frac{1}{1}\frac{1}{1}=4\ \therefore\ \lim_{x\to 0^+}\ln y=4.$$

Usaremos, então, seguinte propriedade $y=e^{\ln_e y}=e^{\ln y}$, assim, escrevemos $\lim_{x\to 0^+}[1+sen4x]^{\cot g(x)}=\lim_{x\to 0^+}y=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln y}=e^4$, cujo valor indicamos na figura 7.

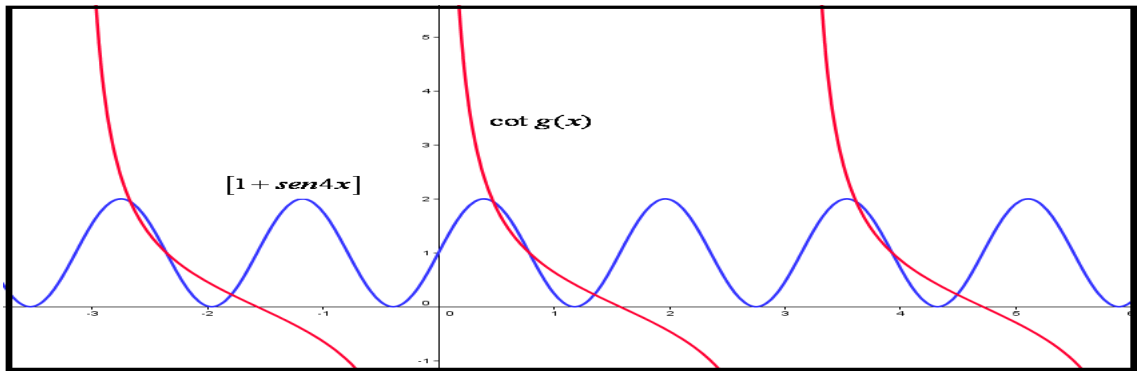


Figura 6: O significado geométrico da indeterminação do tipo 1^{∞}

No gráfico da figura 7, indicamos, geometricamente, a região do gráfico na qual se identifica a ocorrência de uma *indeterminação* e, consequentemente, a impossibilidade de avaliação do limite, sem o uso da *regra de L´Hospital*. Do lado, direito, apresentamos uma visão global do comportamento do gráfico da função $[1+sen4x]^{\cot g(x)}$. Pelos gráficos 6 e 7, podemos conjecturar que ocorrem infinitos pontos, nos quais, se observa a manifestação de *indeterminações* do tipo 1^{∞}.

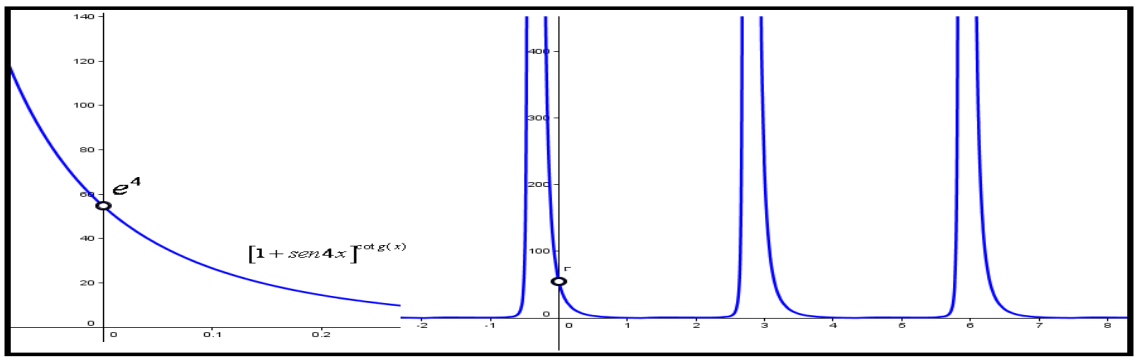


Figura 7: Análise local e global do gráfico da função com o uso do *software*

4. Considerações Finais

Alves (2012) discute as potencialidades de exploração do *Geogebra* no contexto de ensino de conceitos relacionados à *Análise Real*. Neste escrito, trazemos exemplos de interpretação geométrica de uma regra que envolve a possibilidade de, pelo menos, duas demonstrações (BARBOSA, 2008), todavia, no contexto da aprendizagem, nem sempre o entendimento da demonstração formal desta regra, implica no entendimento conceitual de propriedades geométricas relacionadas com esse enunciado.

Neste escrito, apesar de não possuirmos a pretensão de registrar nenhum ineditismo relacionado aos limites (a), (b), (c) e (d), discutidos, com o auxilio do *Geogebra*, a descrição de um cenário de aprendizagem que possibilita ao estudante o entendimento acerca da manifestação da noção de *indeterminação*, sobretudo, no quadro geométrico. Este fato, evita um domínio restrito ao campo algébrico de sua aplicação, e que vem

sendo registrado como uma tônica predominante por parte de autores de livros didáticos (HEREDIA, 2007) e no *locus* acadêmico (ARTIGUE, 2002).

Referencias bibliográficas

Alves, F. R. V. (2012). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, 1. 65-79, Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index. Acessado em: 04 de Abril de 2012.

Artigue, M. (2002). Analysis. In: (Eds.). Tall, David. *Advanced Mathematical Thinking*, Capítulo 11, pp.167-196. New York: Klumer Academic Publishers.

Barbosa. Everaldo. F. (2008). A regra de L´Hopital: análise histórica da regra de L´Hospital (dissertação) – Pós graduação em Matemática. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 90p.

Bridoux, S. (2011). Enseignement de premières notions de topologie à l´université : une étude de cas. (Thèse de doctorat) – École de doctorat Savoir Scientifiques. Grenoble : Université Joseph Fourier, 339p.

Guidorizzi, H. (2010). *Um curso de Cálculo*. v. 1, Rio de Janeiro: Ao Livro técnico.

Heredia, A. S. B. (2007). Obstáculos didácticos y el discurso explicativo de los libros de texto de Cálculo. (Tesis en Matemática Educativa) - Instituto Politécnico Nacional do Mexico. Mexico D.F.: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada, 140p.

Leithold, Louis. (1999). *Um curso de Cálculo com Geometria Analítica*. v. 1, São Paulo: Harbra Editora.

Lima. E. L. (2006). *Curso de Análise*. v. 1, Rio de Janeiro : SBM, 430p.

Maurice, L. (2000). Les idées d´élèves du collégial à propos des limites de fonctions rationnelles faisant intervenir le zéro et l´infini (thèse de doctorat), Québec: Université Laval, 234p.

Otte, M. (2008). Metaphor and contingency. In: Radford, L.; Schübring, G. & Seeger, F. *Semiotics in Mathematics Education*, Capítulo 3, pp. 63-82. Rotterdam: Sense Publishers.

Simmons, G. F. (1987). *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Editora McGraw-Hill, 829p.

Stewart, J. (2004). *Cálculo*. v. 2, 4ª edição, São Paulo: Thompson, 2004.

LAS COMPUTADORAS EN EL AULA. UNA EXPERIENCIA DE CAPACITACIÓN

Lic. Claudia Comparatore, Lic. Liliana Kurzrok
claudiacompa@gmail.com, lkurzrok@gmail.com
Capacitación de la Provincia de Buenos Aires. Argentina

Modalidad: Comunicación
Nivel: capacitación para docentes del nivel medio
Palabras clave: educación y tic, matemática y tics

Resumen

La inclusión de las computadoras en el aula nos propone el desafío de analizar qué actividades colocan al alumno en situación de un aprendizaje que promueva la construcción de conocimientos, y no la mera repetición. Hay que tener en cuenta que las computadoras invitan a ver y afirmar pero, desde la perspectiva didáctica de los diseños curriculares vigentes, pensamos en actividades que promuevan analizar, conjeturar y demostrar.

Esta situación es más compleja que el uso en el aula de las calculadoras, ya que con más facilidad puede caerse en su uso mostrativo más que reflexivo o generador de conocimiento, y el peligro que solo se utilicen para reforzar una repetición de pasos que no comprometan intelectualmente al alumno y no le permitan resolver otras situaciones sin la guía del docente.

En este artículo mostraremos una aproximación a esta discusión a través de una capacitación a docentes que versó sobre el tratamiento didáctico de la modelización en matemática, teniendo en cuenta que es un problema que preocupa a los docentes, y en el que los métodos tradicionales de enseñanza han dado poca eficacia ya que hay alumnos que manejan bien la operatoria pero no pueden entender para qué utilizarla.

Introducción

En Argentina, en el año 2011, comenzó a llevarse a cabo el programa Conectar Igualdad, propiciado por el Gobierno Nacional. En este contexto, los alumnos de escuelas secundarias estatales recibieron una netbook para trabajar en el aula y en sus casas. Esto motivó a organizar capacitaciones para los docentes de diferentes áreas, orientadas a discutir las particularidades que adquiere la enseñanza utilizando como recursos los diferentes softwares incluidos en dichas netbooks.

Nos propusimos armar un curso para docentes de Matemática de Nivel Medio. El curso tenía un doble propósito: que los docentes se familiaricen con la herramienta y que le encuentren los sentidos didácticos de su utilización.

Nos parece de mucho valor que los docentes puedan utilizar las computadoras no solo como una simple herramienta de resolución de ecuaciones o cálculos sino que puedan trabajar desde el enfoque que se plantea en las diferentes jurisdicciones de Argentina: el trabajo matemático no es la reproducción de estrategias que el docente enseña, sino la

construcción de estrategias propias que motivan la reflexión del trabajo propio y del ajeno, que promueve la justificación y la validación de sus procedimientos y que va haciendo que los alumnos adquieran conocimientos y habilidades a partir de sus resoluciones, que no son únicas ni copiadas, son colectivas.

Aquí es donde el desafío es mayor ya que, el uso de la computadora muchas veces se ve relegado a la reproducción de pasos, por ese motivo plantearemos, en el marco de una capacitación docente, actividades que les permitirán al docente, tanto apropiarse de la herramienta, como de utilizarla en forma constructiva.

La propuesta de secuencias didácticas a partir de elementos relativamente conocidos por los capacitandos tiene la intención de darles una posibilidad de incorporar ambas situaciones: la enseñanza de la matemática y el uso de una herramienta informática.

Artigue[1] sostiene que la falta de integración de tecnología informática, en las escuelas, tiene cuatro razones:

1. *la pobre legitimidad educativa de la tecnología informática en comparación con su alta legitimidad social y científica;*
2. *la subestimación de aspectos que se relacionan con la automatización de conocimiento matemático;*
3. *la oposición entre las dimensiones técnicas y conceptuales de la actividad matemática; y*
4. *la subestimación de la complejidad de los procesos de instrumentación.*

Al utilizar un software para generar conjeturas que se deben probar, se pone en juego una de las características del hacer matemática. Esto significa que el trabajo con el software tiene una intencionalidad, no es neutra su utilización (Chevallard; 1992).

La incorporación de las computadoras y los diferentes softwares, "*hace que la situación de enseñanza y aprendizaje sea mucho más compleja desde el punto de vista didáctico porque un sistema informático es, ante todo, la materialización de una tecnología simbólica*"[2] (Balacheff, 2000). Para que este recurso tenga el efecto deseado, es decir, que haya una retroalimentación y no se convierta en una cantidad de pasos a seguir para lograr el objetivo pedido, es necesaria una *orquestación didáctica*[3].

[1] Artigue, M. (2000) *Los aspectos de la instrumentación y de la integración de las tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas en el nivel secundario*.

[2] Balacheff, N. (2000), *Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas por edades*.

[3] *Una orquestación se define como una configuración didáctica y por los modos de explorar esas configuraciones.*

Nuestra idea fue entonces proponer el análisis didáctico de secuencias de actividades que permitan ir desarrollándose en idas y vueltas de la computadora al papel, sin pensar en momentos específicos para cada herramienta. Dependerá del alumno en qué momento él transforme la herramienta "*cuando tiene efectos de re-organización conceptual. Cuando la herramienta se torne instrumento estaremos ente los efectos estructurantes de la herramienta sobre la acción.*"[4]

En las secuencias propusimos un espacio importante dedicado a la demostración de las conjeturas a las que se arriban por el uso de los programas. Esto significa que el entorno informático les dará a los alumnos un recurso para encontrar propiedades, que pueden validar con la misma herramienta pero que deberán demostrar por medio de argumentaciones que los coloca más allá de la visión perceptual del objeto matemático. *"Es esperable que el lugar de la demostración, en los primeros momentos, aparezca como una necesidad solo del docente. Habrá que trabajar en ese sentido para poder cambiar la idea de percepción con la de demostración.*

Obligar a los estudiantes a demostrar no sería más que una frágil superación de este obstáculo. Para tratar este problema a fondo, Chevallard y Tonel le (1982) sugieren ubicarse en el terreno mismo de la evidencia, partiendo de los argumentos del alumno; se trata de conducirlo a una situación paradójica en la cual él se verá obligado a ponerlos nuevamente en tela de juicio. No se trata de recurrir a la refutación, sino de hacer que se tome conciencia de que no siempre es posible atenerse a los argumentos de evidencia iniciales. En otras palabras, se trata de problematizar la evidencia."[5]

Desarrollo

Este curso fue pensado con la modalidad b- learning[6]. Esto se debe a que, la población a la que nos dirigíamos tenía poco acceso al mundo virtual. Eran, por lo general, docentes que no tenían contacto con las computadoras y se veían enfrentados a inmigrar a ese mundo dado que, al tener las computadoras disponibles, los alumnos y los directivos presionaban para su uso.

Las actividades propuestas tenían el fin de discutir junto con los capacitandos las estrategias que podían hacer los alumnos y las posibles intervenciones docentes. No estaban articuladas en una sola secuencia didáctica.

[4] Moreno Armella, L. (2001), *Instrumentos matemáticos computacionales*, en: Revista Eduteka - Agosto 2001

[5] Balacheff, N. (1999), ¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate?, en: *La Página de la Prueba*, Mayo/Junio.

[6] Aprendizaje mezclado, en el que se combinan las propuestas presenciales con las virtuales.

Las actividades no presenciales se plantearon para que los capacitandos se familiaricen con herramientas de trabajo colaborativo como participación en foros de discusión, wikis, etc. Esto permitió en los encuentros presenciales, retomar los miedos y dificultades que fueron surgiendo a raíz de la obligatoriedad del uso de la herramienta.

Al planificar las actividades relacionadas con las tics tuvimos presente que muchos docentes tendrían contacto con las computadoras por primera vez en este taller, por dicho motivo ocupamos parte del tiempo en explorar sobre los distintos programas que están incluidos en ella. La idea fue que conozcan las herramientas que podrían utilizar.

Al planificar las actividades tuvimos en cuenta que muchos de los profesores que capacitamos siguen considerando que la matemática es solo saber hacer cuentas y ejercicios, sin reflexionar acerca de ellos. La carpetas de los alumnos se nota un fuerte trabajo en operatoria y reproducción de mecanismos. Es por esto que pensamos un primer momento del taller que permita reflexionar acerca de por qué y para qué enseñamos algunos temas clásicos a los alumnos.

Al preparar las actividades para los docentes pensamos que las propuestas que circulaban centraban su trabajo en Geometría, por tal motivo intentamos ver otras herramientas que proporciona GeoGebra y que permiten un trabajo parecido sobre conjeturas y demostraciones. Otro motivo de esta decisión es que muchos docentes de la escuela media no dan Geometría y construcciones por lo que pensábamos que esa temática podría hacer mermar la inscripción y perdernos la oportunidad de que los docentes se acerquen a analizar el recurso. Abordamos entonces las actividades agrupadas en 3 aspectos centrales.

1. Uso de la planilla de cálculo

Para comenzar propusimos una actividad que permitiría familiarizarse con la planilla de cálculo (puede usarse la de GeoGebra o cualquier otra) y las posibilidades didácticas que se plantean.

Resuelvan el problema que presentamos a continuación. Posteriormente: a. Describan cómo lo resolvieron, precisando qué nociones (definiciones, propiedades) y qué procedimientos pusieron en juego. b. El tipo de trabajo que desarrolló en la resolución, ¿es similar al que realizaría sin la computadora? c. ¿Qué conocimientos deben tener los alumnos para abordarlo? d. Si decidiera presentarlo en clase utilizando la computadora, ¿dónde plantearía las puestas en común? ¿Por qué?

Problema

1. Anoten cómo harían para escribir en la columna A de una planilla de cálculo los números del 1 al 100. Verifiquen si con lo que propusieron se pueden realizar la actividad.
2. Sirve la forma anterior para escribir en la columna A todos los números del 1 al 1.000. Si no es así o les resulta poco económico, busquen otra estrategia.
3. Anoten cómo pueden hacer para que, en la columna B aparezcan el doble de los números que en la columna A.
4. Cambien el número de la celda A1, ¿en la celda B1 sigue apareciendo el doble que en A1? Si no es así vuelvan a resolver el problema 3 para que esto suceda.
5. ¿Cómo harían para que en la columna C aparezca la suma de 3 números consecutivos comenzando en el de la columna A. Hagan lo que propusieron en la máquina.
6. Cambien el número de la celda A1, ¿en la celda C1 sigue apareciendo la suma de 3 números consecutivos comenzando en el de la columna A? Si no es así vuelvan a resolver el problema 5 para que esto suceda.

Esta fue una actividad que permitió visualizar los diferentes niveles de aproximación a la herramienta pero hasta los que más claro tenían el manejo pudieron analizar la potencialidad del armado de fórmulas para resolver todos los ítems y cómo algunas preguntas ponen a prueba esas fórmulas o las formas de completar.

Es decir, teniendo la oportunidad de que la computadora calcule lo que necesitamos, es la actividad propuesta la que permite que aparezcan las nociones didácticas y matemáticas y no, la herramienta en sí misma.

Siguiendo con la idea de la necesidad de analizar la noción de variable es que planteamos en el taller de capacitación docente la actividad que se incluye en el Anexo I.

El problema permite comparar las diferentes fórmulas, desde lo que indica la computadora (dan los mismos números) y analizar que no alcanzan muchos números para probar. La computadora puede servir para decidir que fórmulas no son equivalentes pero para afirmar que las fórmulas lo son, no alcanza. Es necesario demostrarlo a partir de las relaciones y propiedades que se verifican. Es aquí donde ponemos en juego la insuficiencia de la herramienta para la demostración. La planilla ayuda a descartar lo que no es correcto pero no justifica lo correcto.

2. Uso de la gráfica de funciones

Al indagar sobre las actividades que suponen los docentes del uso de la computadora en el aula nos encontramos con una mayoría que la imagina para graficar funciones, ver la ordenada al origen o raíces y verificar con sus cálculos o para hacer cuentas. Por este motivo, las actividades que propusieron se refirieron a analizar otros usos y ventajas que superan el cálculo o la verificación.

Posteriormente les dimos la actividad del Anexo II con el objetivo de analizar los aportes de la tecnología con el fin didáctico y determinar que los análisis que se propician y que van más allá de hacer gráficos a mano que llevan mucho tiempo, los alumnos se dispersan y en general los análisis son determinados por el docente y no observados por los alumnos

a. Lean la secuencia didáctica incluida en el Anexo II.
b. ¿Cuáles pueden ser los beneficios de utilizar un graficador en estos casos?
c. ¿Por qué considera que es una secuencia didáctica? Analicen la pregunta según la definición propuesta en el Anexo III.
d. ¿Cuál es el objetivo de la misma?
e. ¿Qué conocimientos previos deben tener los alumnos?

3. La geometría y el álgebra

Se presenta la siguiente actividad para plantear las posibilidades del trabajo, geométrico, algebraico y gráfico.

Actividad

Primera parte

Piensen cómo puede resolver el problema un grupo de alumnos que no conoce ecuaciones de segundo grado pero que ha estudiado producción de fórmulas y funciones.

¿Qué posibles soluciones pueden obtenerse usando la vista de hoja de cálculo del GeoGebra y la vista Geométrica? ¿Cuál de ellas es la “mejor” solución? ¿Por qué?

Construyan sobre el mismo dibujo las funciones que relacionan el área de las figuras con el lado $\overline{AM}$. ¿Qué conclusiones podría obtener?

¿Cómo organizarían la clase, qué discusiones promoverían y a qué conclusiones arribarían?

Problema[7]

Sea ABCD un cuadrado de 8 cm de lado y sea M un punto del lado $\overline{AB}$.

a. Dibujar un cuadrado que tenga a $\overline{AM}$ como lado y que quede adentro del cuadrado anterior.

b. Dibujar un triángulo isósceles con un lado a $\overline{MB}$ que tenga altura igual a $\overline{AM}$.

a. ¿Puede ser que el cuadrado y el triángulo tengan la misma área? ¿En qué casos?

b. ¿Cuánto mide la base del triángulo para que el área sea máxima?

c. ¿Es posible que el área del triángulo sea mayor que el área del cuadrado?

d. ¿Cómo varía el área del triangulo según varia $\overline{AM}$ y según varia $\overline{MB}$?

e. ¿Qué sucedería si el triángulo no fuera isósceles?

f. Analice los cambios que se introducen con la siguiente formulación:

Sea ABCD un cuadrado de 8 cm de lado y sea M un punto del lado $\overline{AB}$. Se construye un cuadrado y un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es $\overline{MB}$.

a. ¿Es posible que el área del triángulo sea igual al área del cuadrado? ¿En qué casos?

b. ¿En qué casos la suma de las áreas es la máxima posible? ¿Y la mínima?

Se analizaron las resoluciones algebraicas y geométricas y en qué casos es posible una u otra y qué aporta la construcción geométrica en GeoGebra.

Es muy interesante resaltar que la manera de definir las variables de las funciones que permiten visualizar la solución en la pantalla. Esta construcción no es elemental y menos aún la definición de las funciones, sin embargo el trabajo en la capacitación permite la necesidad de explorar nuevos comandos y su aprovechamiento en la clase.

Segunda parte

Supongan ahora que presentan el problema en una clase en la que se trabajó con ecuaciones de segundo grado, y que en una primera instancia los alumnos lo resuelven con el graficador de Geogebra.

Teniendo en cuenta la caracterización de marcos propuesta por Douady que aparece en el Anexo IV, expliciten qué discusiones promoverían para vincular la resolución gráfica con una algebraica que apele a ecuaciones.

[7] Problema extraído de la revista Eduscol Mathematiques Fonctions. Julio 2011

Conclusiones

La incorporación de las computadoras en el aula produjo mucha incertidumbre en los docentes, que no están acostumbrados a manejarla y que no saben cuáles son los beneficios de su uso.

Los que realizaron este curso pudieron analizar los alcances y limitaciones del uso de los diferentes programas que traen las netbooks que recibieron y a la vez reflexionar sobre la necesidad de pensar en actividades que propongan un trabajo intelectual de los alumnos, que no se limite a ver sino que los ayude a trabajar matemáticamente, conjeturar y demostrar propiedades, sacar conclusiones e interactuar con el software anticipando, visualizando, reflexionando y argumentando sobre sus conjeturas.

La computadora por sí sola no produce en los alumnos el conocimiento matemático, es necesario plantearse estrategias y secuencia adecuadas para que esto ocurra.

Todavía tenemos un camino largo por recorrer en la capacitación docente pero pudimos transponer el primer escalón para lograr que las tecnologías aparezcan en el aula de manera constructiva y provocando un cambio en la percepción de la enseñanza de la matemática.

Bibliografía

- CHEVALLARD, Y. (1992), "Intégration et viabilité des objets informatiques", en: CORNU, BERNARD (comp.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*, Nouvelle Encyclopédie Diderot, París.

- DUVAL, R. (1995), *Sémiosis et penseé humanie. Registres sémiotiques et apprendissages intellectuels*. Peter lang. Suisse

- RABARDEL, P. (1995), *Los hombres y las tecnologías. Perspectiva cognitiva de los instrumentos contemporáneos*, en: Biblioteca Virtual BV-EEE. Revista Eduteka, agosto.

Anexo I

Resuelvan el problema que se presenta a continuación. Posteriormente:

a. Describan cómo lo resolvieron, precisando qué nociones (definiciones, propiedades) y qué procedimientos pusieron en juego.

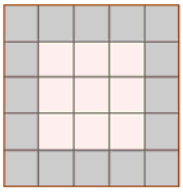
b. ¿Qué conocimientos deben tener los alumnos para abordarlo?

c. ¿Dónde plantearían las puestas en común? ¿Por qué?

d. Centren la atención en el item 4. ¿Qué aporta el uso de la computadora en este caso?

Problema[8]

Luis tiene que poner el piso en un patio cuadrado y decide armar un cuadrado con baldosas negras y blancas como el de la figura.



1. ¿Cuántas baldosas negras necesita si va a poner 5 baldosas en el largo del patio?
2. ¿Cuántas baldosas negras necesita si va a poner 27 baldosas en el largo del patio?
3. ¿Cuántas baldosas negras necesita si va a poner 100 baldosas en el largo del patio?
4. En el negocio tienen un programa que permite calcular la cantidad de baldosas negras necesarias conociendo la cantidad de baldosas por lado.

a. En la casilla A1 de la planilla de cálculo pongan el número 100 y en casilla B1 escriban la cantidad de baldosas que necesita Luis si pone 100 baldosas por lado.

b. Modifiquen el casillero A1 poniendo 27. En B1 aparece la cantidad necesaria de baldosas negras conociendo la cantidad de baldosas por lado. Si no es así vuelvan al punto a para que esto suceda.la idea de la necesidad de analizar la noción de variable es que planteamos en el taller de capacitación docente esta actividad.

Anexo V

Régine Douady[9] afirma:

"El juego de marcos traduce la intención de explotar el hecho de que la mayoría de los conceptos puede intervenir en distintos dominios, diversos marcos: físico, geométrico, numérico, gráfico u otros. En cada uno de ellos se traduce un concepto en términos de objetos y relaciones que podemos llamar los significados del concepto en el marco. Los significantes que tienen asociados pueden eventualmente simbolizar otros conceptos en

[8] Idea del problema extraído del Actualización de los programas de Nivel Medio. Programa de Primer año, Gobierno de la Cuidad de Buenos Aires. 2002.
[9] Régine Douady, "Dialéctica Instrumento-Objeto. Juego de Marcos"

el campo de los significados. Es el caso de representaciones gráficas de funciones y de representaciones en el plano de elementos materiales, algebraicos u otros, cuyas propiedades geométricas, topológicas o combinatorias podemos estudiar. Esto se obtiene de las correspondencias de significados de un mismo concepto en marcos diferentes, por un lado, y entre significados de conceptos diferentes representados en el mismo marco por los mismos significantes, por otro. Pero para los alumnos en tren de aprendizaje, los conceptos funcionan de manera parcial y diferente según los marcos. Por consiguiente, las correspondencias están incompletas".

Anexo III

Extraído de la revista: *Cómo elaborar secuencias didácticas en Lengua y Matemática* de la Serie Como enseñar, fascículo 10, Enero 2012.

Una secuencia didáctica es una serie de actividades que guardan relación unas con otras. Su fin es el de provocar la evolución del conocimiento que se pone en juego.
En una secuencia, cada problema permite poner en juego o cuestionar al anterior.
Es decir, en una secuencia didáctica cada problema que se pone puede tratar de reafirmar el anterior (proponiendo un análisis de lo hecho con actividades cognitivas similares) o intentar poner en discusión cierta forma de pensamiento....
Cuando se piensa en una secuencia no solo hay que tener en cuenta el tema, el año y el tipo de problemas sino que también hay que considerar los posibles errores que cometerán los alumnos, las intervenciones que el docente hará, en qué momentos organizará las puesta en común, con qué objetivo y la institucionalización prevista.. Es decir, es necesario anticipar lo que sucederá en el aula. Esto no significa que lo que se anticipó sea exactamente lo que ocurrirá pero le permitirá ingresar al aula con algunas previsiones que le permitirán, por lo tanto, realizar las modificaciones necesarias en función de lo que ha ocurrido

Anexo IV

Resuelvan el problema y luego respondan: ¿Qué aporta la computadora al trabajo en el aula de este problema?

Un laboratorio está estudiando la reacción de los animales a cierto medicamento. Introducen una cantidad de medicamente cada día y anotan los resultados obtenidos en una tabla.

Cantidad de días	1	2	3	4
Cantidad de medicamento	2	1	0,5	0,25

a. ¿Si se continúa de esta manera a qué modelo representan mejor los puntos?

b. 1. Copie la tabla en la planilla de cálculo de GeoGebra.

2. Armen una lista con los datos usando el botón derecho del mouse.

3. Grafiquen el ajuste lineal de la lista de puntos.

4. Grafiquen el ajuste exponencial de la lista de puntos.

5. ¿Qué ajuste relaciona mejor los datos?

6. ¿Cómo es posible anticipar la cantidad de medicamento que le darán a los animales al décimo día?

Anexo II

Extraído de Matemática ES3, Ed. Tinta Fresca, Altman, Arnejo, Comparatore, Kurzrok.

Utilicen GeoGebra para realizar las siguientes actividades.
Analicen en los problemas del 1 al 8 cómo propondría las demostraciones de

1.a. Grafiquen las funcines $y=x^2, y=x^3, y=x^6$.
b. ¿Tienen pares de puntos simétricos?
c. ¿Tienen vértice?

2.a. Grafiquen las funcines $y=x^4+1, y=-x^4$, $y=x^4-3, y=2x^4$
b. ¿Tienen pares de puntos simétricos?
c. ¿Es posible hallar el vértice de la misma forma que en la gráfica de la función cuadrática? Si la respuesta es afirmativa, indiquen cuál es el vértice de cada una. Si es negativa, expliquen por qué.

3.a. Grafiquen las funcines $y=x^5, y=x^7, y=x^9$.
b. ¿Tienen pares de puntos simétricos?
c. ¿Tienen vértice?

4.a. Comparen las funciones de los problema **2.** y **3.** Establezcan similitudes y diferencias.
b. ¿Es cierto que todas las funciones de la forma $y=x^n$ con n par tienen pares de puntos simétricos y un vértice y que todas las funciones de la forma $y=x^n$ con n impar no tienen ni puntos simétricos ni vértice?¿Cómo pueden estar seguros?

5.a. Grafiquen las funciones $y=x^{\frac{1}{2}}; y=x^{\frac{1}{4}}; y=x^{\frac{1}{3}}$.
b. Para cada una de ellas determinen el dominio, la imagen, las raíces, los intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad.
c. ¿Tienen máximos o mínimos? Si responden afirmativamente, indiquen cuáles son; si no, expliquen cómo se dan cuenta.
d. ¿Qué deberían realizar para graficar estas funciones conociendo los gráficos anteriores?
$$y=x^{\frac{1}{2}}-1\,;\,y=x^{\frac{1}{4}}+3\,;\,y=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$
e. Verifiquen las conclusiones con el programa.

6.a. Grafiquen las funciones $y=x^{\frac{1}{3}}; y=x^{\frac{1}{5}}; y=x^{\frac{1}{7}}$.
b. Determinen el dominio, la imagen, las raíces, los intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad para cada una de ellas.
c. ¿Tienen máximos o mínimos? Si responden que sí, indiquen cuáles son. Si responden que no, expliquen cómo se dan cuenta.
d. ¿Qué deberían realizar para graficar estas funciones conociendo los gráficos anteriores?
$$y=x^{\frac{1}{3}}+5\,;\,y=x^{\frac{1}{5}}-9\,;\,y=-x^{\frac{1}{7}}$$
e. Verifiquen las conclusiones con el programa.
f. Comparen estas funciones con las del problema anterior. Establezcan similitudes y diferencias.

7.a. Grafiquen las funciones $y=x^{\frac{2}{3}}; y=x^{\frac{4}{3}}; y=x^{\frac{5}{3}}$.
b. Determinen el dominio, la imagen, las raíces, intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad para cada una de ellas.
c. ¿Tienen máximos o mínimos? Si responden que sí, indiquen cuáles son. Si responden que no, expliquen cómo se dan cuenta.
d. ¿Qué deben realizar para graficar estas funciones conociendo las gráficas anteriores?
$$y=x^{\frac{2}{3}}-8\,;\,y=x^{\frac{4}{3}}+2\,;\,y=-\frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}}$$
e. Verifiquen las conclusiones con el programa.

8.a. Grafiquen las funciones $y=\frac{1}{x-3}; y=\frac{1}{x+4}$.
b. Determinen el dominio, la imagen, las raíces, intervalos de crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad para cada una de ellas.
c. ¿Tiene máximos o mínimos? Si responden que sí, indiquen cuáles son. Si responden que no, expliquen cómo se dan cuenta.

9. Usen el comando *Fijar dominio* que está en *Herramientas* para graficar estas funciones.
a. $y=\begin{cases}3x^2+1 \text{ si } & x\geq 1\\ 2x-3 \text{ si } & x<1\end{cases}$ **b.** $y=\begin{cases}-3x+2 \text{si } & x<1\\ 12 \quad \text{si } & x\geq 1\end{cases}$

MATEMÁTICA, LÚDICO E GEOGEBRA: UMA COMBINAÇÃO A FAVOR DA APRENDIZAGEM

Adriana Regina de O. Cunha - Rafael dos S. Freire - Rosemeiry de C. P. Maximiano
adrianacunha05@hotmail.com - rafa_sf07@hotmail.com - rosecprado@zipmail.com.br
Faculdade de Tecnologia (FATEC Ourinhos) – Brasil.

Modalidade: Comunicações.
Nível Educacional: Primário.
Palavras-chaves: Geogebra, matemática, infantil, aprendizagem.

Resumo
É fato que o aprendizado está relacionado com o significado do conteúdo a ser ensinado. Tal aprendizado não pode se dar de modo mecânico e desconectado da realidade e da construção do saber. Também é evidente que o papel do professor é fundamental nessa transmissão e apropriação de conhecimentos por meio de mediações e metodologias facilitadoras da aprendizagem, contribuindo com o desenvolvimento do raciocínio lógico, abstrato e com a resolução de problemas que podem conduzir à efetivação do saber. Neste sentido, os recursos didáticos têm recebido atenção especial pelos estudiosos, pesquisadores e professores preocupados com a Educação. Contudo, o profissional da área tem que estar num processo de atualização contínua de apropriação das ferramentas que serão utilizadas como mediadoras do ensino e aprendizado de um dado conhecimento científico. No caso da matemática, mais do que nunca se tem buscado ferramentas tecnológicas que contribuam com a aquisição dos objetos de ensino. Dentre essas ferramentas, destaca-se o Geogebra, um software livre que contempla vários conceitos matemáticos. Em se tratando, especificamente do ensino fundamental, criam-se possibilidades de usar o aplicativo associado ao lúdico, à arte, a história, de maneira a contemplar as mais diversas idades, possibilitando aprendizados e diversas formas de expressões e linguagens. Destarte, o objetivo desse trabalho é apresentar uma atividade que envolve formas matemáticas de uma maneira divertida por meio do Geogebra.

1. Introdução

Muito se tem discutido a respeito do ensino e aprendizado da matemática nos diversos países, destacando os mais variados aspectos que envolvem a sua inserção nos currículos oficiais, tais como a sua extrema importância na construção do caráter do educando, a necessidade dela estar ao alcance de todos, sendo seu ensino, o principal objetivo do professor. Além disso, há apontamentos de que o seu ensinamento não pode ser mecânico, apenas com uso de conceitos e fórmulas e que o aluno deve apropriar-se do conhecimento, relacionando a matéria, cuidadosamente, com a sua realidade, instigando-o a comunicar-se a respeito do assunto e mostrar suas constatações (BRASIL, 1998).

Leva-se em conta que o aprendizado é o entendimento do aluno sobre o significado de um determinado fato ou objeto, fazendo uma ligação com a matemática e outras disciplinas e que o papel do professor é conduzir o conhecimento contando com o auxílio didático de livros, jogos, vídeos, calculadoras, computadores e outros tipos de materiais (BRASIL, 1998).

Assim, o papel da matemática no ensino fundamental é o auxiliar no desenvolvimento e na formação do raciocínio lógico do educando e, com a acentuada preocupação das metodologias e questões cognitivas e comportamentais que envolvem o aprendizado da matemática surgiram inúmeras conjecturas quanto à maneira de se ensinar, deixando de lado as somente práticas tradicionais, voltando-se às teorias envolvidas com histórias, jogos, computadores e outros instrumentos para motivar e auxiliar os alunos que estão inseridos numa sociedade cada vez mais tecnológica e competitiva.

Fazer uso de teorias, conceitos históricos e demonstrações são importantes no ensino de matemática, entretanto, muitos professores resumem-na apenas a isso e descartam conteúdos essenciais por acreditarem que os alunos não se interessarão ou por não condizerem com a realidade deles, empobrecendo o seu trabalho. Portanto, é preciso ter cuidado com a interpretação do cotidiano de cada educando, levando em conta, os saberes espontâneos que o mesmo já acumulou ao longo de sua existência. O fundamental para o professor ao ensinar matemática é levar em conta o que o aluno sabe e também suas condições sociológicas, culturais e psicológicas, pois o aluno possui conhecimentos e experiências vivenciadas no seu meio, trazendo diversas ferramentas que complementarão o seu aprendizado.

Também é fato que diversas áreas do conhecimento recorrem à matemática como ferramenta para a descoberta e explicação de certos fatos, justificando problemas apresentados, teoremas ou conceitos. Logo, é correto afirmar que todas as matérias estão ligadas e que há uma interdisciplinaridade que as envolve. E, um ponto marcante da sociedade moderna, é que o profissional está em um processo de formação contínua. Segundo o Ministério da Educação (2000), o lema é aprender e aprender sempre, não podendo ter receios e preconceitos com as novidades que surgem ao longo do tempo, pois o mercado de trabalho necessita de pessoas preparadas, com conhecimentos acerca de diferentes tecnologias, linguagens de ensinamentos, do trabalho em equipe, de

espírito crítico, iniciativa pessoal, criatividade na preparação das aulas e capacidade de conhecer e enfrentar desafios, considerando assim o perfil do novo professor.

2. Informática na Educação

O papel do educador, ao longo do tempo e no cenário educacional, passa constantemente por análises, críticas e reposicionamentos. Além disso, o docente, além de entender os conceitos das disciplinas que ministram, deve estudar sua história e mostrá-la como uma ciência.

O papel que o professor desempenha também é fortemente analisado: organizador, consultor, mediador, controlador, incentivador, formador de culturas que atendam às necessidades da sociedade na qual os alunos estão inseridos. Dentre as necessidades da sociedade atual destaca-se a necessidade de cada vez mais formar cidadãos com capacidade de criar e controlar o seu meio que exige cada vez mais conhecimentos e aptidões tecnológicas. Assim, não seria a escola o principal celeiro e reprodutor desses ensinamentos? Não é nesta instituição que esses ensinamentos deveriam emergir? Tais perguntas são contraditórias e emblemáticas à medida que se tem sim e não como respostas ao mesmo tempo.

A informática já é uma realidade inserida nas profissões existentes e fundamental para as que ainda existirão. Sendo assim, é papel da escola projetar o aluno para o futuro, estimulando-o a ter uma conduta proativa, sendo solucionador de problemas e um comunicador. E, por meio desta tendência tecnológica e do uso de softwares educacionais, o aluno poderá aprender com seus erros e trocar informações com os colegas, fazendo uso de recursos necessários e facilitadores de seus aprendizados (BRASIL, 1998).

Hoje, a utilização de computadores na Educação é muito mais diversificada, interessante e desafiadora, do que simplesmente a de transmitir informação ao aprendiz. O computador pode ser também utilizado para enriquecer ambientes de aprendizagem e auxiliar o aprendiz no processo de construção do seu conhecimento. (VALENTE, 2005).

Contudo, para fazer o uso da informática na educação, é preciso que haja um ambiente específico com todo equipamento necessário e capacitações constantes dos docentes,

pois segundo Sanmya Feitosa Tajra, (2008) “é importante que os professores tenham visões críticas sobre a sua utilidade e o que há por detrás dos avanços tecnológicos”.

Ainda, de acordo com Tajra, (2010), constantes pesquisas em escolas constataram inúmeras formas de utilização da informática como recurso didático no processo de ensino-aprendizagem, como por exemplo, os softwares educacionais que podem ser usados como um meio de complementar o conteúdo ministrado ou como projetos educacionais, abrangendo diversas áreas. Além disso, os softwares de simulações e de programação são excelentes recursos computacionais que permitem o aprimoramento das habilidades de lógica, matemática e de resolução de problemas.

Diversas escolas fazem uso dessa ferramenta conforme os interesses dos professores que buscam softwares que se encaixem ao seu plano de aula, sem interesse em transmitir um conhecimento mais específico a respeito da tecnologia. Muitas vezes os alunos já encontram os computadores ligados e com o aplicativo executado, de forma mecânica, sem antes guiá-los desde a iniciação da máquina, até a execução do programa.

A introdução da Informática na Educação, segundo a proposta de mudança pedagógica, como consta no programa brasileiro, exige uma formação bastante ampla e profunda dos educadores. Não se trata de criar condições para o professor simplesmente dominar o computador ou o software, mas, sim, auxiliá-lo a desenvolver conhecimento sobre o próprio conteúdo e sobre como o computador pode ser integrado no desenvolvimento desse conteúdo. Mais uma vez, a questão da formação do professor mostra-se de fundamental importância no processo de introdução da Informática na Educação, exigindo soluções inovadoras e novas abordagens que fundamentem os cursos de formação (VALENTE, 2005).
O professor deve adequar os softwares à sua aula, pois só a utilização deles não significa inserir a informática na educação e sim que esse tipo de aula pode ser mais tradicional do que se apresentada na lousa (VALENTE, 2005).

Aplicativos educacionais são ótimos meios de inovação na sala de aula, mas muitos deles, mesmo fazendo uso de diversas mídias, não estimulam o aluno, acabam tendo a mesma função de uma apostila comum. Para que se obtenha sucesso com sua utilização, é preciso despertar a curiosidade dos discentes, como os jogos eletrônicos.

O objetivo da inserção da informática na educação é a criação de aulas atrativas, que motive os alunos e que os envolvam em novas descobertas, uma maneira menos maçante para obter conhecimentos.

Os ambientes de informática proporcionam diversas vantagens aos alunos, como a confiança e autonomia nos seus trabalhos, desenvolvem a criatividade e concentração, aguça a curiosidade, melhora o trabalho em equipe e socialização, visto que um compartilha um conhecimento com outro sucessivamente e principalmente torna a aula mais prática e motivadora.

Em se tratando da Matemática, a tecnologia pode se tornar uma grande aliada a favor do seu ensino e aprendizado, visto que, pode proporcionar variadas situações de aprendizagem, de construção de conhecimentos e conceitos, verificação de hipóteses e de teoremas, verificação de resultados e conjecturas (ISOTANI, 2005).

3. Ensino infantil

Em 1996 o governo, atendendo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB – Lei 9.394/196), estabeleceu pela primeira vez na história do Brasil que a educação infantil é a parte fundamental para o desenvolvimento físico, psicológico, intelectual e social da criança. Considerando que é uma idade para brincar, estar envolvido com atividades educativas pode ser muito cedo, mas o referencial são as metas de qualidade que irá contribuir para que a criança possua um desenvolvimento integral de suas identidades e capazes de crescer como cidadãos.

A idade pré-escolar é fundamental para criança, seu cognitivo é preparado para diversas situações, contribuindo para o gosto de aprender, aguçando a criatividade e mostrando a importância da vida. O ensino na educação infantil é o período mais produtivo, pois prioriza uma formação humanista que preza a criação de um indivíduo crítico e capaz de tomar decisões.

O grande desafio do ensino básico é conhecer e compreender o jeito de cada criança ser, respeitando suas individualidades e diferenças. Isso auxiliará o educador a buscar meios mais próximos da realidade do aluno, melhorando a qualidade da transmissão de conhecimento. A função dessa etapa é proporcionar padrões de qualidade de vida ao aprendiz, desenvolvendo a concepção em contextos sociais, ambientais, culturais e mais profundamente nas interações e práticas sociais que contribuirá na construção de uma

identidade autônoma. Assim, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998):

> Educar significa proporcionar situações de cuidado, brincadeiras e aprendizagens orientadas que vai contribuir para o desenvolvimento das capacidades infantis de relação interpessoal, de ser e estar com os outros em uma atitude básica de aceitação, respeito e confiança, e o acesso pelas crianças aos conhecimentos mais amplos da realidade social e cultural (BRASIL, 1988, v. 1, p. 29).

O processo do cuidar é auxiliar a criança a se desenvolver como ser humano, ajudar e valorizar o desenvolvimento de suas capacidades, relacionar contextos socioculturais, concepção de desenvolvimento e aprendizagem infantil, educação e saúde.

A estimulação é um fator principal no processo de ensino-aprendizagem desse aluno e o professor precisa estar ciente de que por meio de jogos ou histórias, a criança revela todos os seus conhecimentos e experiências. Portanto, essas ferramentas precisam ter um objetivo didático, pois assim, a atividade torna-se uma fonte de conhecimento e não apenas uma brincadeira sem conteúdo.

> Espaço físico, materiais, brinquedos, instrumentos sonoros e mobiliários não devem ser vistos como elementos passivos ou fixos, mas como componentes ativos do processo educacional. Constituem-se em poderosos auxiliares no desenvolvimento infantil. A presença de jogos e brinquedos na educação desponta como um dos indicadores importantes para a definição das práticas educativas de qualidade em creches e pré-escolas. No entanto, a melhoria da ação educativa não depende exclusivamente da existência desses objetos, mas está condicionada ao uso que fazem deles os educadores junto às crianças com as quais trabalham. Os educadores preparam o ambiente para que a criança possa aprender de forma ativa na interação com outras crianças e com outros adultos e materiais. (BRASIL, 1998, v.1, p. 29).

4. O Geogebra e a educação infantil

Para sua tese de mestrado em Matemática Educacional e Ciência Computacional na Universidade de Salzburg na Áustria, Markus Haniwater desenvolveu um software de geometria dinâmica que se tornou um dos mais apreciados nos centros acadêmicos devido a sua praticidade, opção de se utilizar em diversas plataformas e pela acessibilidade, visto que é um programa totalmente gratuito. A continuidade de seu desenvolvimento acontece na Florida Atlantic University.

O nome “Geometria Dinâmica” (GD) hoje é largamente utilizado para especificar a Geometria implementada em computador, a qual permite que objetos sejam movidos

mantendo-se todos os vínculos estabelecidos inicialmente na construção. Este nome pode ser entendido como oposição à geometria tradicional de régua e compasso, que é "estática", pois após o aluno realizar uma construção, se ele desejar analisá-la com alguns dos objetos em outra disposição terá que construir um novo desenho. (ISOTANI, 2005).

Sua utilização dá-se de forma simples e fácil, por meios de cliques e das ferramentas básicas, é possível construir figuras geométricas e também, inserindo com o teclado, equações podem ser resolvidas rapidamente, assim como coordenadas, proporcionando uma melhor compreensão do aluno.

A interface do programa é prática e simples, sendo dividida em Ferramentas, apresentando todos os itens necessários para realizar uma atividade, Janela Algébrica, mostrando os valores, funções, objetos livres ou dependentes, entre outros e Janela de Visualização, aonde o conhecimento será desenvolvido e criado.

Seu reconhecimento proporcionou inúmeros prêmios na Europa e nos Estados Unidos da América. Por ser um software livre, colaboradores podem realizar modificações ou correções, através do código fonte, melhorando seu desempenho e aprimorando suas funções. Para uma maior globalização, o Geogebra pode ser encontrado em 45 idiomas diferentes e no site Geogebra Wiki encontra-se materiais desenvolvidos pelo aplicativo.

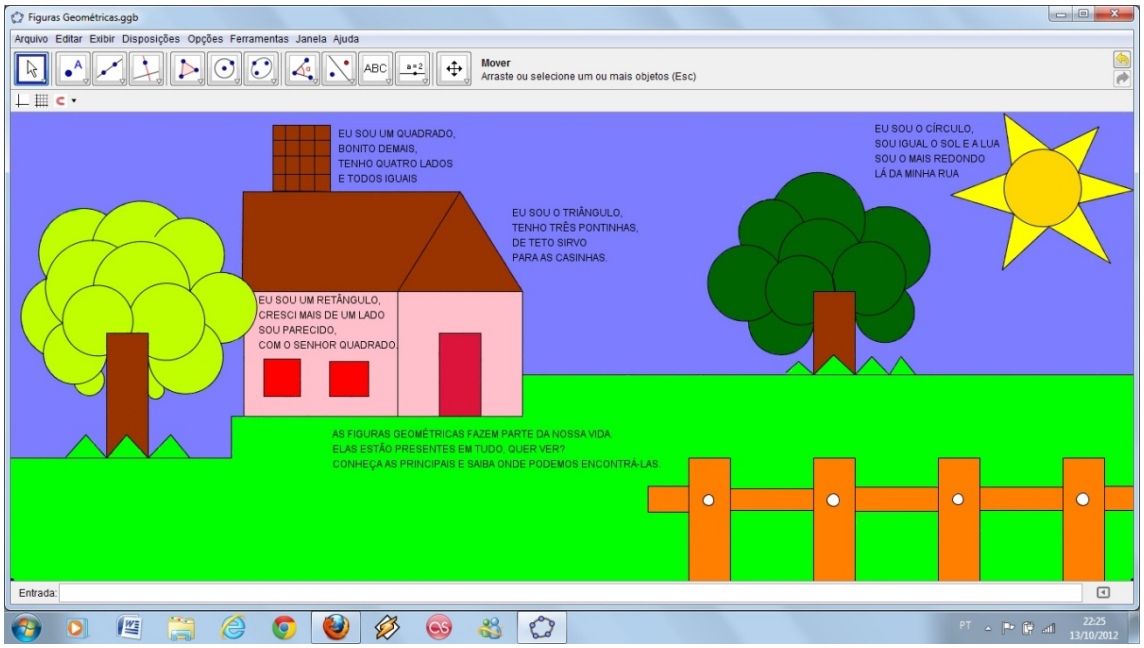


Figura 1. Atividade realizada com o Geogebra para o ensino fundamental.
Fonte: Autores

Focado na área educacional, o aplicativo objetiva ensinar e complementar os conhecimentos acerca da matemática nos vários níveis de ensino, do básico ao universitário, abordando conteúdos da geometria, álgebra, probabilidade, estatística, gráficos, matemática financeira e cálculos. E, o software que a princípio foi focado nos conteúdos do ensino superior e médio, agora oferece possibilidades também nos anos elementares, proporcionando novas descobertas e pesquisas a cerca dos seus ensinamentos.

5. Conclusões

Segundo Gravina e Santarosa (1998) o computador permite a criação de objetos concreto-abstratos. Concretos por serem manipulados na tela do monitor e abstratos por tratarem de realizações feitas por meio do pensamento. Tais ambientes informatizados são de grande potencial frente aos obstáculos ligados ao processo de aprendizagem. Portanto, a inserção do Geogebra no processo de ensino-aprendizagem de matemática é de grande valia, pois os alunos, inclusive no ensino infantil, podem ficar motivados e comprometidos com a resolução das atividades, compreendendo através da representação gráfica, o porquê da resposta.

6. Referências

- Brasil, Ministério da Educação. (2000). *Parâmetros curriculares nacionais (PCN). Matemática.* Rio de Janeiro: DP&A.
- Brasil, Ministério da Educação e do Desporto. (1998). *Referencial curricular nacional para a educação infantil.* Brasília: MEC/SEF.
- Gravina, M. A. Santarosa, L. M. (1998). A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. http://www.niee.ufrgs.br/eventos/RIBIE/1998/pdf/com_pos_dem/117.pdf Consultado 11/10/2012.
- Isotani, S. (2005). *Desenvolvimento de ferramentas no IGEON. Utilizando a geometría dinámica no ensino presencial e a distancia.* São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
- Tajra, S. F. (2008). *Informática na educação. Novas ferramentas pedagógicas para o profesor na atualidade*. São Paulo: Érica LTDA.
- Valente, J. A. (2005). *O computador na sociedade do conhecimento*. Brasília: Estação Palabra – USP.

GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA E O SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTAS PARA O ESTUDO DE REGIÕES POLIGONAIS E ÁREAS

Mariana Moran Barroso - Sirlene Passamani Sandri - Valdeni Soliani Franco
marianamoranbar@gmail.com - sandrisirlene@seed.pr.gov.br - vsfranco@uem.br
Universidade Estadual do Paraná/FECILCAM - Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná - Universidade Estadual de Maringá - Brasil

Modalidade: Comunicação
Nivel educativo: Médio
Palavras chave: Educação Matemática, Geometria Euclidiana Plana, Regiões Planas, Fórmula de Pick.

Resumo
Este artigo aborda o uso do Software GeoGebra para o ensino de alguns tópicos da Geometria Euclidiana Plana na Educação Básica. Nessa pesquisa observou-se que, o uso adequado desse recurso é um aliado para conduzir o ensino da Geometria, em particular, o estudo de áreas de regiões planas por meio da Fórmula de Pick. A implementação didático-pedagógica desenvolveu-se com alunos da oitava série/nono ano e professores da rede pública de ensino do Estado do Paraná - Brasil. A utilização do software possibilitou ao professor ensinar o conteúdo com clareza, e ao aluno a aprendizagem por investigação. Tanto os alunos quanto os professores demonstraram bastante interesse pelas atividades desenvolvidas com o software, entendendo seu funcionamento para aplicá-lo na resolução das atividades e na verificação de resultados da Geometria Euclidiana Plana.

1 INTRODUÇÃO

O ensino com o uso das tecnologias digitais no ambiente escolar é uma linha de trabalho que precisa se fortalecer, na medida em que há uma distância evidente entre os avanços tecnológicos na produção de softwares educacionais e a aceitação, compreensão e utilização desses recursos nas aulas pelos professores.

Diante deste fato, a problemática deste trabalho é: Como utilizar o Software GeoGebra para ensinar Geometria Plana, de modo a contemplar o aprendizado significativo de conceitos e propriedades? O ensino da Geometria Plana na Escola Pública do Estado do Paraná tem sido conduzido de forma efetiva possibilitando ao aluno uma interação significativa com o meio em que vive?

Levando-se em conta a inserção das tecnologias no cenário educacional, desenvolveu-se no Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE o tema “Geometria Euclidiana Plana e o Software GeoGebra como ferramentas para o estudo de regiões poligonais e áreas”.

O *Software* GeoGebra, que está disponível nos Laboratórios de Informática das Escolas Públicas do Estado do Paraná, pode propiciar, por meio de suas ferramentas, a criação

de cenários para atividades investigativas nos quais o aluno verifica propriedades de uma figura em um processo muito rápido.

O conhecimento básico da geometria é um instrumento que permite a percepção e a visualização do espaço, bem como desenvolve habilidades em outras áreas do conhecimento.

Durante um trabalho com os alunos da oitava série/nono ano, em uma cidade ao noroeste do Paraná, foi oportunizada a utilização do *software* GeoGebra. Por meio da Fórmula de Pick foram feitas aplicações no cálculo de áreas de regiões poligonais com vértices sobre os pontos de intersecção da malha do Software GeoGebra.

Sendo assim, o presente trabalho teve como intuito discutir a respeito do ensino de Matemática, especificamente na área da Geometria Euclidiana Plana no âmbito da Informática.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Um dos grandes desafios na educação é a busca de opções que venham a contribuir na superação das dificuldades encontradas por professores e alunos no ensino e na aprendizagem da Matemática.

O Ensino desta disciplina, desde o seu surgimento até os dias atuais, passa por diferentes fases de desenvolvimento cada uma marcada pelas influências do contexto social de cada época.

No contexto atual vê-se que muitas são as contribuições que a informática pode trazer para a Educação Matemática. De acordo com PENTEADO (2000, p.31), ela é um "germe para práticas educacionais tais como a modelagem matemática, resolução de problemas e trabalhos de projetos que tem sido altamente valorizado nas propostas de Matemática". No entanto, devemos pensar nas formas de introduzi-la na prática de sala de aula de Matemática, bem como na formação do professor para sua utilização.

Nos computadores dos laboratórios de informática das Escolas Públicas do Estado do Paraná está instalado o software GeoGebra, que é gratuito, tem premiações internacionais pela sua contribuição no estudo da matemática e é apresentado na versão em português.

O GeoGebra é uma ferramenta que pode ser utilizada para o ensino da Geometria. Entretanto a proposta deste trabalho é levar o aluno à descoberta da Geometria Euclidiana dando ênfase as regiões poligonais e áreas, tendo como ferramenta auxiliar o

software GeoGebra.

O GeoGebra foi desenvolvido pelo austríaco prof. Dr. Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg, em 2001, e destina-se ao ensino de Geometria, Álgebra e Cálculo em ambientes de sala de aula. Ele possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica, isto é, suas construções podem ser modificadas sem a perda dos vínculos geométricos. Tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

Por meio da construção interativa de "figuras" e "objetos", pode-se tentar melhorar a compreensão dos alunos por meio da visualização, percepção dinâmica de propriedade, estímulo heurístico à descoberta e obtenção de conclusões "validadas" durante a experimentação.

2.1 CONHECENDO A FÓRMULA DE PICK

O cálculo de áreas de figuras planas nem sempre é uma tarefa fácil, pela variedade de formas, que podem assumir. Muitas vezes recorremos a processos de dissecção do polígono ou de subtração de áreas. Esse processo muitas vezes é moroso e trabalhoso. Nesse caso temos o Teorema de Pick, que pode ser utilizado para dar uma aproximação da área de uma figura plana não necessariamente poligonal.

A Fórmula de Pick foi desenvolvida em 1899 por Georg Alexander Pick (1859-1942) é um teorema do final do século IXX e fornece um critério interessante para o cálculo de áreas de polígonos cujos vértices são pontos de uma malha, por meio da contagem do número de seus pontos de fronteira e do número de seus pontos interiores. Para compreender o Teorema é preciso estabelecer alguns conceitos: Cada ponto de interseção de retas da malha é chamado de nó e cada pequeno quadrado é chamado célula e cada célula possui uma unidade de área, conforme Figura 1, a seguir.

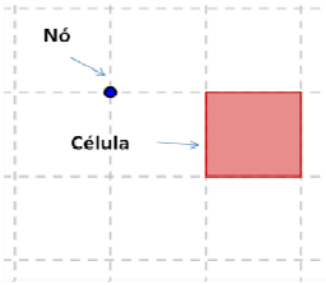


Figura 1: Malha com nó e célula

Dado um polígono com vértices sobre os nós de uma malha, a fórmula de Pick nos fornece a área do polígono, sabendo apenas quantos são os nós da malha sobre o bordo do polígono, *b*, e quantos são os nós da malha interiores ao polígono, *i*. Mais exatamente, a sua área *A* é dada por: $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

Teorema (Pick): Seja S a reunião finita de regiões poligonais com vértices sobre os nós de uma malha. Se *v* denota o número total de nós da malha em S e, e_b é o número de lados do bordo de S (aqui consideramos que dois nós consecutivos do bordo formam um lado), então a área de S é dada por $A = v + \frac{e_b}{2} - x$, em que $x = 1 - m$ é a característica de Euler de S e *m* é o número de buracos de S.

Utilizando a malha do software GeoGebra, podemos demonstrar este teorema de Pick como mais uma maneira de se calcular a região poligonal, como o exemplo representado na Figura 2, a seguir:

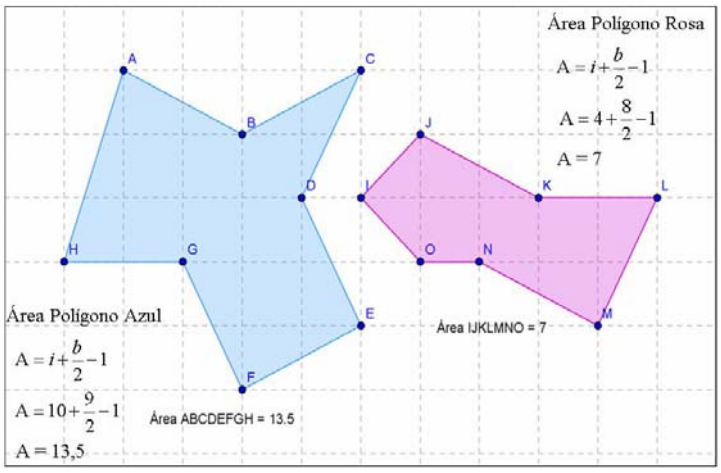


Figura 2: Polígonos

3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

A implementação da Produção Didático-Pedagógica produzida obedeceu a uma formatação para 32 horas a qual foi dirigida aos alunos da 8º Série ou 9º Ano de uma Escola Estadual do Paraná.

O trabalho foi desenvolvido por meio de uma sequência de atividades usando metodologias como os computadores da Sala de Informática –*Software* GeoGebra, aula expositiva e dialogada e apresentação de *slides* TV – Multimídia, possibilitando ao

professor demonstrar o conteúdo com clareza, e ao aluno a aprendizagem por descoberta. No inicio foram pontuados os conteúdos que seriam desenvolvidos: a História da Geometria Euclidiana Plana; como usar as ferramentas do Software GeoGebra, tudo isso a fim que o aluno possa ter subsídios necessários para tratar com propriedade o material trabalhado.

Após esse primeiro contato se propôs a representação de um polígono regular, com o número de lados definidos pelos alunos, obtendo as medidas do comprimento de todos os lados do polígono, bem como o perímetro e área do mesmo. Não houve aqui grandes dificuldades, as construções geométricas representadas puderam ser investigadas, resgatando os conceitos por eles já adquiridos.

Foram propostas aos alunos outras três atividades as quais gradativamente foram aumentando o grau de dificuldade. Durante e após a execução da atividade iniciava-se uma discussão a respeito das observações que eles faziam levando-os a uma revisão de algumas definições e axiomas a respeito do assunto exposto.

Em sequência foi apresentada aos alunos a Fórmula de Pick. Foi disponibilizado no compartilhamento público, imagens de alguns terrenos situados no município da escola da aplicação, a qual foi captada do Google Earth, onde puderam determinar um valor aproximado da área desses terrenos, conforme figuras a seguir.

Figura 3: Terreno, Município de Tapira-PR
Fonte: Google Earth

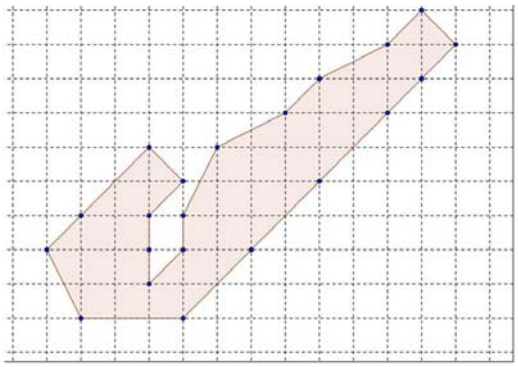


Figura 4: Aproximação do formato do terreno por um polígono na malha

Escala da malha *(célula)*	***Área da malha*** *(célula)*	***Área do terreno (m²)***	***Área (alqueires)***
x = 150,5 m	$A = (150,5)^2$ $A = 22\,650,25\ m^2$	A = 33,5 x 22 650,25 $A = 758\,783,37\ m^2$	$758\,783,37\ m^2 : 24\,200\ m^2$ Temos aproximadamente 31,35 alqueires de terra

A partir da escala que foi captada por meio da imagem do terreno, determinou-se o tamanho da célula (malha) no GeoGebra, bem com a área da célula e do terreno. Como na região a unidade agrária usada é o "alqueire", foi proposto aos alunos que fizessem o cálculo de quantos alqueires tinham aproximadamente cada terreno apresentado.

Ao termino da implementação, o material produzido foi exposto pelos alunos à comunidade escolar, onde puderam relatar sobre o uso do Software GeoGebra nas investigações geométricas.

Esse recurso tecnológico levou os alunos a compreenderem suas construções geométricas assegurando-lhes os conhecimentos já adquiridos em sala de aula e promovendo novas descobertas.

Nesse período ocorreu também a socialização da produção com os professores da Rede Estadual de Ensino através do Grupo de Trabalho em Rede-GTR, que é uma das atividades obrigatórias do PDE, prevista no Plano Integrado de Formação Continuada do Programa, na modalidade Educação a Distância-EaD.

Os professores participantes do GTR, tiveram acesso ao Projeto de Intervenção Pedagógica, Produção Didático-Pedagógica e Ações de Implementação, através de Fórum e Diário puderam relatar suas opiniões e sugestões quanto ao material:

- O grande número de alunos na turma e geralmente os laboratórios estão em espaços pequenos o que gera certo desconforto.
- Falta de um técnico no laboratório para que possa nos ajudar quando surge algum imprevisto.
- Os recursos tecnológicos são ainda bem pouco utilizados, na maioria das vezes

pela nossa própria falta de conhecimento em trabalhar com esses recursos que temos em nossas escolas.

- As atividades propostas precisam estar bem explícitas, pois os alunos esbarram no problema da própria leitura e interpretação.
- As atividades propostas com a fórmula de Pick, que eu também não conhecia, são muito interessantes. É uma fórmula simples de ser aplicada. O aluno tem a possibilidade de verificar sua exatidão usando o cálculo de área do próprio GeoGebra.
- Outro ponto positivo foi o trabalho com medidas agrárias e sua conversão. A partir do exemplo de suas atividades, que são da sua região, nós, professores, poderemos elaborar outras, utilizando dados aqui de nossa cidade.
- A utilização da fórmula de Pick é uma dessas ferramentas que devido à facilidade de visualização do problema com a utilização das ferramentas matemáticas, no caso, o *software* GeoGebra, permite que se façam cálculos de áreas reais e não apenas dos modelos apresentados nos manuais didáticos.
- Situações com abordagens reais permitem valorizar e ampliar o conhecimento prévio dos alunos, contribuindo para uma melhor aprendizagem não apenas da matemática, mas também de outros assuntos relacionados.

Apesar das dificuldades apontadas, muitas sugestões e críticas positivas foram dadas em todos os pontos do projeto e durante sua implementação com objetivo de enriquecê-lo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante as atividades desenvolvidas no *Software* GeoGebra para o cálculo de regiões poligonais com o uso da Fórmula de Pick por meio de imagens obtidas de terrenos da região captadas do Google Earth, evidenciou-se o quanto para os alunos e professores participantes do Grupo de Trabalho em Rede – GTR foi importante e inovador trabalhar com essa fórmula e com o software, pois a mesma, com o auxílio do GeoGebra, permite que se façam cálculos de áreas reais e não apenas dos modelos apresentados nos manuais didáticos.

O objetivo do referido projeto foi desenvolver atividades que englobassem a tecnologia e o dia a dia dos alunos. Acredita-se que os objetivos foram alcançados, pois possibilitou a aprendizagem e permitiu que houvesse uma ampliação na visão de

mundo.

Muitas sugestões e críticas positivas foram dadas no decorrer da aplicação das atividades aos alunos, e durante a socialização com os professores do Grupo de Trabalho em Rede – GTR, essas serviram para rever alguns itens e alterar alguns tópicos, deixando assim o projeto mais explicativo e acessível.

Foi possível destacar também o envolvimento, o capricho e a seriedade na realização das atividades como um ponto relevante desse projeto. Essa experiência educacional poderá ajudar muitos professores a planejar suas ações e terem novas práticas pedagógicas relacionadas à temática proposta.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Doherty. Grandezas e Medidas: encaminhamentos Metodológicos para as séries iniciais do Ensino Fundamental. Maringá: EDUEM, p.104-106, 2005.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G.– Informática e Educação Matemática, Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

GEOGEBRA. Disponível em: <www.geogebra.org> acesso em 20 mar.2011.

GOOGLE EARTH. Disponível em: <http://www.google.com/intl/pt-BR/earth/download/ge/agree.html>. Acesso em: 07 jun. 2011.

GERÔNIMO, João R.; BARROS, Rui M.O.; FRANCO, Valdeni S. Geometria Euclidiana Plana: Um estudo com o Software GeoGebra. Maringá: EDUEM, 2010.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? In: Educação Matemática em Revista – SBEM 4, 1995, p. 3 – 13.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do. Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática. Departamento de Educação Básica. Curitiba, 2008.

PROJETOS PEDAGÓGICOS, Disponível em: <http://www.projetospedagogicosdinamicos.com/artigo1.htm>. Acesso em 27 mai. 2012.

O GEOGEBRA E O ENSINO DA FÍSICA: APRENDER A APRENDER

Rosemeiry de Castro Prado Maximiano – Marcelo Silveira - Eunice Corrêa Sanches Belloti - Marcela Penteado Rossini – Valéria Cristina Leite Baccili - André Luis Orlandi
rosecprado@zipmail.com.br - msilver1974@hotmail.com - eunicebelloti@gmail.com-
marcelapenteado@yahoo.com.br - valbaccili@uol.com.br -
andre.orlandi@fatec.sp.gov.br
FATEC-Ourinhos, São Paulo-Brasil

Modalidade: CB, C, T.
Nivel educativo: Medio (11 a 17Anos)
Palavra-chave: Ferramenta, Tecnologia, GeoGebra, Física.

Resumo
O uso de instrumentos interativos e sua mediação são cada vez mais estudados pelos especialistas e pesquisadores da Educação. Ferramentas como computadores, softwares, jogos digitais, alcançaram papel importante no processo ensino-aprendizagem. Questionamentos, conjecturas, trabalhos, apontam para a interatividade e possibilidade de verificações por meio desses recursos, auxiliarem tarefas em sala de aula, amenizando dificuldades no processo de aquisição de conhecimentos científicos, simulando ambientes reais, levando a análises, constatações, argumentações, possibilitando a realização de tarefas, construindo gráficos, explorando fórmulas complexas, proporcionando capacidade de analisar e concluir mediante relação direta com o objeto estudado. Levantam-se questões acerca do papel do professor como mediador desses instrumentos, percebe-se a responsabilidade da adequação da disciplina com ferramentas utilizadas para construir situações de aprendizagem. O emprego de instrumentos na sala de aula é importante, visto que suas contribuições estão relacionadas com atividades criadas para ensino de disciplinas como a Física. Esses conteúdos digitais podem ser acessados de qualquer lugar, fornecendo uma escola virtual de tempo integral. Destarte, este estudo tem como objetivo apresentar por meio de uma ferramenta - GeoGebra – uma atividade de Física que pode ser utilizada no ensino-aprendizagem de conteúdos. Espera-se com tal metodologia, traçar caminhos que levem à construção do saber ensinado.

Abstract
The use of interactive instruments and their mediation are increasingly studied by Education experts and researchers. Tools like computers, software, digital games, reached important role in the teaching-learning process. Questionings, conjectures, works, pointed to the possibility of interactivity and verifications through these resources, assist in classroom tasks, minimizing difficulties in the process of acquiring scientific knowledge, simulating real environments, leading to analysis, findings, arguments, allowing the achievement of tasks, constructing graphics, exploring complex formulas, providing the ability to analyze and conclude by the direct relationship with the studied object. There are questions about the role of the teacher as a mediator of these instruments, it is realized the responsibility of the adequacy of the discipline with tools used to construct learning situations. The use of instruments in the classroom is important, since their contributions are related to activities designed for teaching subjects like Physics. These digital contents can be accessed from anywhere, providing a virtual school full time. Thus, this study aims to present by means of a tool -

GeoGebra - an activity that physics can be used in the teaching-learning of contents. It is hoped with such methodology, trace paths that lead to the construction of the taught knowledge.

1- Tecnologia e a Educação: pensamentos e análises diversas

A presença de máquinas computadorizadas em diversos locais possibilitando diferentes ações humanas é uma realidade inevitável. Os computadores estão presentes hoje em dia, nas indústrias, no comércio, na medicina, nos esportes, nos lares e cada vez vem crescendo sua utilização nas salas de aulas, aonde seu principal objetivo vai além de transformar dados em informações. Essa realidade aponta para o fato de que o que era uma novidade em tempos passados, hoje se tornou uma ferramenta comum e imprescindível. Segundo (Cox, 2003) a presença da informática no cotidiano desafia os homens a voltar à exploração dos instrumentos computacionais, assim como os elementos naturais que despertavam o interesse do "homem das Cavernas".

> Em relação com o meio, a primeira providência do homem foi garantir a sua sobrevivência. Ensaiando os primeiros passos na infância da humanidade, busca nos recursos naturais o que possa assegurar a manutenção da vida. (Cox, 2003, p.12).

Segundo (Tajra, 2008), a escola também participa das alterações tecnológicas, considerando de uma forma mais lenta e, há séculos, o seu ensino foi destinado apenas para a minoria. A primeira grande conquista tecnológica foi o livro que vem sendo o carro chefe tecnológico na Educação. A tecnologia educacional era caracterizada pela possibilidade de utilizar instrumentos que sempre visavam o raciocínio dos recursos humanos e, de forma mais ampla, a prática educativa.

Na Educação, ainda são muitos os defensores de que a informática não agrega nenhum valor às questões pertinentes à construção de conhecimentos, questionado se os computadores devem ou não ser inseridos no contexto escolar. Outros adotam a postura do senso comum tratando os computadores como instrumentos que irão salvaguardar a educação. Além disso, existem aqueles que acreditam que a utilização da tecnologia em salas de aulas mecaniza os alunos, dispensa os professores e desvirtua os efeitos do processo de ensino e aprendizagem dos saberes.

O fato é que tais questões vão além de conjecturas e assumem muitas controvérsias e complexidades. Para Cox (2003), o papel da escola é capacitar o indivíduo para a vida, ou seja, para os acontecimentos futuros. A proposta de ensino da informática, em relação ao uso da informática no ensino, a inserção da informática educativa, considera que ensinar junto à computação é tornar o educador apto a operar determinados

softwares de ensino. Para que o uso de computadores possa ser usado nas ações educacionais, todo corpo docente precisa ser capacitado, além disso, laboratórios de informáticas precisam disponibilizar horários e ter recursos para o trabalho de diversas disciplinas, não mais para uma disciplina específica (Cox, 2003).

Além disso, a interação da informática no âmbito escolar perpassa por questões abrangentes, visto que, é na escola o local em que se espera preparar os seres humanos para a sobrevivência, para viver e trabalhar dignamente, tomar decisões fundamentadas e estar adaptados a aprender continuamente para atender os anseios da sociedade na qual os indivíduos estão inseridos. E, nessa sociedade atual, não há mais como ignorar a necessidade de aprender e utilizar as tecnologias da informação.

2- O ensino da Física e o GeoGebra

A busca por alternativas que visam aumentar a motivação da aprendizagem dos alunos bem como facilitar o processo do seu desenvolvimento cognitivo, ainda está em vias de crescimento e de conhecimento. No ensino da Física, o uso de instrumentos interativos a fim de mediar a relação sujeito-objeto, tem sido bastante explorado; mas entender como e quando é possível usar essas ferramentas em um contexto interdisciplinar se torna uma questão que deve ser analisada, propondo justificativas embasadas em pesquisas já realizadas e práticas metodológicas inovadoras.

Mas, será que de fato, os instrumentos interativos podem contribuir no processo de aprendizado e desenvolvimento do indivíduo, destacando a importância da Física na construção da cidadania junto a um aprendizado interdisciplinar e que possibilita a interação do sujeito e do objeto de estudo?

Por que utilizar instrumentos no processo de ensino? Quais instrumentos devem ser utilizados em determinado contexto? Como utilizá-los? Questões como estas são de grande complexidade a todos os envolvidos com a educação. É o caso dos instrumentos e suas características, que existem no meio educacional e que deveriam ser dominados pelos professores, mas que muitas vezes são ignorados e temidos talvez pelo comodismo, desconhecimento ou falta de qualificação para dominá-los. No processo de ensino:

> Os instrumentos são elementos interpostos entre o trabalhador e o objeto de seu trabalho, ampliando as possibilidades de transformação da natureza. São feitos especialmente para atingir uma finalidade e certo objetivo. O triturador elétrico, por exemplo, corta mais e melhor que a mão humana, carregando consigo a função para a qual foi criado e o modo de utilização desenvolvido

> durante a história do trabalho coletivo; é um objeto social e mediador da relação entre o indivíduo e o mundo. (Prado, 2004, p. 116).

Percebe-se, então, que os instrumentos são elementos que auxiliam nas atividades humanas a fim de dar praticidade ao realizar uma determinada tarefa. Referente a este conceito pode-se acrescentar também a capacidade de obter conhecimento por meio da utilização dos mesmos, pois quanto mais utilizamos as ferramentas, mais nos aproximamos dos objetos de estudo e exploração.

O mesmo ocorre com vários outros instrumentos que, por décadas, pesquisadores os desenvolveram e analisaram a fim de maximizar suas facilidades na realização de tarefas complexas ou pesadas, de uso manual ou intelectual.

Tendo em vista que os instrumentos são usados para tornar simples as atividades humanas, aproximar e efetivar conhecimentos pode-se dizer que computadores, calculadoras, réguas, jogos, softwares ou outros objetos têm a capacidade de ajudar e levar à apreensão de conceitos e do aprendizado, como os da Física por meio de aplicativos como o GeoGebra[1].

A Física, da qual nos referimos, envolve exemplos dos mais básicos aos mais avançados, ou seja, independe da sua complexidade para que se possa fazer uso de instrumentos auxiliadores nos diversos assuntos tratados e, com grau de complexidade distinto podem ser aplicados em qualquer nível de ensino desde que compreendidos como mediadores da aprendizagem.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio Brasil, PCNEM (1996), perpassa pelo ensino da Física questões que tratam da construção de uma visão voltada para a formação de um cidadão contemporâneo, atuante e solidário, com instrumentos para compreender, intervir e participar na realidade e do mundo em que vive. A Física deve apresentar-se, portanto, como um conjunto de competências específicas que permitam perceber e lidar com os fenômenos naturais e tecnológicos, presentes tanto no cotidiano mais imediato quanto na compreensão do universo distante, a partir de

[1] Criado por Markus Haniwater, para sua tese de mestrado em Matemática Educacional e Ciência Computacional na Universidade de Salzburg na Áustria, o Geogebra foi se desenvolvendo e se transformando em um dos softwares mais amplamente divulgados nas comunidades acadêmicas devido a sua simplicidade, por ser multiplataforma, dinâmico e totalmente gratuito. É um aplicativo gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas e cálculo em um único sistema.

princípios, leis e modelos próprios da Física, como gráficos e tabelas diversas, além de investigações e resolução de problemas variados.

Podemos perceber que aprender os conceitos da Física é mais do que uma obrigação imposta, é uma etapa do crescimento humano e, proporcionar uma variedade de situações que levem à aprendizagem da mesma, de forma a contribuir qualitativamente no ensino é papel fundamental do docente que ministra suas aulas. Por meio de instrumentos como computadores ou softwares (e aqui se encaixa o GeoGebra) o docente de tal disciplina pode vislumbrar caminhos diferentes para chegar num mesmo fim: o aprendizado concreto e com significado do seu conteúdo!.

É importante salientar que o auxílio de um mediador no processo ensino-aprendizagem nunca deve ser descartado, visto que nenhuma máquina conseguirá substituir um bom professor, ou a própria capacidade de aprendizado criativo do aluno. Mas como dito por Azevedo *et al.* (2005), o volume de carência no ensino é grande, seja por uma distância da escola, greves e paralisações, ou também ora parte de alguns professores que insistem manter o modelo arraigado á sua formação inicial e do passado, repetindo o que disseram pra ele, reproduzindo metodologias que levam o aluno a mostrar-se desinteressado mediante um determinado aprendizado específico ou mesmo a questões e situações sociais na qual está inserido.

Para estas e outras situações o uso do GeoGebra pode ser um bom aliado, visto que o conteúdo a partir dele é acessível em qualquer lugar, há um respeito quanto ao ritmo do aluno e pode despertar interesses pelas tecnologias que estão a sua volta.

Ainda segundo Azevedo *et al.* (2005), uma pesquisa feita pela revista *Trainning Magazine*, em outubro de 2002, mostra que o ser humano consegue se lembrar de 15% do que escuta, 25% do que vê e mais de 60% do que interage, percentuais que deixam claro o poder do uso de ferramentas que proporcionem a reciprocidade com o aluno no aprendizado.

Logo, não basta mais para as instituições de ensino seguir um modelo fabril, ou seja, tecnicista, mas sim um modelo tecnológico e interdisciplinar que com a ajuda de ferramentas e *softwares* educativos, maximizam a geração do saber estudantil.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio do Brasil, em uma de suas considerações sobre o aprendizado da Física salienta que ele transcende o espaço escolar e vai muito além das paredes desta Instituição.

> Passar a tratar a Física como parte da cultura contemporânea abre, sem dúvida, uma interface muito expressiva do conhecimento em Física com a vida social, seja através da visita a museus, planetários, exposições, centros de ciência, seja

> por meio de um olhar mais atento a produções literárias, peças de teatro, letras de música e performances musicais. Cada vez mais elementos do mundo científico, sua linguagem e principalmente a visão de mundo que o traduz estão presentes num amplo conjunto de manifestações sociais. Da mesma forma, as questões relativas ao desenvolvimento tecnológico e ao desenvolvimento econômico, em diferentes níveis, acompanham o dia-a-dia da vida contemporânea e freqüentemente podem ser analisadas na perspectiva do conhecimento científico (PCNEM, 1996, p. 85).

Observa-se a importância das interações, dos significados, das contextualizações, dos sentidos de mundo e de aprendizados para que se possa realmente atingir objetivos que vão além da aquisição de conceitos científicos. O ato de ensinar já não está mais centrado num único sujeito, apesar de depender e passar por ele. A questão é como fazer adaptações e mudanças que concorram com as aspirações do mundo contemporâneo? Certamente competências serão exigidas; estratégias e de aprendizagem deveram ser repensadas e promovidas para atingir os conhecimentos científicos necessários a transformações sociais.

3- O GeoGebra e uma atividade de Física: um caminho diferente e desafiador do aprendizado

Com o propósito de apresentar uma atividade que envolvesse conceitos da Física, pensou-se em elaborar por meio do GeoGebra (2012) uma situação-problema, ganhando também um novo sentido, indo além do campo algébrico e podendo explorar o visual por meio da geometria dinâmica.

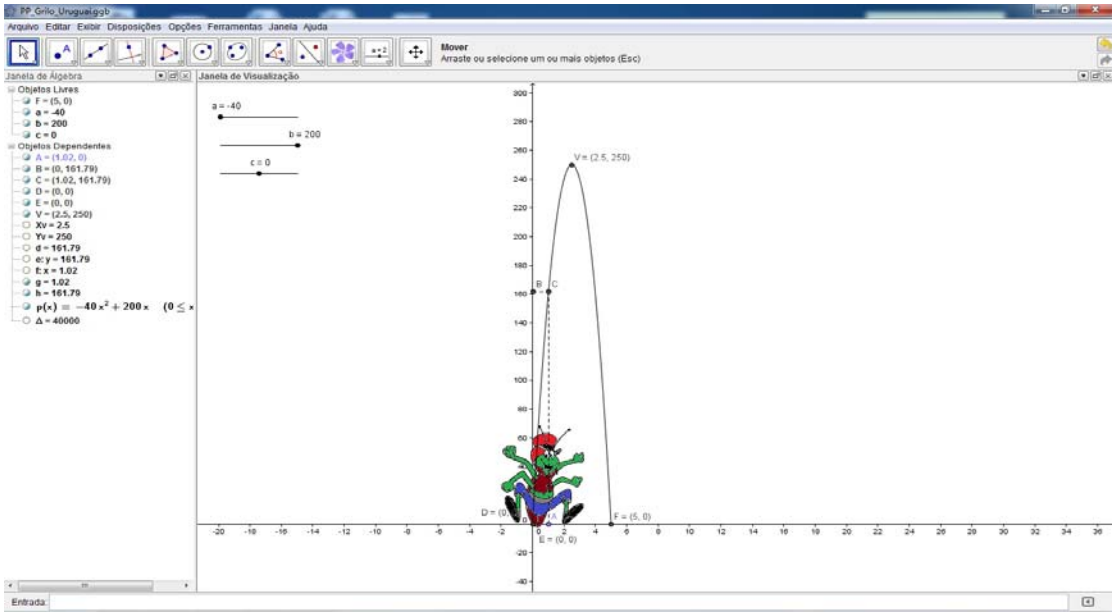


Figura1. Exploração de conteúdo de Física no GeoGebra.

Fonte: Autores (2012)

Mudar uma sociedade inteira é praticamente impossível. Contudo, atender aos anseios e tentar se encaixar nas exigências impostas por ela é fator fundamental para que se possa intervir e modificá-la. Sendo a escola o local onde os saberes espontâneos são integrados aos saberes científicos, compete a esta instituição capacitar e formar os sujeitos que irão atuar nesse meio. E, teoricamente, cabe aos profissionais da área da Educação mediar todo o conhecimento imposto pelos programas oficiais. Mas qual a melhor caminho que se pode seguir para efetivamente se chegar à apreensão de conceitos e conteúdos dos diversos saberes? Neste sentido, Gaiofatto (2000), aponta para a valorização da contextualização dos ensinamentos, visto que:

> Há necessidade de situar os aspectos estudados dentro de seu contexto adequado, a fim de aprofundar e expandir possíveis explicações e interpretações; a importância de expansão da variedade de leituras, quanto à Educação e outros aspectos e dimensões da sociedade (Gaiofatto, 2000, p. 264).

Existem elementos norteadores que interferem nas metodologias e práticas pedagógicas e, o quê se sabe e é fato, é que a tecnologia não pode mais ser ignorada no âmbito escolar. É ela uma forte aliada dos ensinamentos e construção de conhecimentos. Então, existe uma técnica de ensino de Física que seja interessante para uma maioria de jovens alunos da sociedade atual? A julgar pelas necessidades atuais, a tecnologia e suas ferramentas podem se voltar para ajudar a tornar as aulas mais interessantes e significativas. É neste sentido que o software Geogebra pode vir a ser um facilitador dos ensinamentos da Física e de outras disciplinas oficias. Cabe ao professor, preparar e conduzir suas aulas de modo a agregar conhecimento por meio da utilização de aplicativos educacionais.

Referências

- Azevedo *et al.*, Eduardo. *Desenvolvimento de jogos 3D e aplicações em realidade virtual*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.
- Brasil. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**:** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1996
- Cox, Kenia Kodel; *Informática na educação escolar*: Polemicas do nosso tempo. Campinas: Autores Associados, 2003.
- Gaioffato, N. *História e História da Educação: O debate Teórico-Metodológico atual*. Educação & Sociedade. Campinas, v.21, n.73, p. 262-266. Dez.2000.

- Geogebra. Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms>. Acesso em: 01 de outubro de 2012.

- Prado, Rosemeiry de Castro. *O Comportamento Humano e o Desenvolvimento da Aprendizagem Mediante o Uso dos Instrumentos*. ENCONTROS: Estudos Acadêmicos. n.5, p.114-120, 2004.

- Tajra, Sanmya Feitosa; *Informática na educação*. São Paulo: Editora Érica, 2008.

O GEOGEBRA NO ESTÁGIO SUPERVISIONADO: INSTRUMENTO PARA DISCUTIR COMPETÊNCIAS E HABILIDADES EM MATEMÁTICA

Cibelle de Fátima Castro de Assis
cibelle@dce.ufpb.br
Universidade Federal da Paraíba - Brasil

Modalidade: Comunicação
Nivel educativo: Formação e atualização docente
Palavras chave: Geogebra – Estágio supervisionado – Função do 1º grau – Ensino Médio

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma experiência de aula onde utilizamos o Geogebra na discussão sobre Competências e Habilidades relativas ao conteúdo Função do 1º Grau. O referencial teórico foi construído a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000) e da Matriz de Referência do SAEB (2011). A discussão ocorreu no Fórum da disciplina Estágio Supervisonado III do curso de Licenciatura em Matemática a distância da UFPB no Ambiente Virtual Moodle. A partir da atividade "Simulando um carro", propomos que os alunos identificassem na atividade as competências e habilidades segundo os PCN+(BRASIL, 2002); que criassem, a partir da construção, problemas matemáticos tomando os descritores do SAEB como referência e discutimos a proposta dos documentos de referência nacional sobre o uso de tecnologias no Ensino Médio sob o ponto de vista das contribuições do GeoGebra na realização da atividade. Como resultado da discussão, percebemos o quanto é necessário o debate sobre as potencialidades do GeoGebra e a integração das tecnologias ao currículo escolar para o desenvolvimento das competências e habilidades em matemática durante um curso de formação de professores.

Introdução

No contexto da disciplina Estágio Supervisionado III do curso de Licenciatura em Matemática a distância da Universidade Federal da Paraíba, Brasil, os principais documentos de orientação curricular nacional para o Ensino Médio brasileiro são apresentados e discutidos. Entre eles temos os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2002), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ (BRASIL, 2002), bem como os sistemas referenciais de avaliação, em particular os descritores da Matriz do Sistema de Avaliação da Educação Básica – Saeb (BRASIL,2011).

Esses documentos, no geral, trazem as "Competências e Habilidades" em Matemática que devem ser observadas nos alunos deste nível escolar e juntamente com estes requisitos há o estímulo ao trabalho docente integrando as tecnologias.
Segundo os PCN+ (BRASIL, 2002), aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de Competências e Habilidades que são essencialmente formadoras à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas argumetando, analisando, avaliando, tirando conclusões próprias, tomando decisões, generalizando e para muitas outras ações necessarias à sua formação.

Nesse propósito, é durante a formação acadêmica inicialmente, seguida das atulizações constantes que o professor de Matemática se prepara para sua profissão. Acreditamos que as disciplinas de Estágio Supervisionado desempenham um papel importante neste processo.

Em se tratando do conteúdo matemático Função polinomial do 1º grau, enquanto professores da Educação Matemática, promovemos uma discussão pontual no sentido de favorecer a compreensão das habilidades citadas nos documentos referenciais de forma integrada ao uso do software Geogebra. Em nossa última experiência utilizamos a atividade construída no GeoGebra "Simulando um carro" e no Fórum Semanal do Moodle, organizamos a dinâmica em três Tópicos de Discussão. Neste artigo deixamos registradas a nossa experiência e as concepções de Estágio na formação do professor de Matemática para o trabalho com tecnologias e situamos o GeoGebra como um instrumento para a consecução desse objetivo.

O Geogebra como instrumento para discutir Competências e Habilidades

Durante o perído de uma semana apresentamos aos alunos a atividade "Simulando um carro". A atividade compreende dois seletores que representam um velocímetro que varia de 0 a 100 Km/h e um cronômetro, variando de 0 a 600 minutos referentes à um carro. O gráfico representa o deslocamento do carro em função do tempo para uma velocidade média definida pelo seletor. A tabela associa valores do tempo T em horas

com valores da distância D em Km. Esta atividade foi retirada e adaptada do site www.mathcasts.org/mtwiki/InterA/CarRaceSimulator.

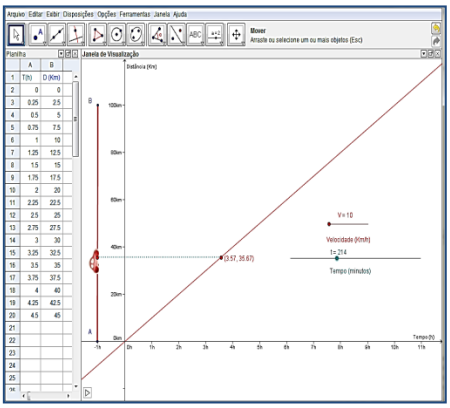


Figura 1 – Atividade "Simulando um carro"

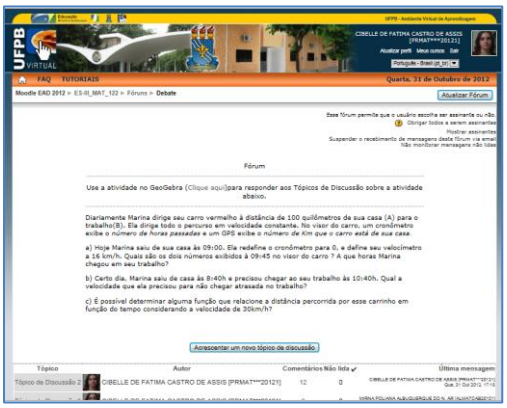


Figura 2 – Tela de abertura do Fórum

Junto ao link apresentamos o seguinte enunciado: Diariamente Marina dirige seu carro vermelho à distância de 100 quilômetros de sua casa (A) para o trabalho(B). Ela dirige todo o percurso em velocidade constante. No visor do carro, um cronômetro exibe o número de horas passadas e um GPS exibe o número de Km que o carro está de sua casa. a) Hoje Marina saiu de sua casa às 09:00. Ela redefine o cronômetro para 0, e define seu velocímetro a 16 km/h. Quais são os dois números exibidos à 09:45 no visor do carro ? A que horas Marina chegou em seu trabalho? b) Certo dia, Marina saiu de casa às 8:40h e precisou chegar ao seu trabalho às 10:40h. Qual a velocidade que ela precisou para não chegar atrasada no trabalho? c) É possível determinar alguma função que relacione a distância percorrida por esse carrinho em função do tempo considerando a velocidade de 30km/h?

Para a solução das questões propostas não há necessidade de cálculos extensos. Utilizando a tabela e modificando os valores dos seletores de forma adequada podemos concluir que: a) Os números são 0,75 e 12 que correspondem ás horas e a kilometragem do carro e Marina chegiu em seu trabalho às 13:25. b) Velocidade de 50 km/h. c) $D(h) = 30h$

A partir da atividade "Simulando um carro", propomos três Tópicos de Discussão no Fórum da disciplina no AVA Moodle.

O primeiro trazia uma citação dos PCN+ (BRASIL, 2002, p.122) que orientava o professor para o tratamento do conteúdo Função e, a partir da qual, propomos uma reflexão sobre a adequação da atividade às orientações nacionais. Segundo os PCN+(BRASIL, 2002, p.122) quanto ao tratamento deste conteúdo, o mesmo documento orienta para uma abordagem que propicie:

1. Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões;
2. Compreender o conceito de função associando-o a exemplos da vida cotidiana;
3. Associar diferentes funções e seus gráficos correspondentes;
4. Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas;
5. Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.

O enunciado do Tópico 1 foi assim proposto: "A atividade apresentada no GeoGebra na abertura do Fórum está de acordo com as orientações acima trazidas pelos PCN+ nos itens de 1 à 5 para o ensino de Funções no Ensino Médio? Busque uma justificativa para suas respostas. Antes de enviá-las responda com auxílio do Geogebra a questão proposta."

Participaram desta discussão 3 alunos. Todos reconheceram a potencialidade da atividade no que diz respeito aos itens 1,2 e 4 apresentados no enunciado da discussão. Ou seja, os alunos estagiários identifacaram na atividade o uso da linguagem algébrica para expressar e modelar fenônemos, no caso com aplicação na Física e que tem uma relação estreira com o cotidiano. Também identificaram na atividade a necessidade de leitura e interpretação em diferentes linguagens e representações que envolvem variação de grandezas.

No entanto, os alunos afirmaram que os itens 3 e 5 não foram contemplados na atividade, o que não ocorre. Durante a resolução das questões b) e c) os alunos trabalharam com as funções $D(h) = 50h$ e $D(h) = 30h$ que relacionam a distância percorrida em função do tempo em horas. Consequentemente, à elas estão associadas gráficos de funções do 1º grau do tipo Afim diferentes. Essa possibilidade estaria de acordo com o ítem 3 da citação do PCN + (2002) trazida no enunciado do Tópico de Discussão.

Semelhantemente, o ítem 5 também estaria contemplado na atividade, uma vez que, os alunos foram levados à responder que $D(h) = 30h$, assim eles estariam estabelecendo relações entre as variáveis tempo e distância.

No segundo Tópico de Discussão, pedimos que os alunos criassem uma questão usando a atividade no GeoGebra mas que associassem à algum descritor presente na Matriz de Referência do Saeb (BRASIL, 2011). Os sete descritores apresentados foram especificamente selecionados do Bloco de conteúdos Números e Operações/Álgebra e Funções:

- Identificar a localização de números reais na reta numérica (D14);
- Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas (D15);
- Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela (D18);
- Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos (D20);
- Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto (D21);
- Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes (D23);
- Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1ºgrau dado o seu gráfico (D24).

Este Tópico contou com a participação de 5 alunos. Nenhum dos alunos que participaram souberam responder adequadamente ao que foi proposto. Eles apresentaram questões que estavam relacionadas corretamente ao descritor mas não fizeram tomando a construção do GeoGebra. As mensagens a seguir exemplicam a situação em que os alunos apresentaram problemas em outros contextos:

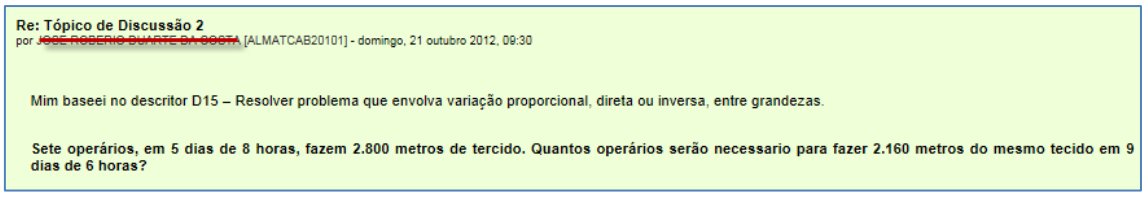


Figura 3 – Mensagem do aluno A1/ Tópico 2

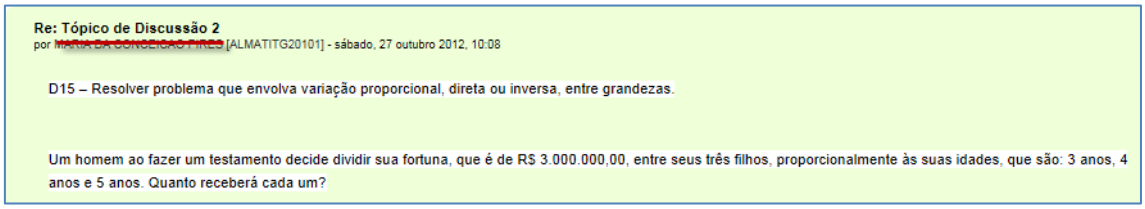
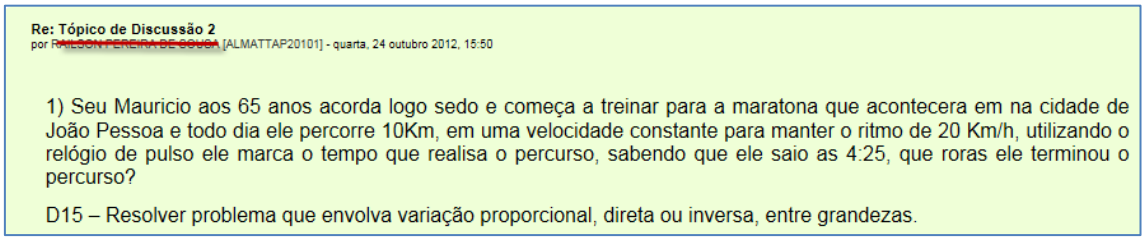


Figura 4 – Mensagem do aluno A2/ Tópico 2

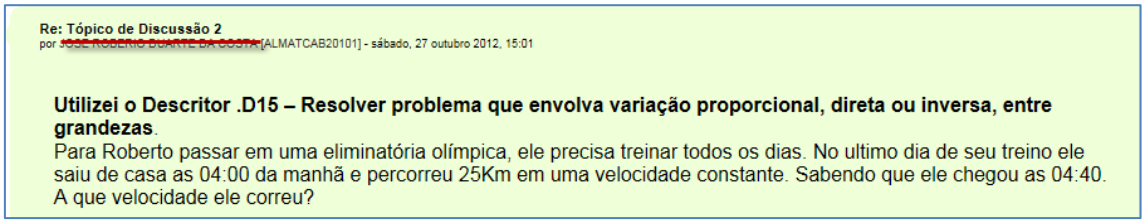
As mensagens dos alunos A3 e A4, na figura a seguir, exemplificam uma adaptação da atividade construída no GeoGebra para um outro contexto usando as variáveis tempo e distância associando a questão ao descritor 15.


Re: Tópico de Discussão 2
por [redacted] [ALMATTAP20101] - quarta, 24 outubro 2012, 15:50

1) Seu Mauricio aos 65 anos acorda logo sedo e começa a treinar para a maratona que acontecera em na cidade de João Pessoa e todo dia ele percorre 10Km, em uma velocidade constante para manter o ritmo de 20 Km/h, utilizando o relógio de pulso ele marca o tempo que realisa o percurso, sabendo que ele saio as 4:25, que roras ele terminou o percurso?

D15 – Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

Figura 5 – Mensagem do aluno A3/ Tópico 2


Re: Tópico de Discussão 2
por [redacted] [ALMATCAB20101] - sábado, 27 outubro 2012, 15:01

Utilizei o Descritor .D15 – Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.
Para Roberto passar em uma eliminatória olímpica, ele precisa treinar todos os dias. No ultimo dia de seu treino ele saiu de casa as 04:00 da manhã e percorreu 25Km em uma velocidade constante. Sabendo que ele chegou as 04:40. A que velocidade ele correu?

Figura 6 – Mensagem do aluno A1/ Tópico 2

Neste Tópico, após uma intervensão nossa, o aluno A1 refaz a questão, embora não tenha conseguido atender adequadamente ao solicitado.

No terceiro Tópico de Discussão propomos uma reflexão sobre o uso de tecnologias no ensino de Matemática identificando potencialidades e limitações. Dessa forma, propomos que os alunos apontassem, a partir da atividade construída no GeoGebra, o que não seria possível realizar sem o software para se chegar à solução ou, de outra maneira, qual o diferencial do GeoGebra na atividade. A figura a seguir ilustra a mensagem de abertura do Tópico 3.

Participaram deste Tópico 8 alunos. Em suas mensagens destacaram que o GeoGebra é uma ferramenta muito eficaz no ensino da matemática, pois permite construir varias funções, podendo modificar números, alterar dados, construir gráficos; o software permite a compreensão do resultado e do comportamento das funções, dos gráficos e uma series de outras coisas que ele nunca conseguiria esboçar na folha de papel, porque com o papel ele não conseguiria esboçar de forma milimétrica tal qual no GeoGebra; torna a aula mais atrativa e dinâmica e faz com que o aluno se sinta mais interessado com os conteúdos e fique mais participativo nas aulas.

Colocaram que com lápis e papel seria muito difícil conseguir resolver o problema proposto no Fórum, mas com o Geogebra basta colocar os valores que o gráfico aparece. Neste momento, intervimos na comunicação do Fórum explicando que esta não dever ser a principal vantagm do uso do software. Defendemos que uma atividade no GeoGebra deve ter seus objetivos próprios que vão muito além de realizar gráficos rapidamente. Essa característica pode ser explorada de forma intencional e que leve à um resultado concreto. No caso da atividade, que leve à percepção de uma generalização para o estudo do gráfico de uma função do Afim, cujo coeficiente angular é uma constante que se obtém a cada valor da velocidade.

Em suas mensagens os alunos preocupram-se com uma abordagem equivocada do uso do software ao afirmar que o aluno pode "esquecer" do lápis e papel ficando dependente do programa. Complementaram que o programa é muito importante, mas o individuo no seu processo de aprendizagem " tem que trabalhar com o papel e lápis para desenvolver seu senso critico, tornado o geogebra como uma ferramenta de estratégia e compreensão".

Salientaram que o uso do software em si não prova nenhum dos teoremas, pois, a matemática, enquanto ciência utiliza–se do método dedutivo, no entanto tal prática é de grande valia, pois, quando bem utilizada, facilita a internalização do conhecimento exposto por parte do educando.

Destacaram em suas mensagens a necessidade de interação com esta ferramenta por parte dos professores, seja em sua formação inicial ou continuada.

Considerações Finais

Ao fim deste trabalho, podemos afirmar que não esgotamos a discussão no Fórum. O mesmo será prolongado por mais uma semana o que poderá tornar o debate mais proveitoso até então. Quanto ao comportamento dos alunos percebemos a necessidade urgente de formação para o trabalho com tecnologias, especificamente com o software GeoGebra. Essa formação não findaria apenas na familiarização e conhecimentos das ferramentas mas se prolongaria nas discussões sobre proposições e atividades focadas

para o Ensino Médio como a que propomos no Tópico 2 na qual os alunos não souberam corresponder plenamente. Este trabalho evidencia essa necessidade.

Acreditamos na possibilidade da experimentação, da visualização e da articulação entre os registros de representação dos obejtos matemáticos trazidas pelo GeoGebra e assim torna-se um instrumento pedagógico para o ensino desta disciplina. Isto pôde ser percebido na atividade uma vez que para solucinar as questões não havia necessidade alguma de cálculo. O raciocínio e as estratégias de soluçao foram evidenciadas.

Para finalizar, reforçamos a necessidade de reflexões como essa que apresentamos para a formação de professores de Matemática paltadas em uma discussão crítica sobre planejamento de atividades e sobre as potencialidados/limitações de um software de Geometria Dinâmica para o enisno da Matemática em qualquer nível escolar no âmbito da formação inicial de professores.

Referências bibliográficas

Brasil (2000). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio*: Matemática. Brasília: MEC/SEB.

Brasil (2002). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais* – PCN+; Brasília, MEC/SEB.

Brasil (2011). Ministério da Educação e do Desporto. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB. Ensino Médio. *Matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília: MEC/SEB/Inep.

O PAPEL DO CONTRA EXEMPLO NO ENSINO DO CÁLCULO: UMA DISCUSSÃO COM O USO DO *GEOGEBRA*

Francisco Regis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE

Modalidad: Comunicacion
Nivel educativo: Universitário
Palabras clave: Raciocínio dedutivo, Argumentação, Contraexemplo, Geogebra.

Resumo
O que distingue e diferencia uma dedução formal de uma argumentação? Como promover e proporcionar um cenário de aprendizagem que estimule o exercício da argumentação que, em tese, deve anteceder uma dedução formal, apoiada em inferências lógicas livres de contradição? Tencionamos, nesta comunicação, introduzir uma perspectiva (DUVAL, 1991) que nos possibilitará responder alguns destes questionamentos. Outrossim, evidenciaremos que a exploração didática (com apoio na tecnologia) do contraexemplo constitui uma via diferenciada e evita o ritual de ensino do Cálculo que torna indene a hegemonia de deduções formais e simples aplicação de regras algorítmicas de forma irrefletida. Deste modo, apresentamos situações de didáticas em que o software Geogebra proporciona a visualização e o entendimento do significado dos contraexemplos em Matemática.

Introdução

Quando nos debruçamos sobre as dimensões históricas do conhecimento matemático, conseguimos divisar a pertinência do entendimento, segundo o qual, os saberes científicos que conhecemos hodiernamente, possuem resquícios e origem a partir de crenças, opiniões, ideias locais e informais que, ao passar do tempo, sofreram formulações e se tornaram o objeto de reflexão e sistematização por parte do homem.

Assim, nesse trabalho, apresentamos situações que envolvem o potencial de uma mediação didática, apoiada no *software Geogebra*. As situações envolvem a discussão de contraexemplos matemáticos restritos ao campo do Cálculo Diferencial. Nelas, evidenciaremos que, de acordo com a abordagem, a argumentação, oriunda da visualização e percepção, adquire lugar de destaque. Outrossim, apesar de fundamentar no raciocínio dedutivo matemático, a dedução, que se estrutura a partir do estabelecimento de regras de inferências, permite, em muitos casos, fortalecer apenas o conteúdo operacional das inferências, em detrimento do seu conteúdo semântico.

Sobre a estrutura do raciocínio dedutivo

A compreensão da noção da demonstração, como um instrumento conceitual e epistemológico, em Matemática, representa o “fio de Ariadne” em Matemática. Nesse

sentido, de acordo com o nível e os objetivos, sem um entendimento do seu papel e do seu poder na solidificação e construção do edifício matemático, registramos o possível comprometimento de uma aprendizagem posterior, de natureza conceitual. Outrossim, o uso da demonstração envolve, de modo intrínseco, a mobilização de um raciocínio lógico-formal, apoiado em inferências lógicas (do tipo "Se...então...") que evoluem, na medida em que, empregamos definições, propriedades e teoremas formais.

Neste sentido, Duval (1991, p. 233-234) acrescenta ainda que o raciocínio dedutivo apresenta "a particularidade de ser integrado a outras formas de raciocínio, por exemplo, o raciocínio por absurdo.". O autor indica uma condição importante para que o aluno adquira um entendimento da atividade de demonstração em Matemática, que constitui na compreensão do funcionamento do raciocínio por absurdo (*reductium ad absurdum*).

Ademais, Duval (1991, p. 234) sublinha a relevância da distinção entre um *raciocínio dedutivo* de uma *argumentação*. Na próxima seção nos deteremos na discussão envolvendo a importância do contraexemplo no contexto específico do Cálculo. Para tanto, optamos por demarcar, do ponto de vista cognitivo e, consequentemente, epistemológico, a estrutura e natureza do raciocínio matemático pertinente ao uso de contraexemplos na atividade matemática.

Sendo assim, cabe aqui a distinção, introduzida por Duval (1991, p. 234-235) de dois tipos de passagem: a primeira corresponde a um passo de raciocínio, enquanto que a segunda, consiste na transição de um passo do raciocínio para outro passo seguinte de outro raciocínio. O primeiro tipo é descrito pelo autor como uma *inferência* (*inférence*). No segundo caso, o autor emprega o termo em francês "enchaînement" que traduziremos como *sequência de raciocínio*.

Duval (1991, p. 235) explica que a passagem de inferência é condicionada por uma teoria local e possui uma organização ternária (fig. 1). A partir de sua descrição, distinguimos um *raciocínio dedutivo* de um *raciocínio argumentativo*. Neste ultimo, se evidencia o conteúdo semântico, em contraposição do *raciocínio dedutivo*, no qual, o estatuto operacional é colocado em destaque.

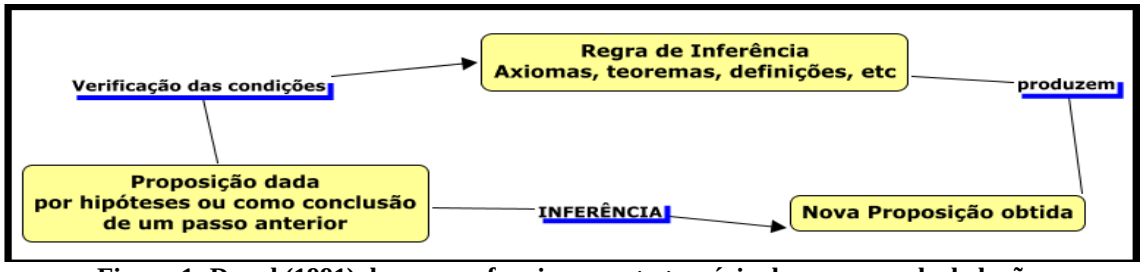


Figura 1: Duval (1991) descreve o funcionamento ternário de um passo de dedução.

Vale acentuar que um raciocínio "não se limita apenas a um único passo de inferência ou a uma única argumentação, mas, deve articular vários." (Idem, 1991, p. 239). Do ponto de vista da lógica proposicional, quando deparamos uma inferência do tipo $H_{hipotese} \rightarrow T_{tese}$, buscamos, com apoio na lógica dual aristotélica, a verificação de uma verdade (V) ou uma falsidade (F). No primeiro caso, a hipótese é suficiente para a T_{tese}.

Por outro lado, toda sentença proposicional carrega um conteúdo semântico que, segundo o solucionador do problema, pode assumir significados distintos e diversos (conforme o sistema de crenças do indivíduo). Mas, no caso em que a inferência $H_{hipotese} \rightarrow T_{tese}$ não for verdadeira, podem ocorrer os seguintes casos: (i) as hipóteses não são suficientes; (ii) as hipóteses não permitem o estabelecimento de uma inferência. Na próxima seção, discutiremos situações envolvendo apenas a condição (i).

Nesta condição, diante de hipóteses apenas necessárias, mas não suficientes, a tese pode ser verificada ou não. Em Matemática Pura, a prática usual exige o fornecimento de um contraexemplo. No caso em que temos hipótese suficiente, a tese sempre decorre. Por exemplo, toda função $y = f(x)$ diferenciável será, *a fortiori*, contínua. Esta sentença proposicional assume o valor lógico (V), como consequência da definição de diferenciabilidade. No próximo segmento, discutiremos alguns exemplos específicos.

Exploração de contraexemplos com o auxílio do *Geogebra*

Nessa seção, destacaremos algumas sentenças proposicionais *standard* no Cálculo e discutiremos, em cada caso, se o conhecimento envolvido nos conduz a um conhecimento válido ou, de fato, é uma falsidade. Nesse ultimo caso, o *software Geogebra* nos auxiliará no sentido da descrição geométrica de um contra-exemplo. Deste modo, a partir da visualização, o indivíduo pode desenvolver uma *argumentação* e, não apenas uma forma de raciocínio dedutivo que, como indicamos na seção anterior, acentua o caráter operacional, em detrimento do viés semântico de cada sentença.

Proposição 1: Se uma função $f:[a,b] \rightarrow IR$ é contínua em (a,b), então assume valores extremos em $[a,b]$.

Proposição 2: Se uma função $y = f(x)$ é definida em $[a,b]$ e vale $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Com relação a proposição 1, na figura 6, definimos a função $f(x) = \begin{cases} \tan x \text{ se x} \in (-\pi/2, \pi/2,) \\ 0 \text{ se x} = \pm \pi/2 \end{cases}$ (do lado esquerdo), enquanto na proposição 2,

consideramos $g(x)=\begin{cases}1/x \text{ se } x\neq 0\\ 1 \text{ se } x=0\end{cases}$ (do lado direito). No caso de $f(x)$, contamos com sua continuidade em $(-\pi/2,\pi/2)$, todavia, nos extremos $[-\pi/2,\pi/2]$, com base no gráfico, vemos que não existem valores extremos assumidos. Enquanto que no caso da função $g(x)$, podemos avaliar que $g(-1)\cdot g(1)=-1<0$. Por outro lado, não ocorrem pontos $[-1,1]$, tais que $f(c)=0$. Donde, a proposição 2 admite contraexemplo.

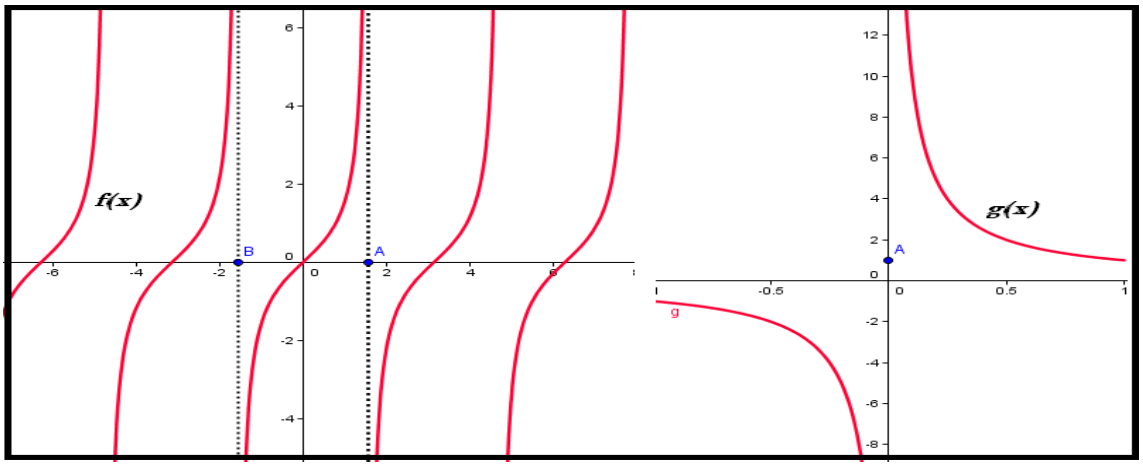


Figura 2: Situação de contraexemplo devido à ausência da continuidade das funções envolvidas

Proposição 3: Se uma função não linear, diferenciável e monótona em $(0,\infty)$, então sua derivada também será monótona em $(0,\infty)$.

Proposição 4: Se as funções $y=f(x)$ e $y=g(x)$ são diferenciáveis no intervalo (a,b) e se intersectam nele. Então, a função $\max\{f(x),g(x)\}$ não será diferenciável nos pontos em que ocorre $f(x)=g(x)$.

Na figura 2, divisamos o gráfico da função (não linear) $f(x)=x+sen(x)$, enquanto que $f'(x)=1+\cos(x)$. De imediato, depreendemos o caráter de não decrescimento da função $f(x)$ (fig. 2, lado esquerdo). Por outro lado, $f'(x)=1+\cos(x)$ não é nem crescente e nem decrescente. Segue que a proposição 3 não decorre. No caso da prop. 4, tomaremos $\max\{x^3,x^4\}$ são ambas funções diferenciáveis em $(-1,1)$ e a proposição 4 seria verdadeira apenas na condição em que $f'(a)\neq g'(a)$.

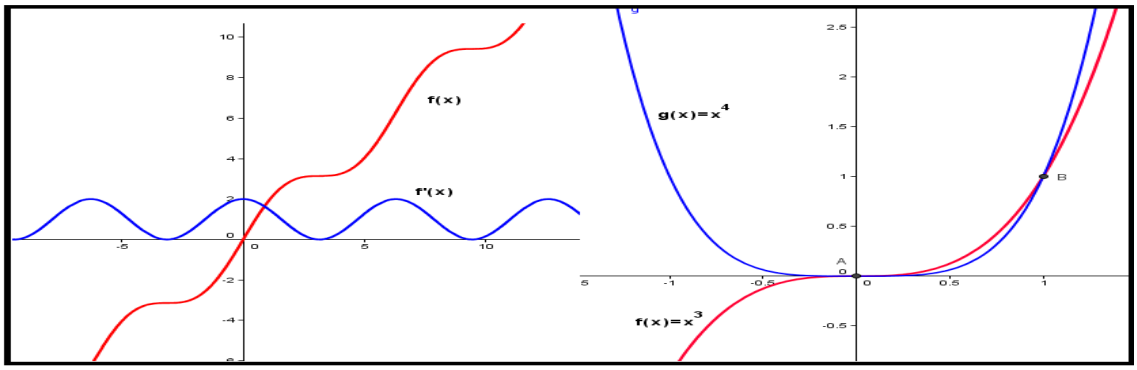


Figura 3: Situação de contraexemplo envolvendo a perda da monotonicidade

Proposição 5: Se uma função $y = g(x)$ não é diferenciavel num ponto $x = a$ e uma outra função $y = f(x)$ é não diferenciável em $g(a)$, então $F(x) = f(g(x))$ é não diferenciável em $x = a$. Neste caso, consideremos as funções $g(x) = 2/3\,x - 1/3|x|$ e $f(x) = 2x + |x|$, enquanto que $F(x) = f(g(x)) = 2\left(2x/3 - |x|/3\right) + \left|2x/3 - |x|/3\right|$. Nesta situação particular, vemos claramente que se tratam de duas funções não diferenciáveis na origem. Todavia, a figura 4, deve proporcionar uma argumentação que envolve o entendimento da composição das mesmas, produzindo uma função diferenciável, que constitui um contraexemplo para a proposição 5 que assume o valor lógico (F).

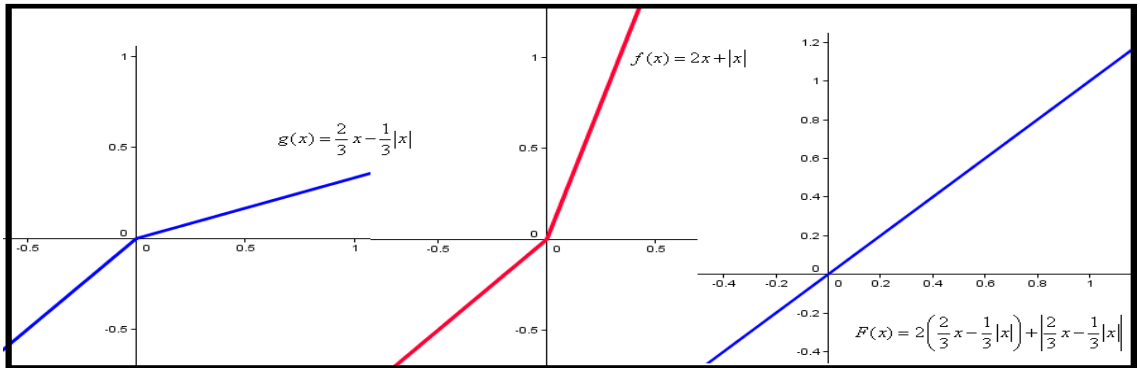


Figura 4: Situação de contraexemplo envolvendo a composição de funções

Proposição 6: Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ diferenciáveis em IR. Então vale $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Esta proposição caracteriza a condição da regra de L´Hospital. Neste sentido, Alves & Borges Neto (2012) discutem a descrição geométrica e a manifestação da noção de indeterminação (no quadro geométrico). Reparemos, pela figura 5 (gráfico azul), que o quociente $f(x)/g(x)$ tende para zero, na medida em que $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$. O mesmo comportamento, com arrimo na visualização, nos permite formular uma argumentação que proporciona a mesma ilação, ou seja, temos outra indeterminação na origem, com respeito agora ao comportamento de suas respectivas derivadas, todavia, devido à oscilação cte, o limite do quociente f'/g' não existe.

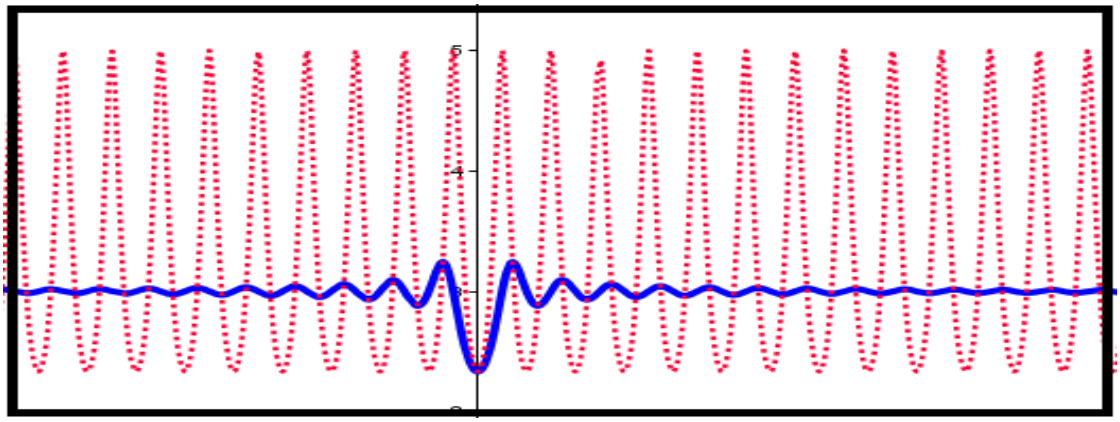


Figura 5: Situação de contraexemplo envolvendo a noção de existência de limite

Proposição 7: Se uma função $y = f(x)$ diferenciável em $(0,\infty)$ e se $\lim_{x\to\infty} f(x)$, então também existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

Com respeito a esta proposição, consideremos a função $f(x) = sen(x^2)/x$ e $f'(x) = \dfrac{2x^2\cos(x^2) - sen(x^2)}{x^2}$. Reparemos pelo gráfico em vermelho, abaixo, (fig. 6), que $\lim_{x\to+\infty} sen(x^2)/x = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} sen(x^2)/x = 0$, pois, visualizamos que as oscilações tendem, paulatinamente, e para valores grandes da variável, a oscilar cada vez menos até tender a zero. Por outro lado, no interesse do cálculo de $\lim_{x\to+\infty} 2x^2\cos(x^2) - sen(x^2)/x^2$ ou $\lim_{x\to-\infty} 2x^2\cos(x^2) - sen(x^2)/x^2$, depreendemos que, apesar de possui uma imagem limitada, para $x \in IR^+ \bigcup IR^-$, as oscilações no intervalo $[-2,2] \subset IR$ são sempre as mesmas. Deste modo, não existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, como vemos no gráfico abaixo em azul (fig. 6), pois a imagem da função $2x^2\cos(x^2) - sen(x^2)/x^2$ não tende apenas para um único valor.

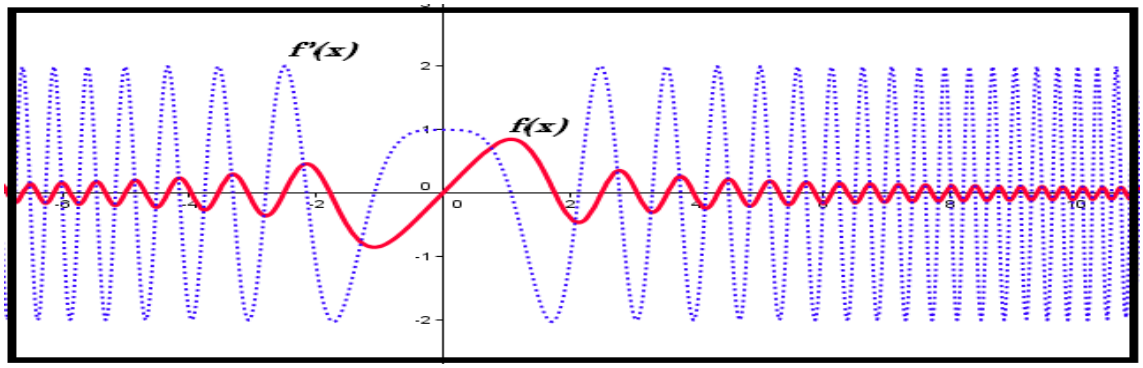


Figura 6: Situação de contraexemplo envolvendo a noção de existência de limite

Proposição 8: Se uma função $y = f(x)$ é diferenciavel e limitada em $(0,\infty)$ e existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, então existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Basta considerar $f(x)=\cos(\ln(x))$ que é diferenciável, pois se trata da composição de funções diferenciáveis (LIMA, 2010a), para $x\to+\infty$. Mas, assim, calculamos $f'(x)=-\dfrac{sen(\ln(x))}{x}$ e, consequentemente, com algumas propriedades em Análise Real, podemos inferir que $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$, enquanto que não existe o limite $\lim_{x\to+\infty}\cos(\ln(x))$. Neste caso, de modo propositado, não fornecemos os elementos visuais pertinente ao comportamento do gráfico dessas funções. Merece destaque também que, sem o recurso computacional, a proposição 8 exige uma argumentação formal (isto é, uma dedução), para a verificação da validade de nossas ultimas afirmações. Por outro lado, discutiremos a próxima proposição com o auxílio computacional.

Proposição 9: Se uma função $y=f(x)$ em qualquer vizinhança de um ponto $x=a$ admite pontos em que não existe $f'(x)$, então não existe $f'(a)$.

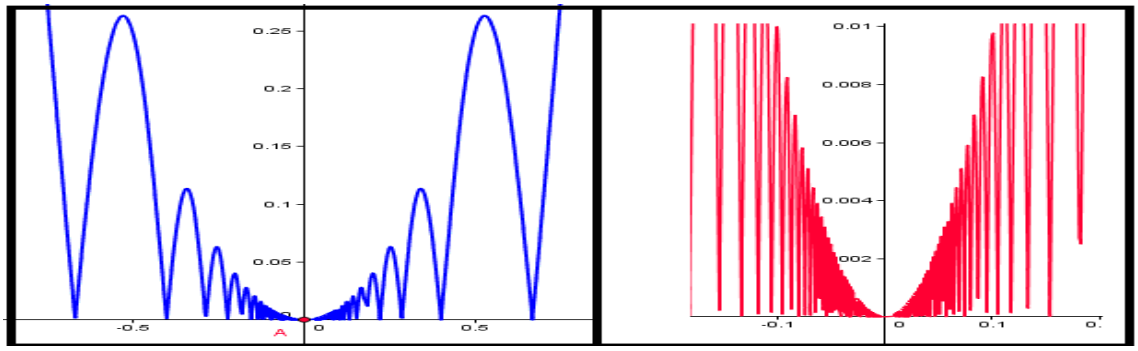


Figura 7: Situação de contraexemplo envolvendo a noção de existência de limite

Para descrever um contraexemplo conveniente, tomaremos a seguinte função $f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right| & \text{se x}\neq 0 \\ 0 \text{ se x=0} \end{cases}$. Pelo gráfico (fig. 7, lado esquerdo) descrito pelo *Geogebra*, depreendemos que as oscilações se intensificam (fig. 7, lado direito), na medida em que $x\to 0^-$ e $x\to 0^+$, ou seja, existem pontos nas vizinhanças de $x=0$, onde não existe $f'(x)$, todavia, $\exists f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{\Delta x}\right)\right|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{\Delta x}\right)\right|=0$, pois, as oscilações tendem a zerar, para valores arbitrariamente próximos da origem.

Considerações finais

Reconhecidamente, um dos apanágios da tecnologia, diz respeito às possibilidades de explorar determinadas faculdades mentais esquecidas, quando restringimos nosso ensino apenas ao ambiente lápis/papel. Dentre as habilidades mentais recorrentemente requeridas em todas as figuras exibidas, colocamos ênfase na visualização e na

percepção de propriedades matemáticas extraídas de cada gráfico produzido pelo *software Geogebra*, o que possibilita a produção de conjecturas.

Vale destacar que muitos dos gráficos (particulares) apresentados possuem dificuldades intrínsecas difíceis de serem superadas, até mesmo por matemáticos profissionais (LIMA, 2010b), apenas com o auxílio do lápis e do papel. Assim, as possibilidades do *Geogebra* se sobressaem, na medida em que, podemos explorar uma profusão de situações, a partir de alguns comandos básicos do programa. Por fim, na medida em que o professor conhece e distingue o *raciocínio dedutivo* do *raciocínio argumentativo* (DUVAL, 1991), alcança um patamar de mediação didática, na qual, a função do contraexemplo, absorve e promove uma diversidade de significados, apoiados, de modo inicial, na evolução de imagens mentais adequadas, por sua vez, condicionadas e elaboradas, de modo autônomo, pela idiossincrasia de seus aprendizes.

REFERÊNCIAS

Alves. F. R. Vieira & Borges Neto (2012). Uma sequência didática para explorar a regra de L´Hospital com o uso da tecnologia. In: Educação Matemática Pesquisa, v; 15, nº 2, 1-31. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/.

Duval. Raymond. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. In : *Educational Studies in Mathematics*. 22, p. 233-261.

Lima, E. L. (2010a). *Curso de Análise*. v. 1, Rio de Janeiro: Projeto Euclides.

Lima, E. L. (2010b). *Curso de Análise na Reta* (2011, 2 de fev.). Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=programa-de-verao-2011-analise-na-reta.

Acessado em: 10 de julho de 2012.

Klymchuk, Sergiv. (2007). Counter-examples in Calculus. New Zealand: Math Press.

O SOFTWARE GEOGEBRA E AS POSSIBILIDADES DO TRABALHO COM ANIMAÇÃO

Sandra Malta Barbosa
sbarbosa@uel.br
Universidade Estadual de Londrina, Brasil

Modalidad: Comunicación breve.
Nivel educativo: Terciario – Universitario
Palabras clave: resolução de problemas; geometria plana; investigação.

Resumo
Este artigo tem por objetivo apresentar resultados de uma pesquisa que tem por uma das metas investigar as possibilidades do trabalho com o recurso de animação do software Geogebra, na prática em sala de aula, e analisar a relação desses recursos, a partir de resolução de problemas e tarefas investigativas, e a produção do conhecimento matemático. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi desenvolvida com professores da rede de Ensino, Fundamental e Médio, do Estado do Paraná, na região de Londrina. Os dados foram coletados a partir do desenvolvimento das atividades ocorrido em sala de aula e posteriormente essas atividades foram postadas na plataforma Moodle. A análise dos dados sugere que o recurso de animação de figuras geométricas pode levar os alunos/professores à manipulação de objetos matemáticos e a consequente reformulação de suas conjecturas acerca da construção e conceitualização dos elementos geométricos. A atividade envolveu conceitos de funções quadráticas, lineares e trigonométricas, além da manipulação de circunferências e polígonos.

Introdução

Este artigo objetiva apresentar possibilidades do trabalho com animação do *software* Geogebra e a relação desse recurso com a modificação da produção do conhecimento matemático, de professores de Ensino Básico, quando as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) são inseridas na resolução de problemas matemáticos.

Os resultados apresentados são relativos à investigação acerca da produção do conhecimento desenvolvido pelo coletivo formado por alunos/professores e pelas TIC ao explorar atividades relacionadas às funções quadráticas, lineares e trigonométricas, além da manipulação de circunferências e polígonos, a partir de uma imagem fixa, caracterizando-se em uma tarefa investigativa. A análise dos dados considera que o conhecimento matemático é um processo produzido a partir de um coletivo e coloca em destaque a animação, ou os recursos dinâmicos do *software* Geogebra, para abordar e explorar elementos matemáticos.

A metodologia adotada nesta investigação é a qualitativa (ALVES-MAZZOTTI, 1999; ARAÚJO; BORBA, 2004), pois se trata de um estudo em que o objeto está pautado na ação e no comportamento humano, isto é, a partir da perspectiva do indivíduo, sendo

esse o intérprete do mundo que o cerca. Os dados são descritivos, em forma de imagens, e não de números ou quantificáveis, pois existe uma preocupação maior pelo processo do que pelos resultados ou produtos, e essa característica é, particularmente, útil para a investigação educacional.

Assim, neste artigo, é apresentado o referencial teórico pertinente à visão de produção do conhecimento matemático como um processo coletivo, bem como os procedimentos metodológicos para a coleta de dados e a conclusão.

Referencial teórico e metodológico

Entendendo que a pesquisa qualitativa alia a visão de conhecimento matemático do investigador aos procedimentos adotados na elaboração de atividades e na coleta dos dados, procura-se, no contexto deste artigo, uma possibilidade de trabalho com a animação na produção do conhecimento acerca de elementos matemáticos com a integração das TIC. Entende-se que a produção do conhecimento matemático, que é dinâmico e pautado no processo, pode ser modificada quando as TIC são inseridas no ambiente de ensino e aprendizagem de modo interativo. Assim, a visão de produção do conhecimento, neste artigo, é consistente com a noção de seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), a qual entende que os seres humanos produzem conhecimento junto com determinadas mídias.

Ao se constituir um ambiente com computador, existem várias maneiras de usá-lo na produção do conhecimento. Para Borba e Villarreal (2005), os computadores e humanos não são considerados separadamente, constituindo-se unidades disjuntas. Para os autores, os computadores não são apenas assistentes dos humanos ao se fazer Matemática, pois eles mudam a natureza do que é feito, sugerindo que diferentes coletivos de humanos com mídias produzem diferentes matemáticas. A Matemática produzida por humanos com papel e lápis é qualitativamente diferente da produzida por humanos com computadores, a partir de explorações dos recursos e experimentações. Borba e Villarreal (2005), ao proporem que a produção do conhecimento ocorre a partir da noção de coletivo pensante seres-humanos-com-mídia, fundamentam-se nas ideias de reorganização de Tikhomirov (1981) e na visão de coletivo pensante de Lévy (1993).

A teoria de reorganização proposta por Tikhomirov (1981) baseia-se na ideia de que a ferramenta não é simplesmente adicionada à atividade humana, mas transforma-a. O autor defende que os processos mentais, no ser humano, mudam quando os processos da atividade prática mudam. “Como resultado do uso do computador, a transformação da

atividade humana ocorre e novas formas de atividade emergem" (TIKHOMIROV, 1981, p.271). O autor argumenta que o computador proporciona novas possibilidades à atividade humana, como *feedbacks* e resultados intermediários que não podem ser observados externamente e, assim, o processo de produção do conhecimento é modificado. A estrutura da atividade intelectual humana é alterada pelo uso do computador, reorganizando os processos de criação, de busca, de armazenamento de informações e confirmação e refutação de conjecturas.

Para Lévy (1993), o conhecimento é produzido pela simulação e pela experimentação. A manipulação dos parâmetros e a simulação de todas as circunstâncias possíveis dão ao usuário de um programa uma espécie de intuição, e de imaginação, sobre as relações de causa e efeito presentes em um determinado modelo. O autor enfatiza que, à medida que a informatização avança, melhorando suas interfaces, novas habilidades aparecem e a cognição se transforma. Para o autor, nenhum tipo de conhecimento é independente do uso das tecnologias intelectuais (oralidade, escrita e informática) e apenas é possível pensar dentro de um coletivo, pois o pensamento já é a realização desse coletivo.

Corroborando com Borba e Villarreal (2005), Steinbring (2005) argumenta que a produção do conhecimento matemático ocorre, fundamentalmente, no contexto da construção social e no processo de interpretação individual. O conhecimento matemático não é previamente dado, mas construído por meio de atividades sociais e interpretações individuais. A prática do ensino e da aprendizagem matemática é caracterizada pela variedade de construções e de interpretações matemáticas. A natureza do conhecimento matemático é sempre olhada no contexto cultural, onde são desenvolvidos os sinais e os símbolos, tanto quanto sua interpretação.

Para Steinbring (2005), aprender Matemática requer olhar a Matemática como um processo ativo de construção, o qual, através da interpretação interativa dos conceitos e notações matemáticas, desenvolve um novo conhecimento. O autor entende que sinais matemáticos, símbolos, princípios e estruturas só podem ser significativamente interpretados em uma cultura emergente, que questiona a unidade da Matemática no processo de ensino e aprendizagem. "Se o conhecimento matemático (sinais, símbolos, princípios, estruturas, etc.) puder apenas ser interpretado significativamente a partir de um ambiente cultural específico, então não existe apenas uma simples, mas muitas diferentes formas de matemática" (STEINBRING, 2005, p.16). Essas muitas diferentes formas de matemática, à qual Steinbring (2005) se refere, com a interpretação interativa dos conceitos e das notações matemáticas, podem ser potencializadas por um ambiente

escolar em que alunos e professores utilizam as TIC.

Dessa forma, o processo de produção do conhecimento, especificamente do conhecimento matemático, modifica-se qualitativamente. A Matemática produzida pelos alunos e professores, quando utilizam papel e lápis, é diferente daquela produzida com a utilização das TIC, na qual a manipulação de elementos geométricos e a visualização têm seu destaque. A visualização, realçada pelas TIC, pode alcançar uma nova dimensão, onde a animação e a dinamicidade, proporcionadas pelos recursos computacionais, constituem um elemento primordial, quando as imagens são vistas de forma dinâmica e interpretadas pelos alunos e professores em outras formas de produzir o conhecimento.

Contexto do projeto

A pesquisa foi desenvolvida com professores de Matemática das Escolas Públicas oriundos da região de Londrina, que participam do Grupo de Estudo e Trabalho das Olimpíadas de Matemática (GETOM). Esse grupo, idealizado em 2007, funciona voluntariamente desde agosto desse ano, objetivando atender a uma demanda contínua de professores interessados em discutir Matemática por meio da Resolução de Problemas e das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), utilizando o material teórico fornecido pela OBMEP. Os encontros presenciais são aos sábados e ocorrem uma vez por mês. Além dos encontros presenciais, o GETOM conta com apoio da plataforma Moodle, com fóruns para as discussões virtuais e postagem de atividades.

As discussões, tanto presencial quanto virtualmente, enriquecem as atividades desenvolvidas, pois como defendem Alro e Skovsmose (2006), a qualidade da comunicação na sala de aula influencia a qualidade da aprendizagem de Matemática, que pode ser expressa em termos de relações interpessoais, pois, muito mais do que uma simples transferência de informação, o ato de comunicação em si mesmo tem um papel de destaque no processo de aprendizagem. “Aprender é uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais” (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p.12). O diálogo, presente na sala de aula, não é uma forma de transmissão, mas um modo de interação, no qual a responsabilidade pelo processo de aprendizagem é de todos. O princípio fundamental é aprender a aprender.

No contexto do GETOM, são discutidas várias atividades com o intuito de aprendizagem dos recursos do *software* juntamente com os conceitos matemáticos envolvidos. Um das atividades proposta, a ser apresentada no contexto deste artigo,

tomava por base a reprodução, de forma dinâmica, da imagem da paisagem a seguir.

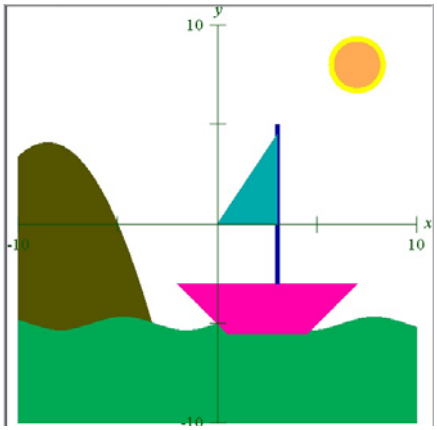


Figura 1 – Paisagem

Nessa imagem podem ser observados alguns elementos matemáticos "disfarçados". A montanha, que é representada por uma parábola de concavidade para baixo, deu início a uma discussão sobre o estudo de funções quadráticas. Já o mar, representado por uma senoide, fomentou a discussão sobre funções trigonométricas, especificamente, seno e cosseno. O sol, representado por dois círculos, incentivou o estudo de equações de circunferência. O barco, representado por um trapézio e um triângulo retângulo, instigou o estudo de polígonos. Também podem ser observadas regiões pintadas, dando a ideia da desigualdade.

A reprodução dessa atividade foi desenvolvida com o *software* Geogebra e postada na plataforma Moodle. Durante o desenvolvimento dessa atividade, alguns parâmetros foram sugeridos para os coeficientes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

"O *a* tem que ser negativo!"

Mas apenas esse argumento não foi suficiente, pois a montanha ficou muito alta e pontuda.

"A montanha tem que ficar mais 'gordinha' e mais perto do eixo *x*."

Como cada professor tinha "seu próprio desenho", foi dada a liberdade para cada um desenvolvê-lo como bem quisesse. Desse modo, as discussões tiveram como mote a imagem, porém para finalizá-la, as discussões giraram em torno dos elementos matemáticos. Também foi explorada a criatividade de cada um em relação às cores escolhidas.

Após discutirem e acharem a melhor expressão algébrica para a "montanha" partiu-se para a discussão da função $f(x) = a.sen(bx + c) + d$, onde *a*, *b*, *c* e *d* foram representados por controles deslizantes. Ao se variar esses coeficientes, é possível notar que o comportamento da função se modifica. Nesse caso, a variação do coeficiente *d*,

faz com que “suba ou abaixe a maré”. Já a variação do coeficiente *a*, faz com que o “mar tenha ondas mais suaves ou mias fortes”, avariação do coeficiente *b*, faz “o mar ficar mais revolto ou mais calmo” e a variação do coeficiente *c* é o que dá o movimento para “a praia”.

Além das funções, também existia o “sol” e o “barco” que poderiam ter um movimento crescente ou descrescente. As imagens a seguir, embora estáticas, mostram momentos distintos da movimentação do mar, do sol e do barco.

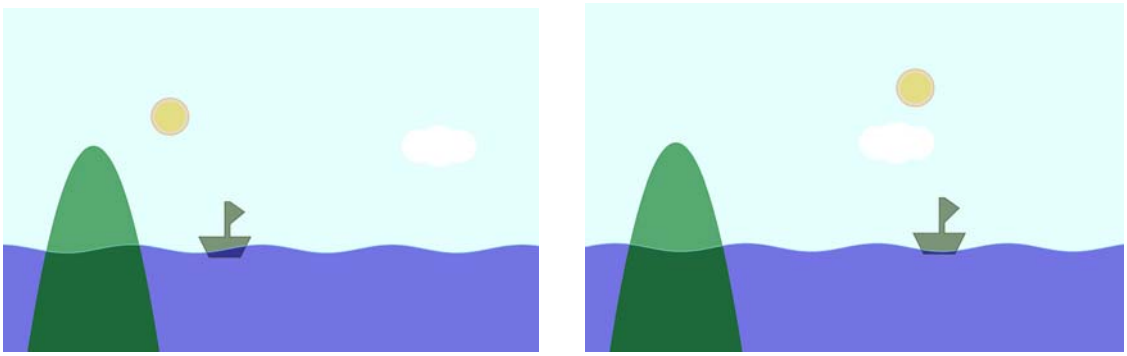


Figura 2: Paisagem em movimento.

Devido ao entusiasmo das discussões, surgiu a ideia de fazer o movimento do “sol e da lua”. Como fazer o movimento de tal forma que o sol e a lua não se encontrem? Uma resposta a essa pergunta levou à discussão sobre sentidos horário e anti-horário.

Análise e discussão dos resultados

É possível notar que a reprodução da imagem demanda trabalhar com funções e geometria de forma dinâmica. Ao desenvolver essa atividade com o *software* Geogebra, os professores se depararam com alguns elementos geométricos oriundos da animação. A dinamicidade, presente no contexto do uso do *software* Geogebra, desencadeou interpretações e estabeleceu uma sinergia com as propriedades geométricas e as expressões algébricas.

Os dados mostraram que o recurso de animação do Geogebra teve um papel fundamental na verificação das conjecturas, pois a imagem pôde ser manipulada de forma dinâmica. Essa dinamicidade possibilitou aos professores a desconstrução de uma ideia de geometria vista como “desenho”, passando a ter relevância a geometria vista como um processo de construção a partir de dados de uma imagem estática. Pode-se notar que a observação e a análise da construção foram feitas junto com o computador, sugerindo que a simulação de “marés” e de “trajetória do sol” foi produzida por um coletivo seres-humanos-com-mídias, assim como sustentam Borba e Villarreal (2005). Conforme afirmam esses autores, não é o ser humano sozinho que pensa, o coletivo, formado por humanos e mídias, é que pensa. E nesse sentido todo o ambiente físico, as

pessoas, as TIC e o conteúdo interagem na produção do conhecimento.

Além disso, o projeto propiciou aos professores atividades de familiarização com os recursos do *software* e, aos poucos, o desenvolvimento de atividades mais complexas. Ao tentar desenvolver a atividade com o *software*, os professores discutiram os conceitos geométricos, pois para qualquer construção que não fosse adequada, o *software* propiciava um *feedback* muito rápido e o professor podia perceber que o que queria deveria modificar os coeficientes. Nesse processo, muitas vezes, existe uma mudança, qualitativamente diferente para cada mídia e, dependendo do *feedback*, novamente é repensado tudo, em um movimento. Essa mudança, como proposto por Tikhomirov (1981), é uma reorganização que transforma toda a atividade humana. As investigações geométricas, realizadas pelos professores para conseguir animar a imagem, expandiram suas percepções em vários aspectos, pois eles desenvolveram um movimento de busca pela resolução, precisando aprender a lidar com as ferramentas do *software*, rever e aprofundar conhecimentos geométricos, além de aprimorar sua forma de utilização do recurso de animação.

Considerações finais

Com este artigo, pretendeu-se desenvolver algumas reflexões acerca da possibilidade da utilização das TIC e sobre como um *software*, como o Geogebra, pode estar associado a algumas resoluções de problemas em sala de aula de Matemática. Nesse caso, foram desenvolvidas algumas possibilidades de adequar o tipo de problema, que algumas vezes é resolvido essencialmente de forma algébrica, a uma resolução geométrica desenvolvida de forma lúdica com o computador. A imagem abordada era estática, mas tinha elementos que permitiam uma abstração matemática, e ao ser desenvolvida com o *software*, que envolvia animações aplicadas aos coeficientes, constituiu-se uma oportunidade para os professores produzirem um conhecimento matemático acerca de funções seno, cosseno e quadrática, além de elementos geométricos como circunferências e polígonos.

As atuais pesquisas recomendam um trabalho consciente com a utilização das TIC, seja com investigação ou resolução de problemas. Existe uma necessidade de renovar práticas e de propor atividades que estimulem os professores e, consequentemente, os alunos a pensar, analisar resultados, elaborar e apresentar conclusões bem fundamentadas. Desse modo, professores e alunos podem vivenciar experiências e processos de produção de conhecimento diferentes daqueles a que estão, normalmente,

acostumados.

É necessário escolher, ou elaborar, problemas adequados aos conteúdos para que seja possível aproveitar as possibilidades que o uso das TIC oferece. A inserção das TIC no ambiente de ensino e aprendizagem da Matemática dá um novo sentido à noção de investigação e resolução de problemas. As TIC podem proporcionar aos professores a resolução de problemas mais complexos, menos usuais, mais interessantes e ricos do ponto de vista da aprendizagem e também do ensino. É notório que não é apenas o ser humano que pensa, o coletivo, formado por humanos e mídias, é que pensa. E nesse sentido todo o ambiente físico, as pessoas, as TIC e o conteúdo interagem na produção do conhecimento geométrico. Nesse processo, muitas vezes, existe uma mudança qualitativamente diferente para cada mídia e, dependendo do *feedback*, o processo é novamente refeito, em um movimento constante.

Referências

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas ciências naturais e sociais:* pesquisa quantitativa e qualitativa. 2.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 1999. Parte II, p. 107-188.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. Cap.1, p.25-45. 120 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 9).

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking:* information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005. 232 p. (Mathematics Education Library, 39).

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência:* o futuro do pensamento na era da informática. Tradução de C. I. Costa. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993. 208 p. (Coleção Trans).

STEINBRING, H. *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction*: an epistemological perspective. Dordrecht: Springer, 2005. 236 p. (Mathematics Education Library, 38).

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. (Ed.) *The concept of activity in sovietc psychology*. New York: M. E. Sharpe, 1981. p.256-278.

O SOFTWARE GEOGEBRA E O LÚDICO: CONTRIBUIÇÕES NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO E DAS ARTES.

Anderson Messias Santana[1] – Graciela Aluizio Reali[2] - Giovana Conceição Fernandes[3] - Juliana Barcelos de Oliveira[4] - Luiz Felipe Russo[5] - Priscila Neri de Oliveira[6]
anderson.santana01@fatec.sp.gov.br[1] - graciela.reali@fatec.sp.gov.br[2] - gi.c.r.f@hotmail.com[3] - jubarcelossp@hotmail.com[4] - luiz.russo01@fatec.sp.gov.br[5] - pri.neriliveira@gmail.com[6]

FATEC Brasil[1] - FATEC Brasil[2] - FATEC Brasil[3] - FATEC Brasil[4] – FATEC Brasil[5] – FATEC Brasil[6]

Modalidade: Comunicações
Nível educativo: Primário (6 a 11 anos)
Palavras chave: lúdico, geogebra, matemática, tecnologia.

Resumo

Recursos como Jogos, Resolução de Problemas, a História da Matemática e as Tecnologias da Informação têm sido tratados como alguns caminhos para "fazer Matemática" em sala de aula. Assim como eles, o lúdico também pode ser entendido como um instrumento a favor do ensino e aprendizado de um determinado conteúdo a ser ensinado.Quiçá associar esses recursos a outros, dando interdisciplinaridade e significado aos conceitos a serem transpostos aos alunos nos ambientes escolares! Para tanto, a construção do conhecimento através do lúdico se mostra grande recurso a favor da concretização do aprendizado, pois juntamente com o auxilio de Novas Tecnologias de Informação e uma metodologia adequada, pode-se divertir e ensinar. Neste momento, tem-se um recurso que a escola pode oferecer para agregar valores e ensinamentos à cultura de seus alunos. Destarte, o objetivo deste trabalho é apresentar questões relacionadas ao ensino básico e que abordam conteúdos da Matemática e das Artes, apoiando-se na ferramenta Geogebra para facilitar e atrelar tais disciplinas à Matemática. Espera-se, por meio de atividades desenvolvidas em sala de aula com os professores da Rede Municipal da cidade de Ourinhos, São Paulo – Brasil, trazer contribuições acerca do tema Matemática e Ludicidade, além de destacar a importância das novas tecnologias no cenário educativo atual.

Abstract

Features such as Games, Troubleshooting, History of Mathematics and Information Technology have been treated as some ways to "do math" in the classroom. Like them, the playfulness can also be understood as a tool for teaching and learning specific content to be taught. Perhaps linking these resources to others, giving interdisciplinary and meaning to the concepts to be implemented for the students at the school environment! Therefore, the construction of knowledge through the playful shows a great resource for the achievement of learning, because with the help of New Information Technologies and an appropriate methodology, it can be fun and teach. Right now, there is a resource that the school can offer to add values and teachings to the culture and their students. Thus, the aim of this work is to present issues related to

basic education and which address Mathematics and Arts contents, relying on Geogebra tool to facilitate and harness these disciplines to Mathematics. It is hoped, through activities developed in the classroom with teachers of the Municipal town of Ourinhos, São Paulo - Brazil, bring contributions about the subject Mathematics and Playfulness, besides highlight the importance of the new technologies in the current educational scenario.

1. Aquisição e transmissão de conhecimentos na educação

O ser humano, para ser inserido em uma determinada sociedade, passa por um processo de submissão de costumes morais, culturais, linguísticos, dentre outros, pois se projeta ao mundo em que vive e depende de outro semelhante para desenvolver seus conhecimentos.

Savater (1998) define dois nascimentos da vida humana, o biológico, que é o período da gestação, e o segundo nascimento que é o do meio social ao que o indivíduo se insere, onde irá aprender os costumes da localidade em que nasceu. O meio que o ser humano nasce é o que determina quem será, uma vez que o convívio estimula sua personalidade e conhecimentos técnicos.

A transmissão do conhecimento é tão importante quanto à própria existência humana em qualquer ambiente social, sendo que a partir das experiências vividas, trocadas e partilhadas é que os sujeitos adquirem o conhecimento aprendendo a partir das coisas que o cercam, adquirindo assim conhecimento funcional (VYGOTSKY, 1991). Essa transmissão pode ser efetuada por meio da comunicação, dos mais velhos para os mais novos.

A educação tem como primeiro objetivo proporcionar ao homem uma consciência e possível intervenção na realidade e na sociedade na qual se insere, sendo diferente do desenvolver das capacidades instintivas, que têm por finalidade as adaptações ao seu meio ambiente. A partir deste conceito, Freire apud Savater (1998), afirma que é impossível conceber a ideia do ser humano separado da ética, definindo assim a formação moral, que vai objetivar a finalidade do processo educativo.

Todavia, o papel fundamental da educação, segundo Dewey apud Savater (1998) remete àquele que não sabe a uma prática de ensinar com base na própria liberdade, não separando da vida cotidiana, para que ele mesmo conclua suas próprias certezas. A educação e a sociedade não podem existir isoladamente. É através da educação que se aprende a ser sociedade e é a sociedade que ensina a ser humano. A educação não deve consistir-se em apenas ensinar a pensar, mas sim formar indivíduos autônomos. O ato

de aprender está ligado à curiosidade e às situações que a fomentam e instigam. Os estímulos são fundamentais para fazer com que se concretize o processo de ensino e aprendizagem (SAVATER, 1998).

A cada ano, alunos têm ingressado às escolas mais jovens, dotados de características diferentes, e dominando o uso da tecnologia. A Geração Y (Y da expressão *young*) é caracterizada por jovens nascidos nas décadas de 80 e 90.

Segundo Rocha (2009):

> (...) apresentam um perfil analítico que leva os jovens a pensarem nos fatos antes de tomarem decisões, mesmo que não acostumados com preocupações sobre estabilidades em cargos, esta geração demonstra ser perspicaz, e possui força e vigor intelectual que os capacita a exercer grande influência no consumo. (ROCHA, 2009, p. 54)

E, de acordo com Periscinoto (2008):

> Outra característica marcante dos jovens da Geração y é a capacidade de realizar diversas tarefas ao mesmo tempo (...), ao mesmo tempo em que isso comprova as habilidades multifacetadas necessárias para conseguir equilibrar diversas atividades, muitas vezes esse aspecto também vem junto com a dificuldade de esperar a concretização de um projeto de longo prazo. (PERISCINOTO, 2008, p. 12)

Assim, a sociedade vive em constante mudança. “A escola não pode ignorar o que se passa no mundo” (PERRENOUD, 2000, p.125). De fato, com tanta mudança no paradigma escolar há uma pouca receptividade dos educadores escolares no que se refere a essa inovação tecnológica (LIBÂNEO, 2002). O professor concorre diretamente com as tecnologias presentes em sala de aula, e seu dever é utilizá-las como recursos didáticos, uma vez que a geração Y é caracterizada pela inovação, rapidez, e por possuir sede de conhecimento, buscando cada vez mais o alto consumo da tecnologia.

A tecnologia cada vez mais presente no dia a dia traz esse estilo de vida fragmentado. Antigamente era necessária, para assimilação do aluno a construção do pensamento linear com a escrita, hoje os computadores trazem a rapidez e a assimilação de diversos conteúdos ao mesmo tempo. Os discentes hoje já nascem com habilidades natas para lidar com novas interfaces tecnológicas, tanto em aspectos de software e hardware. A própria linguagem tem apresentado mudanças drásticas como a linguagem hipertexto ou fragmentada.

E assim, como a linguagem, o modo de pensar, as metodologias a se trabalhar e o próprio ambiente de trabalho devem ser diferenciados, atrativos e significativos aos alunos para alcançar uma educação de qualidade. E, essa adaptação e qualidade só

poderão ser plenamente alcançadas com a interferência de uma pedagogia diferenciada, visão abrangente, sensibilidade, atualização e compromisso. A construção do conhecimento por meio do lúdico, neste momento, passa a ser também uma forma de aproximar-se desta nova realidade e usar a tecnologia a favor, estimulando os discentes e sistematizando o saber a ser ensinado.

2. Teorias e a construção do conhecimento: uma breve análise.

Lev Vygotsky[1] apresentou o que hoje chamamos de teoria construtivista do conhecimento. Para ele existe um modelo que pode ajudar compreender como se dá a relação do aprendizado e do desenvolvimento dos indivíduos.

Baseando-se na obra Desenvolvimento do Ser Humano de Vygotsky (1991) constata-se que a teoria construtivista tem por objetivo traçar parâmetros quanto à aprendizagem e o desenvolvimento, apresentando a Zona de Desenvolvimento Proximal como modelo de compreensão do processo de desenvolvimento mental das pessoas (VYGOTSKY, 1991). O principal objetivo da obra de Vygostsky (1991) é identificar o estágio de desenvolvimento potencial e real as pessoas, a fim de obter uma prospectiva quanto à definição de aprendizagem e desenvolvimento e suas propriedades. Para tanto, o autor usa de comparativos entre posições teóricas de outros pesquisadores para fortificar a sua tese.

Para Vygotsky (1991), o aprendizado vem antes do desenvolvimento, diferentemente de Jean Piaget (OLIVEIRA, 2012), que afirma que o ser humano primeiramente deve estar desenvolvido para que possa efetivar o seu aprendizado.

Neste sentido, a construção do conhecimento pode contar com instrumentos e ferramentas como a tecnologia e o lúdico, mostrando-se grandes recursos a favor da concretização do aprendizado, pois juntamente com o auxilio de Novas Tecnologias de Informação e Comunicação e uma metodologia adequada. Neste momento, passa a ser um objetivo de a escola oferecer o acesso à cultura a todos os alunos (PERRENOUD, 2007).

3. Utilização de novas tecnologias de informação proporcionando atividades lúdicas.

[1]Lev Semenovitch Vygotsky nasceu em 1896 em Orsha, pequena cidade perto de Minsk, a capital da Bielo-Rússia, região então dominada pela Rússia. Vygotsky atribuía um papel preponderante às relações sociais nesse processo, tanto que a corrente pedagógica que se originou de seu pensamento é chamada de socioconstrutivismo ou sociointeracionismo.

Neste contexto de mudanças paradigmáticas, temos as chamadas NTICs, ou Novas Tecnologias da Informação e Comunicação que interferem imensamente não só nas maneiras de se comunicar, mas também de trabalhar, de decidir e de pensar (PERRENOUD, 2000).

E de acordo com Libâneo (2010), a utilização das NTIC na educação tem quatro objetivos:

> Contribuir para a democratização de saberes (...); possibilitar a todos oportunidades de aprender sobre mídias e multimídias e a interagir com elas (...); propiciar preparação tecnológica comunicacional (...); aprimorar o processo comunicacional entre os agentes da ação docente-discente e entre estes os saberes significativos da cultura e da ciência (LIBÂNEO, 2010, p.69).

Softwares educacionaiscomo o Geogebra, desenvolvido por Markus Hohenwarter - uma ferramenta auxiliadora no ensino da matemática, gratuito, dinâmico e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, em uma única aplicação – podem colaborar de modo direto com o ensino e aprendizado de conteúdos e conceitos científicos. Por ser livre, o software vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo aos professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático (MORÊIRA; MOREIRA, 2010).

Atualmente, trabalhos e pesquisas vêm sendo desenvolvidos para os alunos do ensino fundamental, ultrapassando os ensinamentos dos níveis mais avançados como as Graduações, tomando um novo rumo nas práticas e metodologias de aprendizado. Neste sentido, uma atividade foi elaborada por meio do Geogebra para os professores Rede Municipal da Cidade de Ourinhos, São Paulo – Brasil e, depois, levando-a a seus aprendizes, de forma lúdica e espontânea.

4. Uma Atividade Diferente: o lúdico e o Geogebra

A Fatec Ourinhos no ano de 2011 e 2012 trabalhou com a capacitação de professores da Rede Municipal de Ensino na área de Matemática. O objetivo de um dos módulos deste projeto era o desenvolvimento de atividades de conteúdos matemáticos com a utilização do software Geogebra, buscando uma maneira de inserir conhecimentos matemáticos e uma tecnologia para os professores participantes da capacitação. Tais professores ministravam aulas no ensino fundamental, com o desenvolvimento de conteúdos voltados a crianças de 07 a 10.

A imagem abaixo é a montagem de um Tangram feito pelos professores do projeto no software Geogebra que depois foi impresso, recortado e montado no papel cartão.

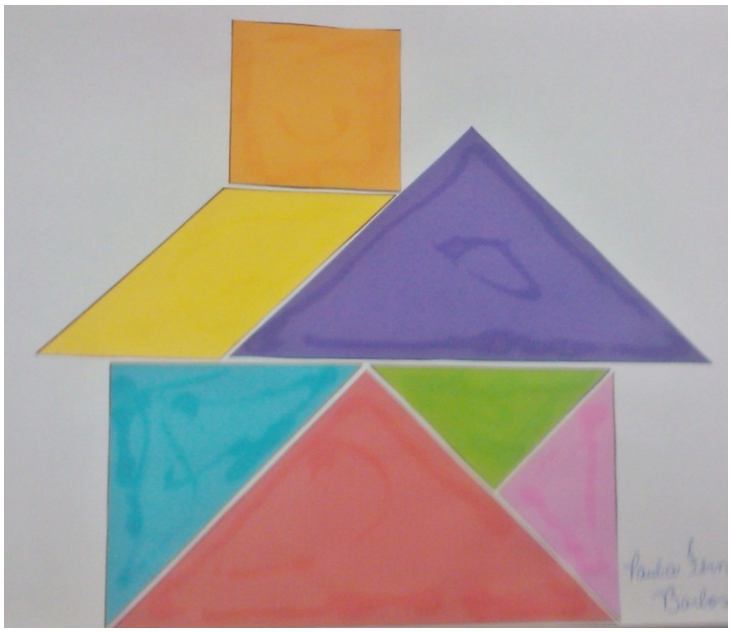


Figura 1 - Cartão para o dia das mães
Fonte: Autores (2012)

Cada participante montou algo diferente, salientando a criatividade e o aprendizado mediado pelo computador e, depois, repassou a atividade para os seus alunos nas suas salas de aulas.

Foi realizada como avaliação final do projeto a aplicação da atividade numa escola da Rede Municipal, no laboratório de informática. Cada aluno interagiu com um computador. A atividade aplicada foi a construção de um boneco com formas geométricas (em anexo). As crianças de 8 e 9 anos nunca tinham tido contato com o software Geogebra.

O resultado foi surpreendente, superando as expectativas iniciais, as crianças não encontrando grandes dificuldades no manuseio do software.

5. Considerações Finais

Segundo Ferreira et al (2009 p. 03) os ambientes informatizados quando direcionados à aprendizagem da Geometria e de outros saberes podem possibilitar e oferecer recursos capazes de fazer com que os alunos possam superar suas dificuldades.

A utilização do software aborda, de forma lúdica, conhecimentos e noções da Matemática na educação fundamental. As crianças sentiram-se atraídas pela construção

dos objetos. A atividade, por meio do computador, proporcionou a consolidação e socialização de aprendizados.

O lúdico tem sido ressaltado como estratégia para auxiliar na construção do conhecimento dos alunos em relação à matemática. O uso de jogos, brincadeiras, softwares e outros recursos que estimulam o aprendizado podem facilitar a assimilação do conteúdo e promover a consolidação do saber.

6. Referências

Almeida. M. E. (2005). *Informática e Formação de Professores*. Brasília: Ministério da Educação.

Ferreira, E. B., Soares, A. B., Lima, J. C (2009)**.** *As Demonstrações no Ensino da Geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias*. http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/3304/2785 Consultado 11/10/2012.

Libâneo, J. C. (12ª. ed). (2010). *Adeus Professor, Adeus Professora? Novas exigências educacionais e profissão docente*. São Paulo: Cortez

Oliveira, Marta K. *Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento, um processo socio-histórico. http://www.4shared.com/office/bgxFj0Ra/vygotsky_aprendizado_e_desenvo.html* Consultado 15/10/2012.

Periscinoto, A.*Geração Y chega à liderança!* http://www.administradores.com.br/informa-se/informativo/a-geracao-y-chega-ao-mercado-de-trabalho/19461/ Consultado 23/03/2012.

Perrenoud, P. (2000). *Dez Novas Competências para Ensinar*. Porto Alegre: Artmed

Perrenoud, P. (2007). *Pedagogia Diferenciada: das intenções à ação*. Porto Alegre: Artmed.

Rocha, M. (2009, Julho) *Depois do primeiro choque de realidade**.** Como a crise mudou o perfil dos impacientes executivos da chamada Geração Y*. Revista Exame, São Paulo, n. 12, p. 52-54.

Savater, Fernando (1998). *O valor de educar**.** Tradução por Mônica Stahel*. São Paulo: Martins Fontes.

Morêira, Sidnei F., Moreira, Simone G. *O Lúdico no Ensino da Matemática*. http://www.impactosmt.com.br/index.php?option=com_content&view=article&id=57:o-ludico-no-ensino-da-matematica&catid=38:artigos&Itemid=59 Consultado 04/10/2012.

Vygotsky, L. S. (1991). *A formação social da mente*. Recuperado de http://pt.scribd.com/doc/67579255/1/O-instrumento-e-o-simbolo-no-desenvolvimento-da-crianca Consultado 15/10/2012

7. Anexo

Figura 2 - Flor construída no software, impressa e montada.
Fonte: Autores (2012)

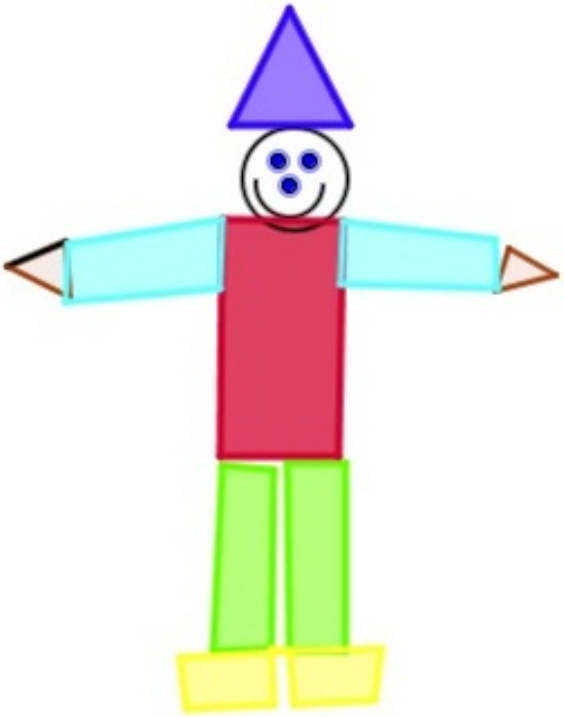


Figura 3 - Boneco geométrico construído por um dos alunos
Fonte: Autores (2012)

O USO DE TABLETS E O GEOGEBRA COMO FERRAMENTAS AUXILIADORAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Juliana Barcelos de Oliveira[1]– Anderson Messias Santana[2] – Graciela Aluizio Reali[3] – Murilo Cretuchi Delfino de Oliveira[4] – Débora Lopes Silva[5] – Fábio Nogueira de Queiroz[6]
jubarcelossp@hotmail.com[1] – anderson.santana01@fatec.sp.gov.br[2] – graciela.reali@fatec.sp.gov.br[3] – olirum85@hotmail.com[4] – deb.lopes@hotmail.com[5] – fabionqueiroz@gmail.com[6]
FATEC – Brasil[1] – FATEC – Brasil[2] – FATEC – Brasil[3] – FATEC – Brasil[4] – FATEC – Brasil[5] – FATEC – Brasil[6]

Modalidade: Comunicações
Nível educativo: Primário (6 a 11 anos)
Palavras chave: matemática, geogebra, tablets.

Resumo
Este trabalho tem como objetivo apresentar alguns aspectos e questões inerentes às tecnologias móveis como apoio didático no processo de ensino e aprendizagem,levando em consideração que o acesso à informação está cada vez mais dinâmico e em tempo real, sendo facilitado pelos avanços tecnológicos e a popularização dos preços dos dispositivos móveis ganhando espaço nas Instituições de Ensino, gerando o conceito Mobile Learning (Aprendizado Móvel), que busca proporcionar ao aluno uma extensão dos conteúdos ministrados pelo professor em sala de aula. Também são tecidas considerações sobre as características do discente, reflexões sobre a importância da socialização do saber, com o uso destas tecnologias, e como as tecnologias móveis tendem a facilitar o processo de aprendizagem nesta sociedade moderna. Propor um melhor esclarecimento para os docentes e conscientizando os mesmos da necessidade de se atualizar e capacitar para a utilização dos recursos tecnológicos e objetos de aprendizagem disponíveis atualmente também são aspectos deste trabalho. Por último, apresenta-se como se deu a inserção do software Geogebra em tabletes pelos alunos da Faculdade de Tecnologia de Ourinhos (Fatec), São Paulo – Brasil e as futuras pretensões com esta metodologia a favor do ensino e aprendizagem dos diversos saberes científicos ensinados no contexto educacional.

1. A Educação e a Construção do Conhecimento com as Novas Gerações

O ser humano, para ser inserido em uma determinada sociedade, passa por um processo de submissão de costumes morais, culturais, linguísticos, dentre outros, pois se projeta ao mundo em que vive e depende de outro semelhante para desenvolver seus conhecimentos.

Savater (1998) define dois nascimentos da vida humana, o biológico, que é o período da gestação, e o segundo nascimento que é o do meio social ao que o indivíduo se insere, onde irá aprender os costumes da localidade em que nasceu. O meio que o ser humano

nasce é o que determina quem será, uma vez que o convívio estimula sua personalidade e conhecimentos técnicos.

A transmissão do conhecimento é tão importante quanto à própria existência humana em qualquer ambiente social, sendo que a partir das experiências vividas, trocadas e partilhadas é que os sujeitos adquirem o conhecimento aprendendo a partir das coisas que o cercam, adquirindo assim conhecimento funcional. Compete à educação o primeiro objetivo de proporcionar ao homem uma consciência e possível intervenção na realidade e na sociedade na qual se insere, sendo diferente do desenvolver das capacidades instintivas, que têm por finalidade as adaptações ao seu meio ambiente.

Todavia, o papel fundamental da educação, segundo Dewey apud Savater (1998) remete àquele que não sabe a uma prática de ensinar com base na própria liberdade, não separando da vida cotidiana, para que ele mesmo conclua suas próprias certezas. A educação e a sociedade não podem existir isoladamente. É, por meio da educação, que se aprende a viver em sociedade, e a sociedade que ensina a ser humano. A educação não deve consistir-se em apenas ensinar a pensar, mas sim formar indivíduos autônomos. O ato de aprender está ligado à curiosidade e às situações que a fomentam e instigam. Os estímulos são fundamentais para fazer com que se concretize o processo de ensino e aprendizagem (SAVATER, 1998).

A cada ano, alunos têm ingressado às escolas mais jovens, dotados de características diferentes, e dominando o uso da tecnologia. A Geração Y (Y da expressão *young*) é caracterizada por jovens nascidos nas décadas de 80 e 90.

Segundo Rocha (2009), a geração y, apresenta um perfil analítico que leva os jovens a pensarem nos fatos, antes de tomarem decisões, mesmo que não acostumados com preocupações sobre estabilidades em cargos, esta geração demonstra ser perspicaz, e possui força e vigor intelectual que os capacita a exercer grande influência no consumo.

Segundo Periscinoto (2008), Outra característica marcante dos jovens da Geração y é a capacidade de realizar diversas tarefas ao mesmo tempo, ao mesmo tempo em que isso comprova as habilidades multifacetadas necessárias para conseguir equilibrar diversas atividades, muitas vezes esse aspecto também vem junto com a dificuldade de esperar a concretização de um projeto de longo prazo.

Assim, a sociedade vive em constante mudança. O professor concorre diretamente com as tecnologias presentes em sala de aula, e seu dever é utilizá-las como recursos

didáticos, uma vez que a geração Y é caracterizada pela inovação, rapidez, e por possuir sede de conhecimento, buscando cada vez mais o alto consumo da tecnologia.

A tecnologia cada vez mais presente no dia a dia traz esse estilo de vida fragmentado. Antigamente era necessária, para assimilação do aluno a construção do pensamento linear com a escrita, hoje os computadores trazem a rapidez e a assimilação de diversos conteúdos ao mesmo tempo.

2. As Tecnologias Móveis Presentes nos Ambientes Educacionais

O uso das tecnologias está presente no processo de ensino e aprendizagem, docentes utilizam cada vez mais *notebooks, desktops*, lousas digitais, televisores, e vários outros recursos em sala de aula para chamar a atenção dos alunos e despertar o interesse sobre determinado conteúdo. Recentemente, a tecnologia móvel também começou a ser inserida nas instituições de ensino, gerando o novo conceito denominado *Mobile Learning* (Aprendizado Móvel), que nada mais é que a utilização de *Tablets, Smartphones, Palmtops*, e outros recursos móveis no auxílio aos discentes para desempenharem seu papel em sala de aula, visualizando auxiliar o aluno na construção do conhecimento de maneira rápida e precisa. (BOTTENTUIT JUNIOR, et al).

Estes dispositivos móveis são dotados de diversas funcionalidades e uma delas é o acesso a Internet. Estes podem ser considerados uma miniatura de um computador, pois possuem processadores, memórias, acesso a internet e configurações que são muito semelhantes à de um convencional, facilitando e dinamizando o aprendizado dos alunos, uma vez que, busca-se as informações de imediato, resultando em um *feedback* em tempo real e permitindo uma participação ativa dos docentes. (BOTTENTUIT JUNIOR, et al).

De acordo com Moran (1995), é importante educar para a autonomia, para que cada um encontre o seu próprio ritmo de aprendizagem e, ao mesmo tempo, é importante educar para a cooperação, para aprender em grupo, para intercambiar ideias, participar de projetos, realizarem pesquisas em conjuntos. Com a utilização dos recursos móveis torna-se possível que cada discente busque a informação em seu ritmo, proporcionando um ambiente interativo, informações em tempo real, a troca de experiência, dinamizando e enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem.

No momento atual, os recursos tecnológicos estão sendo inserido em sala de aula. As tecnologias do *mobile learning* estão sendo empregadas nas instituições de ensino, ainda em fase experimental. Outro ponto forte que indica grande sucesso, é a rápida expansão na venda de *smartphones* e *tablets* dotados de recursos capazes de promover a internet com telas de tamanho que facilitam a leitura, além dos teclados dobráveis que podem ser conectados aos dispositivos para aumentar a facilidade na digitação. E, o avanço das redes sem fio (*wireless*) que irão tornar o *mobile learning* cada vez mais acessível. O grande objetivo destas tecnologias é tornar o ensino disponível em todo o lugar e em todo o tempo.

3. A Quebra de Paradigmas: Dos Livros aos *Tablets*

A lista de material escolar no início do ano letivo, em algumas escolas, está sendo substituída por um único item; no lugar da mochila cheia de livros, cadernos e lápis, começam a entrar os *tablets* que reúnem todas as necessidades do aluno e começa a fazer parte do ambiente escolar. O aparelho permite ao educando pesquisar, digitar, ler e interagir com aplicativos dinamizando a aula. Uma das principais razões para a adoção da ferramenta no ensino é a digitalização das apostilas e livros, diminuindo o peso carregado pelos alunos, aumentando a mobilidade para a leitura, conectando com a internet, além dos benefícios ecológicos.

No Colégio Dante Alighieri, em São Paulo Capital, existe um projeto denominado: Dante Tablet, que consiste em utilizar o dispositivo tecnológico no aprendizado durante as aulas, e teve início em 2011 de forma experimental, já em 2012, os alunos estão trabalhando com o dispositivo (MINATEL, 2012). Neste ano, todas as turmas da 1ª série do Ensino Médio estão usufruindo da tecnologia durante as aulas.

As apostilas e livros estão disponíveis em vários formatos digitais**,** já que há leitores de textos que abrem diversos tipos de arquivos. Os aplicativos feitos com temas didáticos prendem mais a atenção dos alunos que os livros e apostilas, já há softwares, por exemplo, sobre tabela periódica animada, que demonstra ao aluno os resultados das misturas dos elementos químicos com imagens, animações e som. Proporcionando ao docente um resultado muito mais positivo uma vez que o educando vivencia a situação desenvolvida em sala de aula através dos recursos midiáticos. (SANTANA, 2007).

Segundo Minatel (2012) O tablete chegará para motivar os alunos a explorar mais os conteúdos, criar momentos de reflexão, tirar dúvidas e outras atividades mais produtivas. E irá, claro, tornar o processo de aprendizagem, dentro e fora da sala de aula mais antenado com os desafios de uma formação cada vez mais exigente.

A inclusão desta ferramenta em todo o sistema de ensino é inevitável, algumas escolas particulares já utilizam, e as escolas públicas começam a ter um forte incentivo do governo e investimento para a compra deste recurso e utilização em sala de aula.

Porém, para ser positiva, a adoção desta tecnologia deve possuir a adaptação dos professores e alunos, uma vez que nenhum recurso garante o aprendizado, mas pode auxiliar na construção do conhecimento, formando cidadãos reflexivos, dinâmicos, críticos e capazes de construir o seu próprio conhecimento através de experiências e vivências.

4. Os Tablets e Geogebra: Uma Possibilidade de Aprendizagem do Ensino da Matemática

As vertiginosas evoluções tecnológicas do mundo atual podem transformar as relações pedagógicas. As tecnologias podem ser abordadas para afirmar uma visão conservadora, como uma visão progressista. A abordagem autoritária utilizará o computador para fins de controle sobre os outros, nesse sentido, uma visão progressista, usa as tecnologias como ferramenta de ampliação e interação, dinamizando o processo de comunicação. (MORAN, 1995, p. 24 -26)

Duas grandes linhas para a tecnologia na educação são os softwares instrucionistas e construtivistas.

O software instrucional, não propicia ao aluno o pensamento de forma explícita, o docente necessita usar de práticas que enfatizem a formalização do conhecimento, acompanhando e incitando o aluno passo a passo no processo de aprendizagem. (ALMEIDA, 1994).

Ainda segundo Almeida (1994), o uso das tecnologias sobre abordagem construtiva é o emprego das tecnologias como ferramenta educacional, ou seja, um ambiente informatizado no qual possibilita ao aluno desenvolver suas habilidades de forma ativa, com autonomia, e permite esse processo de interação entre máquina e sujeito, facilita o processo reflexivo do aluno, classificado como teoria construtivista. Independentemente da linha adotada, espera-se que com a utilização da tecnologia, ganhos a favor da

melhoria do aprendizado das disciplinas e seus conteúdos apareçam no processo de aquisição do saber.

E, foi pensando justamente no ensino e aprendizagem da matemática que o austríaco Markus Hohenwarter desenvolveu o software geogebra, uma ferramenta auxiliadora dos conhecimentos matemáticos, gratuito, dinâmico e de multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculos em uma única aplicação. Por ser livre, o software vai ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo aos professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático.

Atualmente, além dos computadores e *notebooks*, há possibilidades de também instalar e trabalhar com o Geogebra em outras ferramentas tecnológicas. Temos em desenvolvimento uma versão do geogebra para *tablets*.

Um grupo de alunos da Faculdade de Tecnologia de Ourinhos, São Paulo – Brasil, através de pesquisas, buscou uma forma alternativa de manipular o software nos *tablets*, o uso do aplicativo Splashtop nos tablets e o uso do aplicativo SplashtopStreamer nos computador ou notebook, permite a manipulação do geogebra de forma precisa. Através da comunicação pela rede Wi-fi, é possível manipular a tela do computador no tablet, e assim utilizar o software geogebra, que deve estar instalado no computador. É possível desenvolver qualquer exercício no geogebra e salva-los para poder ser abertos posteriormente. Os aplicativos são gratuitos e estão disponíveis para Sistemas Operacionais Android e IoS, há ainda uma versão paga que permite a transferência da imagem de computador a longa distância, conforme o modelo no Anexo 1.

Por meio deste dispositivo, espera-se fomentar ainda mais o uso do aplicativo, tornando ainda mais prático e acessível àqueles que até agora contavam com o uso dos tablets para outros fins além do educacional.

5. Conclusão

Um dos grandes desafios em relação à formação de docentes no ambiente informatizado é a integração dos recursos tecnológicos com a prática de ensino em sala de aula. Para poder ensinar, o professor precisa apreender o conteúdo que trabalhará e desenvolver métodos e técnicas para sua transposição. Para Moran (2008, p.143) “a ênfase no processo de aprendizagem exige que se trabalhe com técnicas que incentivem a participação dos alunos, a interação entre eles, a pesquisa, o debate, o diálogo; que

promovam a produção do conhecimento". Nesse sentido, para obtenção de sucesso nas práticas pedagógicas, cabe ao professor promover a aprendizagem do aluno, fomentar a construção do conhecimento dentro de um ambiente interativo, que estimule a exploração, a reflexão, troca de ideias e experiências, promovendo a socialização e construção do conhecimento.

Segundo Valente (2003), não é preciso ser um "expert em informática, os conhecimentos técnicos e pedagógicos, serão construídos juntos. "O domínio das técnicas acontece por necessidade e exigência do pedagógico e as novas possibilidades técnicas criam novas aberturas para o pedagógico". (VALENTE, 2003, p. 22).

Nesta fase de preparação de professores, existem várias formas de integração das tecnologias com as propostas pedagógicas, meios de utilizar novos recursos em sala de aula. É importante salientar, que o docente deve estar em um processo constante de aprimoramento e, ao assumir uma nova postura, terá novas funções a desempenhar.

Considera-se que as tecnologias móveis são uma nova metodologia em sala de aula. Com a inserção destes recursos, acredita-se que o processo educacional poderá obter um melhor resultado propiciando ao aluno novas formas de desenvolvimento e construção do conhecimento com autonomia.

Assim, o uso dos *tablets* pode facilitar o acesso à informação e tornar as aulas mais dinâmicas. Todos os materiais didáticos como livros, jornais e revistas já estão sendo compatíveis para estes dispositivos. Além disso, recursos como o software Geogebra pode ser agregado e implantado a esta ferramenta, tornando prática a sua utilização a favor dos ensinamentos dos conteúdos da Matemática.

Referências bibliográficas

ALMEIDA, E.M. *Proinfo:* Informática e Formação de Professores. Brasília: Ministério da Educação, Seed,vol. 1, 2000.

BOTTENTUIT J. J; COUTINHO, P. C; ALEXANDRE, S.D. *M-Learning e Webquests:* As novas tecnologias como recurso pedagógico. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/6454/1/SIIE%20Webquests%20Final.pdf> Acesso em: 21 mar. 2012.

HOHENWARTER, Markus. *Geogebra Quickstart***:** Guía Rápida de Referência sobre Geogebra. Portugal, 2007, 1. Disponível em: <http://www.essl.edu.pt/Dep/Mat/ano%2011/geometria/manual_geogebra.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2012.

MINATEL, V. *Projeto Dante Tablet amplia atuação nas classes do Colégio*, 2012. Disponível em: <http://www.colegiodante.com.br/institucional/noticias/noticias.php?id=809&pag=1>. Acesso em 27 mai. 2012.

MORAN, J. M. (1995). *Novas Tecnologias e o Reencantamento do Mundo*. Revista Tecnologia Educacional. Brasil, vol. 23, n.126, set.-out.

MORAN, J. M. (2011). *A Internet na Educação*. Entrevista para o Portal Educacional**.** Disponível em:<http://www.eca.usp.br/prof/moran/entrev.htm> Acesso em 12 abr. 2012.

PERISCINOTO, A. Geração Y chega à liderança! Disponível em: <http://www.academiadofuturo.com/>. Acesso em: 23 mar. 2012.

ROCHA, M. *Depois do primeiro choque de realidade:* Como a crise mudou o perfil dos impacientes executivos da chamada Geração Y. Revista Exame, São Paulo, n. 12, p. 52 - 54 jul. 2009.

SANTANA, L. S. *Os Jogos Eletrônicos do Aluno na Era Virtual*: Brincar e Aprender. 2007. Disponível em: <http://tede.unoeste.br/tede/tde_arquivos/1/TDE-2008-11-27T120148Z-103/Publico/DISSERTACAO_Leo%20Samuel_04_12. pdf> acesso em 24 mar. 2012.

SAVATER, F. *O valor de educar*. Tradução por Mônica Stahel. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VALENTE, J. A. (Org.). *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas: UNICAMP/NIED, 2003.

Anexo 1

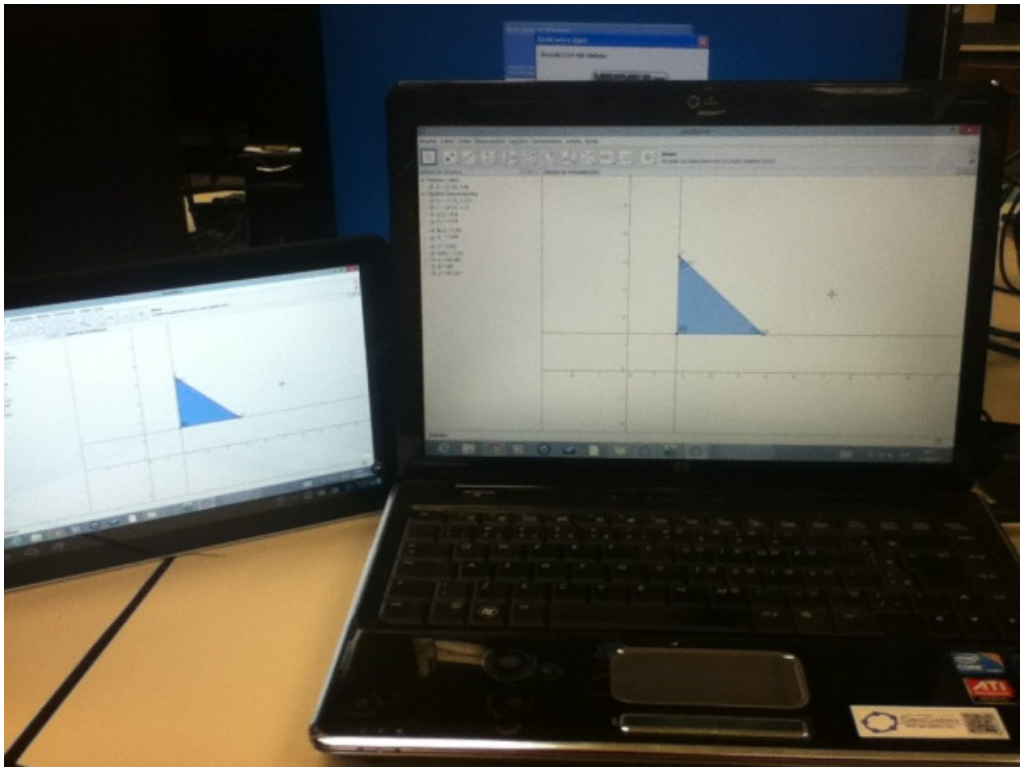


Figura 1: Funcionamento Aplicativo.

Fonte**:** Autores (2012).

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO INFANTIL

Danilo Siqueira de Pontes[1] – Rogério Lazanha[1] – Carla Nayara Zeglam Teixeira[2] – Taís Campos de Oliveira[2] – Rosemeiry de Castro Prado Maximiniano[2] – Murilo Cretuchi de Oliveira[2]
oi_skywalker@hotmail.com – rolazanha@tdkom.com.br – carlazeglan@gmail.com - taiscmps.oliveira@gmail.com – rosecprado@zipmail.com - olirum85@hotmail.com
[1]FIO - FACULDADES INTEGRADAS DE OURINHOS
Rodovia BR153 km 338,42. Bairro Água do Cateto
Ourinhos, São Paulo (Brasil)
[2]FATEC - FACULDADE DE TECNOLOGIA DE OURINHOS
Ourinhos, São Paulo (Brasil)

Modalidade: CB.
Nivel educativo: Inicial (3 a 5 anos)
Palavras-Chave: Software; Geogebra; Matemática.

Resumo
O presente trabalho aborda aspectos quanto ao uso de softwares educacionais no ensino da Matemática, mais especificamente, tem como objetivo principal apresentar uma ferramenta auxiliadora no aprendizado da Matemática para crianças do Ensino Infantil, possibilitando uma metodologia diferenciada daquelas trabalhadas pela maioria dos profissionais da área da Educação. Deve-se frisar que o uso do software educacional não tem como função substituir a figura do professor, mas sim, agir como uma ferramenta mediadora do saber a ensinar, concorrendo a uma aprendizagem mais significativa e motivadora. Alguns aplicativos livres são usados como ferramentas na educação e, se tratando da Matemática, podemos citar o Geogebra que foi criado pelo professor Dr. Markus Hohenwarter da Flórida Atlantic University, em 2001. O programa é utilizado desde o ensino infantil até a universidade e aborda conteúdos da Geometria, Álgebra e do Cálculo, com opções para construir pontos, figuras, vetores, gráficos de funções e outros assuntos da Matemática. O software foi desenvolvido na linguagem Java e está disponível em múltiplas plataformas. Destarte, este trabalho apresenta de forma qualitativa alguns aspectos inerentes aos softwares livres, mais particularmente, do Geogebra, ressaltando sua utilização e a importância no ensino e aprendizagem da Matemática.

Abstract
This piece of research deals whit aspects of the learning process of Mathmatics while using educational softwares. More especifically, it aims to present a tool which can help in the learning of Mathmatics. It is meanted for kindengarten schools and it is a tool that helps even the teacher as well the students. Some opensource appare used as tools in education, and when it comes to Mathmatics it can ben mentioned Geogebra. This software was created in 2001 by professor Markus Hohenwarter from Atlantic University in Florida. The programme can be used by students as from kindengarten to university levels. Its contents are Geometry, Algebra and Calculus. The software alloes the building of dots, shapes, axes and graphs as well as other Mathmatic contents. It was developed in Java and it is available in many different plataforms. Thus, this study presents some aspects concerning open source softwares, more specifically the Geogebra which can be used effectively in the learning process of Mathmatics.

1. Introdução.

Um software educacional tem como principal objetivo atuar como ferramenta auxiliadora na educação, além de complementar e auxiliar no ensino de determinadas atividades acadêmicas. Todos esses objetivos devem estar interligados para que o professor possa utilizar o software educacional de uma forma eficiente e perspicaz.

A educação é um dos principais objetivos do software educacional, podendo dizer que é a mais importante. As informações contidas nele devem ser verdadeiras e de fácil entendimento; o aluno deve saber de forma simples tudo aquilo que o software contém, ou seja, um problema mal elaborado pode gerar inúmeros entraves em relação aquilo que já foi aprendido anteriormente. Destarte, a harmonia nos meios de educação é essencial dentro do próprio software.

Contudo, o educador deve ter o conteúdo programático já definido para poder utilizar o software educacional, ou seja, para que a educação possa sem mediada pela tecnologia e os softwares educativos, o professor deve ter bem definido o programa a ser seguido durante suas aulas, de modo a proporcionar, acima de tudo, conteúdos significativos e atividades construídas por meio de recursos tecnológicos.

A aquisição dos saberes científicos pode ser mediada pelo uso de softwares, devendo existir uma ligação entre os dois. O aprendizado e a construção de conteúdos devem alcançar os passos da tecnologia, entretanto, a tecnologia não pode substituir a figura do professor. Assim sendo, deve haver um balanço entre os dois meios, um não pode sobrepor o outro e sim serem usados como possibilidades diferentes a favor do ensino e aprendizado de um determinado saber.

A maneira de auxiliar a aprendizagem por meio de aplicativos vai ao encontro da ideia de que o professor possa usar o software educacional como uma ferramenta inovadora para a transmissão de conteúdo, pois o software é uma nova tecnologia, um jeito diferente de ensinar ao aluno tudo aquilo que necessita.

No processo de ensino, novas metodologias são sempre bem vindas para a colaborarem com as dificuldades encontradas na educação, porém, deve-se ter consciência de que vários professores tradicionalistas não conseguem adotar maneiras diferentes de dar aulas além daquelas que já são acostumados, devido a sua própria formação já arraigada à sua cultura.

2. Novas Ferramentas De Ensino.

O aluno do ensino infantil passa por várias experiências diferentes, aprendendo a manusear novas ferramentas, como um computador, trabalhar em equipe com outros colegas, e formar opiniões que serão utilizadas por toda vida.

Aprender a manusear novas ferramentas é uma tarefa extremamente delicada, independentemente da idade, ou seja, tudo que é novo tende a causar medo e insegurança no usuário, seja pela possibilidade de quebrar, estragar ou do fracasso que pode ocorrer durante a utilização dos instrumentos. Entretanto, com as crianças esse medo de estragar é minimizado, pois nessa idade, não existe preocupação ou receio quanto à ideia de prejuízos financeiros e o receio do novo.

Desse modo, a utilização do computador como uma nova ferramenta de aprendizagem, juntamente com um software educacional composto por atividades e jogos tem sido cada vez mais defendida pelos especialistas e pesquisadores da área educacional.

Sendo assim, o MEC discorre sobre o que o software educacional significa para crianças pequenas:

> Para crianças pequenas, os jogos são ações que elas repetem sistematicamente, mas que possuem um sentido funcional (jogos de exercício), isto é, são fontes de significativo e, portanto, possibilitam compreensão, geram satisfação, formam hábitos que se estruturam num sistema (1997, p.48).

Aos olhos de uma criança, o computador não é essencialmente uma nova ferramenta de aprendizagem, mais uma nova maneira de se divertir. Assim sendo, a aula com o uso do computador pode acabar juntando o útil ao agradável, além das crianças aprenderem de uma forma diferente, se divertindo de um jeito totalmente novo.

Destarte, José Gregorio de Llano; Mariella Adrián (2006) afirmam que:

> De fato, as tecnologias da informática ou da computação têm um grande poder e uma grande versatilidade; os computadores podem fazer praticamente tudo, sempre e quando o ser humano se encarregar de adotar este recurso como uma ferramenta para atingir seus objetivos, os quais podem ser positivos ou negativos (2006, p. 18).

Assim, o computador pode ajudar o ser humano como uma ferramenta em suas atividades diárias e educacionais. Contudo, há aqueles que defendem que o uso excessivo dessas ferramentas pode trazer malefícios aos usuários. Não se trata aqui, defender pontos controversos, mas de salientar a possibilidade de mediar o conhecimento introduzindo novas metodologias nesse processo.

Quanto ao uso dos computadores, é fundamental que o professor aprenda a escolher softwares educacionais em função dos objetivos que se pretende atingir (MEC, 1997, p.47), distinguindo os que se prestam a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento.

Então, o computador aliado com um software educacional pode se tornar uma poderosa ferramenta de aprendizado, abrindo inúmeras possibilidades para se aprender novos saberes.

Desse modo, o professor sempre deve estar aberto para receber novos tipos de ferramentas, pois este não detém todo o conhecimento do mundo. Sanmya Feitosa Tajra analisa:

> Diante dos paradigmas educacionais emergentes, podemos receber o quanto o professor, como um dos agentes do processo da educação, precisa estar aberto para a nova realidade. Não existe mais a condição de o educador deter todo o conhecimento (2008, p. 120).

O educador deve se adaptar as atualizações do mundo acadêmico e do mundo tecnológico, pois com essa nova realidade, proporcionará a aproximação dos seus alunos à sociedade que cada vez mais exige conhecimentos e habilidades para atender aos seus anseios e necessidades.

3. Software Geogebra.

O software Geogebra foi criado no ano de 2001, por Markus Hohenwarter da Flórida Atlantic University, tendo como objetivo principal ser utilizado no processo de ensino-aprendizagem na Educação Matemática nas escolas de Educação Básica e de Ensino Superior.

O software aborda conteúdos de Geometria, funções, álgebra e planilha de cálculos. O aplicativo foi desenvolvido na linguagem Java e está disponível em múltiplas plataformas. Cabe ressaltar que o software é livre e está disponível na internet para download (HOHENWARTER, 2007).

Segundo Hohenwarter, criador do software, “a característica mais destacável do Geogebra é a percepção dupla dos objetos: cada expressão na janela de Álgebra corresponde a um objeto na Zona de Gráficos e vice-versa” (HOHENWARTER, 2007, p. 1).

Dessa forma, Brandt e Montorfano discorrem:

> (...) é composto por várias ferramentas que permitem construir figuras geométricas das mais simples às mais complexas, composto por uma interface bem apresentável e didática. Além das vantagens relacionadas ao fator conteúdo, este software incentiva a criatividade e a descoberta de novas formas de construções geométricas, além de oferecer recursos os estudos de conteúdos matemáticos relacionados também à álgebra e ao cálculo (2007, p.18).

Com a implantação dos recursos de tecnologias no ambiente escolar, dentre eles os softwares educativos procuram-se atender as necessidades dos alunos no processo de ensino-aprendizagem. As ferramentas têm como finalidade auxiliar na escrita, nos cálculos, na visão, na criação, no processo de construção do conhecimento. Existem poucas escolas que utilizam novas ferramentas para o ensino, pois o mesmo tem um caráter tradicionalista, e para que esse caráter seja modificado, algumas metas devem ser alcançadas (Tajra, 2008).

Neste caso, Tajra os cita:

> (...) apresentação da informática e outras tecnologias como ferramenta pedagógica; elaboração de projetos educacionais com o uso de tecnologias; análise de softwares educacionais; utilização do computador como instrumento auxiliar no desenvolvimento de atividades diversas do cotidiano escolar e fora dele (2008, p. 122).

A forma de apresentar a informática e outros tipos de tecnologias é essencial para que o professor possa produzir uma atividade de boa qualidade no aprendizado de seus alunos. Tratando-se de recursos tecnológicos, particularmente os softwares educacionais, dentre eles o Geogebra, bastante utilizado atualmente, têm despertado nos discentes a curiosidade e o interesse para aprender conteúdos matemáticos, em especial de Geometria.

Vale salientar que um dos principais aspectos que poderá tornar mais motivador o processo de ensino por meio da utilização dos recursos tecnológicos está diretamente relacionado à formação continuada dos docentes e mediadores para que consigam, através de capacitações e suporte, dominar o uso dessas ferramentas e enriquecer seus planos pedagógicos (BRANDT; MONTORFANO, 2007).

4. Atividades com o Geogebra: possibilidades de aquisição de conhecimentos diversos.

A plataforma do Geogebra apresenta várias opções, dentre elas, funções, álgebra e geometria. Sendo assim, pela diversidade de conteúdo, o professor poderá aplicar muitas atividades para serem feitas pelos alunos.

As atividades do Geogebra podem ser feitas individualmente por cada aluno, porém, o professor deve dominar o conteúdo a ser ministrado e a tecnologia a ser trabalhada, pois é elemento mediador da ferramenta a fim de conduzir a construção de conhecimentos matemáticos (VIGOTSKI, 1998).

Neste sentido, quando apresentamos um problema da Matemática, podemos contar com a ajuda da ferramenta visando gerar ganhos no aprendizado por meio da apreensão de conceitos inerentes ao objeto estudado. É o caso do ensino das figuras geométricas, particularmente, do hexágono que ganhou uma maneira diferenciada ao se pensar no Geogebra como mediador de aprendizados desse ente matemático.

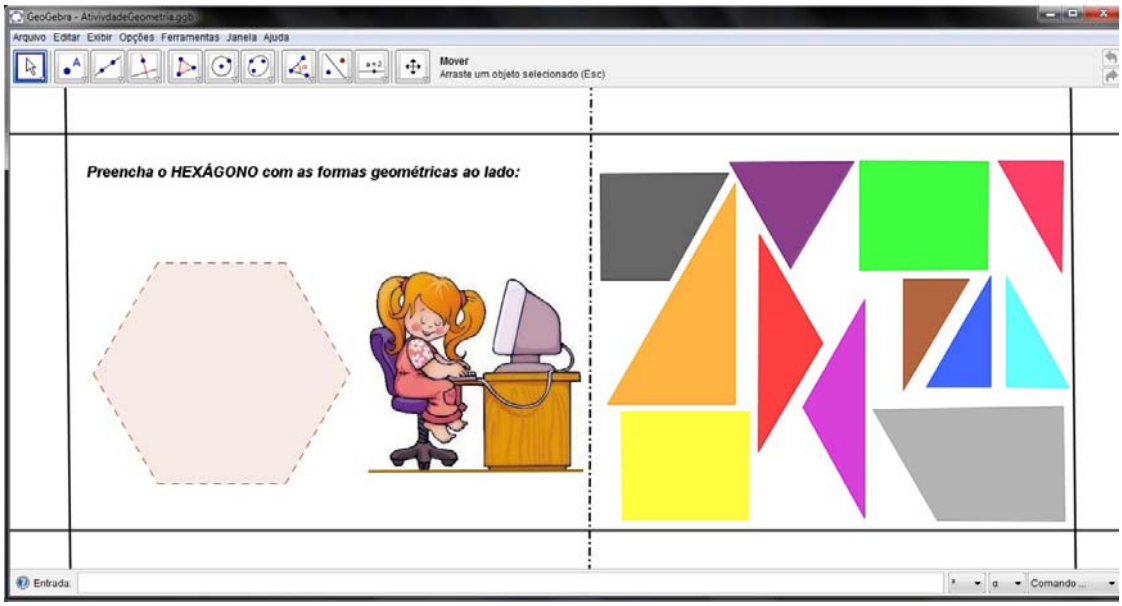


Figura 1: Exercício produzido no Geogebra

Fonte: Danilo Siqueira de Pontes

Ao se pensar em montar o hexágono com as peças coloridas colocadas na tela do Geogebra, inúmeras possibilidades de aprendizado podem ser criadas, visto que, proporcionam situações de aprendizagem das características e dos conceitos inerentes aos objetos apresentados. Trata-se de mediar a construção e apreensão dos conteúdos e significados desejados.

5. Considerações Finais

Os softwares educacionais construídos e que visam o desenvolvimento intelectual, lógico e cognitivo do aluno, são atualmente ferramentas fundamentais nas escolas brasileiras, pois podem ser aliados à construção de conceitos e quiçá à melhoria do processo de aquisição dos conteúdos ensinados.

Considera-se como softwares educacionais, aqueles pautados em conteúdos relevantes e reais no ambiente escolar, podendo agir como complementos no ensino (Softwares Instrucionistas), ou como locais de construção de conhecimento (Softwares Construtivistas) onde de forma autônoma e por meio de tentativas e erros os alunos criariam sua própria compreensão do conteúdo.

Alguns pesquisadores defendem que com a utilização destes os discentes possam assimilar mais facilmente os conteúdos abordados pelo professor. Não se trata aqui de analisar as conjecturas contraditórias defendidas por eles e sim, de apresentar alguns questionamentos e uma atividade que pode ser pensada no aspecto de contribuição aos ensinamentos da matemática.

Destarte, o software Geogebra pode ser um precioso instrumento mediador no ensino-aprendizagem da matemática na medida em que possibilita, dentre tantas opções, visualizar e dinamizar o objeto estudado.

Futuramente, será feita uma pesquisa para mostrar os resultados gerados pela utilização do software Geogebra no ensino e na aprendizagem da matemática, ou seja, pretende-se por meio de uma pesquisa quantitativa analisar os possíveis ganhos dessa relação intermediada por uma ferramenta tecnológica no ensino de conteúdos da matemática.

6. Referências

BRANDT, Silvia Tereza Juliani**.** MONTORFANO, Carla**.** *O software Geogebra como alternativa no ensino da geometria em um minicurso para professores***.** Cianorte, 2008, 20.

http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/329-4.

Acesso em: 26 fev. 2012.

Llano, José Gregorio de; ADRIÁN, Mariella. *A informática educativa na escola***.** São Paulo: Loyola, 2006.

MEC, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC, 1997.

TAJRA, Sanmya Feitosa. *Informática na Educação*. São Paulo: Érica, 2008.

HOHENWARTER, Markus. *Geogebra Quickstart***:** Guía Rápida de Referência sobre Geogebra. Portugal, 2007, 1. http://www.essl.edu.pt/Dep/Mat/ano%2011/geometria/manual_geogebra.pdf Acesso em: 26 fev. 2012.

VYGOTSKY, Lev Semynovich. *A formação social da mente***:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. L. S. Vigotski; organizadores Michael Cole... [et al]; tradução José Cipolla Neto, Luís Silveira Mena Barreto, Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO TRABALHO COM FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Luciano Ferreira - Mariana Moran Barroso - Valdeni Soliani Franco
Lulindao66@hotmail.com - marianamoranbar@gmail.com - vsfranco@uem.br
Universidade Estadual de Maringá - Universidade Estadual do Paraná/FECILCAM - Universidade Estadual de Maringá - Brasil

Modalidade: Comunicação
Nivel educativo: Terciário
Palavras chave: Funções Logarítmicas, GeoGebra, Investigação.

Resumo
O presente trabalho é uma proposta de ensino de Funções Logarítmicas utilizando o software GeoGebra como ferramenta computacional auxiliar. A investigação foi realizada com alunos em formação inicial do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) - Câmpus de Campo Mourão. O objetivo do trabalho foi realizar atividades no software GeoGebra de modo que os alunos percebessem que as operações envolvidas e seus resultados se referiam à definição de Funções Logarítmicas e suas propriedades. Deste modo, investigamos se há, pelos alunos, uma identificação da Função Logarítmica quando esta é definida de um modo menos usual, ou seja, definida de modo diferente dos comumente utilizados pelos livros didáticos.

INTRODUÇÃO

O conteúdo Funções Logarítmicas é estudado no Ensino Médio no Conteúdo Estruturante Funções. De acordo com as Diretrizes Curriculares de Matemática da Educação Básica (2008),

> As Funções devem ser vistas como construção histórica e dinâmica, capaz de provocar mobilidade às explorações matemáticas, por conta da variabilidade e da possibilidade de análise do seu objeto de estudo e por sua atuação em outros conteúdos específicos da Matemática (PARANÁ, 2008, p. 59).

Mas, conforme notamos nos livros didáticos do Ensino Médio, a Função Logarítmica é definida como simplesmente a função inversa da Função Exponencial, ou como uma ferramenta para a resolução de equações exponenciais, ou ainda, a Função Logarítmica pode ser introduzida como um modo de exprimir os números na forma de potência de dez.

Considerando as informações acima, despertou-nos a curiosidade sobre o modo pelo

qual, alunos do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática, que já estudaram Funções Logarítmicas durante o Ensino Médio e também as aplicaram para resolução de diversos problemas durante a graduação, concebem este conceito.

Para alcançar nossas intenções foram elaboradas e aplicadas 7 (sete) atividades que nomeamos de Atividade 1, Atividade 2, assim por diante, até a Atividade 7, aplicadas a 13 alunos em formação inicial do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) - Campus de Campo Mourão. Mas, no âmbito desse artigo, nos reportaremos a essas 7 atividades dando uma ênfase maior para as três últimas.

Sendo assim, para trabalharmos o conceito de Funções Logarítmicas, utilizamos como livro base o *Logaritmos* de Elon Lages Lima (2010). Neste livro, o conceito de Logaritmo Natural é introduzido como a identificação da área de uma faixa de hipérbole e deste modo, todas as propriedades dos logaritmos podem ser verificadas. Ou seja, definimos o Logaritmo Neperiano (*ln*) por $\ln(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx$, admitindo o seguinte teorema: "*Toda função f contínua em um intervalo I tem primitivas*", então existe *F* que é primitiva de *f* tal que *F(1) = 0*.

De acordo com Almouloud (2011) não devemos ensinar o conceito de Funções Logarítmicas por meio de integral no terceiro ano do Ensino Médio. No entanto como trabalhamos esta abordagem com os alunos da graduação, pudemos utilizar integrais, pelo fato destes já terem estudado conceitos relacionados à Soma de Riemann, Integral Definida e principalmente a relação entre a Integral Definida e o Logaritmo Neperiano, ou melhor, $\ln(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx$. Ressaltamos que durante o curso, exploramos mais os aspectos geométricos justamente pela suposição de que os aspectos algébricos foram devidamente explorados durante suas graduações, contudo sem dispensar os comentários algébricos, bem como a definição das funções convenientes e etc.

Para que essa abordagem ficasse mais nítida, achamos conveniente utilizar uma aula investigativa com o software dinâmico GeoGebra, pois deste modo os alunos poderiam explorar a construção e os cálculos das respectivas áreas abaixo da curva hiperbólica que foi proposta.

A contribuição do GeoGebra nas aulas Investigativas

As mídias na educação tem sido um tema presente tanto na Educação Básica como no Ensino Superior.

Hoje, pelo menos no estado do Paraná, tem-se um programa governamental de inclusão digital das escolas públicas (são 2.100 escolas, incluindo as escolas rurais) chamado Paraná Digital (PRD) que está fundamentado na disponibilidade de recursos educacionais por meio de computadores e da Internet, com o objetivo de melhorar a qualidade do ensino. Ou seja, o PRD é uma tentativa de suprir a necessidade citada por Borba (2001).

Este artigo apresenta uma proposta de atividade de introdução às Funções Logarítmicas. Esta atividade visa relacionar, com auxílio do software GeoGebra, o modo como os logaritmos são ensinados no Ensino Médio e no Superior. Desta forma, com este curso, os acadêmicos participantes tiveram a oportunidade de entender esta relação desconhecida por eles mesmos, conforme veremos nos resultados desta simples pesquisa.

Por que da escolha do GeoGebra? O GeoGebra é um software livre de Geometria Dinâmica, que está implantado na rede Paraná Digital. O software GeoGebra foi escolhido porque apresenta uma característica diferente dos demais softwares de Geometria Dinâmica. O GeoGebra apresenta duas janelas, uma que exibe a área de desenho e outra que exibe objetos aritmético-algébricos. Vinculado a essa janela algébrica existe um campo de entrada, no qual podem ser digitados comandos analíticos para o traçado de objetos na área de desenho.

Podemos dizer que o GeoGebra além de ser um software gratuito de matemática dinâmica, ele permite trabalhar a Geometria, a Álgebra e o Cálculo. Este software nos oferece a oportunidade de visualizar a relação da representação algébrica com a geométrica de um objeto em estudo. Ele está instalado em todos os computadores das escolas estaduais do estado do Paraná, e pode ser instalado em qualquer computador sem custo.

Porém Ferreira e Barros (2010) alertam que o uso de um software de geometria dinâmica pode, quando mal utilizado, colaborar para a formação de conceitos alternativos (não científicos), mas também pode ser de muito auxílio. Neste caso, é de extrema importância que o professor saiba utilizá-lo. Este foi um dos motivos pelo qual nos interessamos em elaborar atividades de cunho investigativo. Acreditamos que as atividades investigativas proporcionam a descoberta pelo aluno de informações matemáticas que poderiam ter sido simplesmente apresentadas pelo professor.

A Investigação Matemática na sala de aula pode ser considerada, por Ponte *et al.* (2006) como uma das atuais Tendências ou Abordagens da Educação Matemática. Para estes

autores investigar significa trabalhar com questões que parecem ser confusas, mas procuramos clarificar e estudar de modo organizado.

"Ao iniciar a investigação, é importante que o aluno saiba o que lhe é pedido, em termos de produto final" (PONTE *et al.*, 2006, p.29). Mesmo se tratando de uma aula investigativa, o aluno precisa ter uma motivação e curiosidade a ser sanada para que a investigação faça sentido.

No caso deste trabalho, achamos pertinente o uso de investigações, pois toda a motivação teórica foi feita a partir de atividades que foram propostas aos alunos e para respondê-las estes precisaram executar comandos no GeoGebra que corroboraram ou não suas conjecturas. Portanto, percebemos que com o uso do software GeoGebra e a Investigação Matemática foram desenvolvidas certas competências nos alunos, como:

- aprender a manusear um software matemático;
- a possibilidade do uso de ferramentas computacionais nas aulas de Matemática;
- a aprendizagem de uma nova abordagem para o Cálculo;
- o reconhecimento da Função Logarítmica como uma Soma de Riemann;
- a investigação como uma possibilidade de aprendizagem.

Enfim, conforme Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 46) apontam, as tecnologias de informação e comunicação (TICs) permitem aos estudantes estudar temas tradicionais de maneira nova. Logo, acreditamos que a investigação aliada à tecnologia é uma ferramenta, que quando bem utilizada, é eficaz no processo de ensino e na formação de professores de Matemática.

OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho foi realizar operações no software GeoGebra de modo que os alunos percebessem que estas operações envolvidas e seus resultados se referiam à definição de Funções Logarítmicas e suas propriedades.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Proporcionar subsídios teóricos e computacionais para que os alunos reconheçam as propriedades das Funções Logarítmicas;
- Proporcionar subsídios teóricos e computacionais para que os alunos reconheçam a Função Logarítmica Neperiana.

PROBLEMA DE PESQUISA

Ao submeter alunos do 4º ano de Licenciatura em Matemática a realizarem atividades usando o software GeoGebra, estes serão capazes de identificar uma Função Logarítmica quando esta é definida de um modo menos usual, ou seja, definida de modo diferente dos comumente utilizados pelos livros didáticos?

METODOLOGIA DE PESQUISA

Para atender ao objetivo principal, fundamentamos esta investigação na abordagem da pesquisa qualitativa, haja vista que o "qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões" (BICUDO, 2004, p.104).

Os referidos alunos participaram de um Curso de Extensão oferecido pelos pesquisadores autores deste artigo que ocorreu no Laboratório de Informática do Departamento de Matemática da UNESPAR. A oficina teve a duração de 4 h/a e 13 alunos participaram como citado anteriormente.

Para analisar e interpretar os dados usamos a traços da análise de conteúdo, pois ela "enriquece a tentativa exploratória, aumenta a propensão à descoberta" (BARDIN, 1977, p.30). Para organizar os dados coletados, utilizamos unidades de análise que foram estabelecidas pelos pesquisadores após uma leitura detalhada das atividades respondidas pelos alunos.

Os resultados coletados foram vistos de acordo com a teoria descrita na obra *Logaritmos* do pesquisador matemático Elon Lages Lima, conforme explicado anteriormente.

Os dados para a análise foram coletados com o uso de questões matemáticas abertas que foram respondidas pelos alunos ao utilizarem o software GeoGebra como apoio. O GeoGebra foi decisivo para a construção dos logaritmos, pois este permite identificar com naturalidade os aspectos que pretendíamos estudar.

Relembrando que foram propostas 7 (sete) atividades e ao final de cada atividade os alunos responderam questões relacionando-as. O objetivo de cada questão era fornecer subsídios conteudistas para que os alunos pudessem construir a Função Logarítmica.

METODOLOGIA DA APLICAÇÃO

A Função Logarítmica tem trazido dificuldades aos alunos para sua assimilação e real compreensão, e de acordo com Almouloud (2011) isto se deve ao fato de que determinados conhecimentos científicos, dependendo do nível em que é trabalhado,

precisa ser acessível aos alunos. As dificuldades em aprendizagem da Função Logarítmica são percebidas principalmente quando se refere à concepção e formação de conceitos.

Neste caso, neste relato explanou-se as propriedades, o comportamento, o domínio e a imagem de Funções Logarítmicas sem que os sujeitos participantes soubessem à priori que essas características eram referentes às Funções Logarítmicas. Para trabalhar com o conceito destas funções, utilizamos uma abordagem geométrica com o apoio do GeoGebra.

Para a presente pesquisa utilizamos a Investigação Matemática, pois esta metodologia compatibiliza com o objetivo principal do trabalho. Ou seja, por meio da Investigação Matemática, os alunos, curiosamente, chegariam, ou não, a conclusões referentes à noção de Função Logarítmica. Para Bertini e Passos (2008), as atividades investigativas exigem do professor conhecimento suficiente para que este promova o envolvimento do aluno em atividades que se refiram aos conceitos com os quais deseja trabalhar.

Aos alunos participantes, foi oferecido um Curso de Extensão. Este curso abordou assuntos introdutórios sobre o GeoGebra, bem como, algumas atividades iniciais para que os alunos conhecessem os principais comandos deste software, em seguida, trabalharam-se, conceitos referentes à função logarítmica sem especificar aos alunos participantes que se tratava deste conteúdo.

O curso foi distribuído do seguinte modo:

1ª parte: apresentamos noções básicas do software GeoGebra;

2ª parte: realizamos atividades que introduziram conceitos e propriedades referentes às Funções Logarítmicas; investigamos a competência dos alunos em reconhecê-las como tal;

3ª parte: apresentamos, de fato, a Função Logarítmica definida com a utilização do software GeoGebra.

RESULTADOS OBTIDOS

A análise dos resultados está organizada por Atividades, visto que cada atividade proposta tinha um objetivo a ser alcançado. No presente artigo não mostraremos a análise detalhada mas somente as conclusções obtidas.

Todas as atividades propostas foram realizadas com o auxílio do software dinâmico GeoGebra.

Um dos motivos que nos levou a realizar o presente artigo foi, será que conseguimos relacionar alguns conteúdos estudados no Ensino Médio ao Ensino Superior? Para isso fizemos a seguinte pergunta: **Ao submeter alunos do 4º ano de Licenciatura em Matemática a realizarem atividades usando o software GeoGebra, estes serão capazes de identificar uma Função Logarítmica quando esta é definida de um modo menos usual, ou seja, definida de modo diferente dos comumente utilizados pelos livros didáticos?**

Para esta proposta ser efetivada e atender professores e alunos de Matemática, no que diz respeito a uma capacitação mais geral, fez-se necessário uma preparação mais apurada das atividades a serem aplicadas. Como consequência desta preparação, utilizando o GeoGebra percebemos durante a realização da parte experimental manifestações de dificuldades semelhantes às nossas ou de qualquer pessoa trabalhando com software dinâmico.

Como resgate teórico utilizamos as mídias, particularmente, o GeoGebra, e traços da Investigação Matemática, pois não queríamos somente investigar, desejávamos também possibilitar a aprendizagem acerca do assunto a ser ministrado.

Ao fazer uma análise mais aprofundada das categorias supracitadas, podemos dizer que os alunos começaram a reconhecer que estávamos tratando das Funções Logarítmicas, a partir do momento que começamos a testar as propriedades das Atividades 5 e 6.

São elas:

$$L(x.y) = L(x) + L(y), \quad L(x/y) = L(x) - L(y) \quad \text{e} \quad L(x^m) = m.L(x).$$

Podemos então responder afirmativamente nossa questão de pesquisa, pois os alunos A3, A8, A9, A11 e A12 identificam a Função Logarítmica, sendo ainda que apenas A6 identificou como uma Função Exponencial, e os demais A1, A2, A4, A7 e A10 que concluíram a atividade relacionando com uma Integral Definida.

Mesmo com o aparecimento de algumas respostas equívocas durante a aplicação das atividades obtivemos sucesso no pretendido, pois respostas corretas foram registradas nas últimas atividades, o que mostra a superação de obstáculos pelos alunos na aceitação de uma nova maneira de apresentar a Função Logarítmica.

Podemos finalizar afirmando que é possível ensinar as Funções Logarítmicas diferentemente de como aparece nos livros didáticos, desde que seja de uma forma organizada, respeitando os limites dos aprendizes. Podemos assegurar ainda que o software GeoGebra é de grande valia na aprendizagem matemática. Esperamos que este

artigo sirva de referência não só para trabalhos acadêmicos, mas também para as salas de aulas do Ensino Médio e de Formação de Professores.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. Educar em Revista, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 191-210, 2011. Editora UFPR.

BERTINI, L. F.; PASSOS, C. L. B. O Uso da Investigação Matemática no Processo de Ensino e Aprendizagem nas Séries Inicias do Ensino Fundamental. Encontro Brasileiro de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2008. Unesp – Rio Claro.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa Segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, Marcelo de C.; ARAÚJO, Jussara de L. (Orgs). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autentica, 2004.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática in Anais do I Simpósio de Psicologia da Educação Matemática, Sociedade Brasileira de Psicologia da Educação Matemática, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Universidade Federal do Paraná, Universidade Tuiuti do Paraná Pontifícia Universidade Católica do Paraná Curitiba, Brasil, dezembro de 2001 disponível em : http://www.rc.unesp.br/gpimem/artigosbaixar.php.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: volume único. São Paulo: Ática, 2005.

FERREIRA, L.; BARROS, R. M. O. Uma nova métrica, circunferência quadrada e obstáculos. In.: V Congresso Internacional de Ensino da Matemática de outubro de 2010 ULBRA Canoas/RS · Brasil.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LIMA, E. L. Logaritmos. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

PARANÁ, Secretaria do Estado da Educação do. Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática, 2008.

PONTE, João P.; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA. Investigações matemáticas na sala de aula. 1ª ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM E GEOGEBRA: UMA PARCERIA A FAVOR DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Murilo Cretuchi Delfino de Oliveira[1] – Joice Rafaela Bertinati[2] – Ricardo Messias Rocha Giantomaso[3] – Paulo de Oliveira Castilho[4] – Ana Carolina Damiani[5] – Mario Henrique Rocha Azzolini[6]
olirum85@hotmail.com[1] – joyce.rafi18@hotmail.com[2] – ricardo_tech@live.com[3] – p.s_castilho@hotmail.com[4] – ana.silva32@fatec.sp.gov.br[5] – mario.azzolini01@fatec.sp.gov.br[6]
FATEC – Brasil[1] – FATEC – Brasil[2] – FATEC – Brasil[3] – FATEC – Brasil[4] – FATEC – Brasil[5] – FATEC – Brasil[6]

Modalidade: Comunicações
Nível educativo: Médio (11 a 17 anos)
Palavras chave: objetos, virtuais, aprendizagem, geogebra.

Resumo
O processo de ensino tem apresentado variâncias em sua forma e metodologias na tentativa de motivar e efetivar o aprendizado dos saberes. Neste contexto educativo surgem cada vez mais ferramentas que podem propiciar diferentes cenários para a aprendizagem dos conteúdos científicos, gerando possibilidades diversas na formação da aquisição e (re) construção de conhecimentos. Os objetos virtuais de aprendizagem (OVA) fazem parte desta nova tendência, afastando-se de modelos tradicionais e arraigados à formação inicial dos professores até então. Mesmo sofrendo críticas constantes, essas ferramentas fazem parte de um arsenal que pode colaborar com os novos moldes e trazer algum benefício à aprendizagem. Destarte, o objetivo deste trabalho é apresentar um objeto virtual de aprendizagem para o ensino e aprendizado de conteúdos da matemática e que traz o aplicativo Geogebra como ferramenta colaborativa nesse panorama. Espera-se, por meio deste trabalho, poder contribuir de modo relevante com questões relacionadas com a aprendizagem da Matemática em cenários diferenciados, visto que, tal modalidade está se proliferando no âmbito educacional. Para tanto, apresentar-se-á um OVA de matemática, contemplando o Geogebra como ferramenta auxiliadora neste objeto de aprendizagem. Logo, preconiza-se buscar contribuições referentes ao ensino da Matemática e suas tecnologias, fomentando reflexões significativas com os nossos pares.

Abstract
The learning processes have been facing chances in approaches and methodologies in an attempt to motivate the processes of acquiring knowledge efficiently. In the education context there have been launched more and more tools that can generate different environment for learning scientific knowledge. The virtual learning objects (VLO) are part of this new trend, which differ drastically from the traditional models which were used by the teachers so far. Even being criticized by some people, there tools are part of a group that can do operate with new models which can benefit the learning process. Thus, the objective of this work is to present a new VLO for the learning of Mathematics which uses the software Geogebra. It is expected that using this tool, the learning of mathematics can be improved once this modality of learning is becoming more and more spread among the educational environment. Therefore, it is presented in this price of research, the software Geogebra in orders to help in the

discussion of educational issues especially this one's concerning the technological tools.

Introdução

Educadores e pesquisadores constantemente preocupam-se em buscar alternativas que levem a caminhos que possibilitem um aprendizado mais significativo e condizente com os anseios de uma sociedade que cada vez mais exige ensinamentos acerca das tecnologias de comunicação e informação, influenciando de modo direto o ensino e o aprendizado dos seus indivíduos. Com isso, o processo de ensino, ou seja, a metodologia usada pelo professor para atingir os seus objetivos e dar sentido ao aprendizado de seus conteúdos, necessita de constante reflexão, atualização e adequação a essa nova realidade tecnológica que o permeia. Gonçalves (2006) afirma que as pessoas passaram e têm enfrentado mudanças evolutivas constantes, tanto físicas quanto mental. Portanto, "numa sociedade caracterizada pela multiplicidade de meios de comunicação e informação, não teria lugar para a escola convencional, a escola do quadro-negro e giz". (LIBÂNEO, 1998, p. 63).

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) vêm sendo ininterruptamente utilizadas na educação. O uso das TICs no ensino de matemática pode possibilitar novas práticas pedagógicas. Permite, pelo uso de seus recursos tecnológicos, pesquisar, fazer antecipações e simulações, confirmar ideias prévias, experimentar, criar soluções e construir novas formas de representação mental (ZANETTE, NICOLEIT, GIACOMAZZO, 2006).

A necessidade por uma escola mais dinâmica e versátil faz-se necessária no contexto atual, visto que o objetivo da educação é atingir o máximo de pessoas possível e, assim socializar o saber.

Desta forma, os objetos virtuais de aprendizagem podem amparar os professores na disseminação do conhecimento de uma maneira mais diligente, motivando-o a agregar a tecnologia como sua aliada e não como sua rival.

Assim, o objetivo deste trabalho é ressaltar como algumas ferramentas tecnológicas ou softwares educativos podem e devem contribuir com o processo de ensino-aprendizagem da matemática, visando seus prós e contras.

Deve-se, ainda, destacar que não é a tecnologia que garante a efetivação do aprendizado; ela não é a panaceia que vem salvaguardar o ensino, mas pode ser um elemento facilitador e motivador do ensino.

Sendo assim, quanto mais professores se adequarem aos novos padrões de educação com uso de tecnologias, melhor será o ensino e aprendizado dos alunos, que por sua vez mostrarão maior interesse em aprender, pois de que adiantará a tecnologia se a metodologia continuar a mesma.

1. Informática Educativa

O emprego das tecnologias da informação como instrumento para construção do conhecimento passa por um processo de forte expansão por possibilitar às escolas à efetivação de experiências além da sala de aula.

Entretanto, a utilização da tecnologia no ensino não deve ser feita de modo ingênuo e prematuro, mas sim escoltada de um estudo abrangente sobre como um sujeito adquire e edifica o conhecimento (FERREIRA et al, 2004).

Segundo Valente (1999, p. 46):

> A qualidade da interação aprendiz-objeto, descrita por Piaget, é particularmente pertinente no caso do uso da informática e de diferentes softwares educacionais e pode ser verificado por meio de alunos e professores no percurso de construção de conhecimento.

Para tanto, muitos pesquisadores da área de informática educacional estudaram possíveis formas de utilização do computador na sala de aula. Chaves (1998) detectou as seguintes formas de uso: instrução programada educação[1]; simulação de jogos; aprendizagem por descoberta e pacotes aplicativos.

Neste momento diversos trunfos que a tecnologia traz como textos, imagens, vídeos e animações podem ser aplicados em sala de aula para que os alunos sejam envolvidos pelo conhecimento que lhe é transmitido.

Para que se possa alocar a tecnologia no meio acadêmico, Valente (2006) destaca que são necessários basicamente quatro elementos: o computador, o software educativo, um professor capacitado para usar o computador como meio educacional e o aluno, sendo que todos os quatro elementos têm igual importância.

De acordo com Valente (2006), os softwares educativos podem ser classificados em categorias de acordo com seus objetivos pedagógicos:

> **Tutoriais:** Caracterizam-se por transmitir informações pedagogicamente organizadas, com se fossem um livro animado, um vídeo interativo ou um professor eletrônico. A informação é

[1] Instrução programada - trata-se de um método em que o computador é colocado na posição de quem ensina o aluno.

apresentada ao aluno seguindo uma sequência, e esta pode escolher a informação que deseja. A informação que está disponível para o aluno é definida e organizada previamente, assim o computador assume o papel de uma máquina de ensinar. A interação entre o aluno e o computador consiste na leitura da tela ou escuta da informação fornecida, sendo assim se limita na não verificação se a informação transmitida passou a ser conhecimento.

Exercícios e Práticas: Destacam a apresentação dos exercícios. A ação do aluno se restringe a virar a página de um livro eletrônico ou resolver exercícios, cujo resultado pode ser avaliado pelo próprio computador. As atividades exigem apenas memorizar informação, não importando a compreensão do que se está realizando.

Programação: Permite os alunos, criarem seus próprios protótipos de programas, sem que tenham que possuir conhecimentos de programação. Ao programar o computador utilizando conceitos e estratégias, este pode ser visto como uma ferramenta para resolver problemas. A realização de um programa exige que o aluno processe a informação, transformando-a em conhecimento.

Aplicativos: São programas voltados para aplicações específicas, como processadores de texto, planilhas eletrônicas, e gerenciadores de banco de dados. Mesmo não tendo sido criados para uso educacional, possibilitam diferentes e importantes usos em várias partes do conhecimento.

Jogos: Os jogos heurísticos (que levam o aluno a descobrir por si mesmo a verdade que lhe querem informar) e de estratégia tem como função a verificação de hipóteses, tomada de decisões, conceituação e resolução de problemas, favorecendo a aprendizagem por descobrimento.

Multimídia e Internet: Em relação à multimídia, Valente apud Vieira (2006) enfatiza a diferenciação entre o uso de uma multimídia já pronta e o uso de sistemas de autoria onde o aluno cria sua própria multimídia. Na primeira situação, o uso de multimídia é semelhante ao tutorial, apesar de oferecer muitas possibilidades de combinações com textos, imagens, sons, a ação do aluno se restringe em escolher opções oferecidas pelo software. Após a escolha, o computador apresenta a informação disponível e o aluno pode refletir sobre a mesma. À vezes, o software pode oferecer também ao aluno, oportunidade de selecionar outras opções e navegar entre elas. Essa ideia pode manter o aluno ocupado por certo tempo e não oferecer-lhe oportunidade compreender e aplicar de modo mais significativo às informações selecionadas.

Deste modo, abrir-se para novas educações resultantes de mudanças estruturais nas formas de ensinar e aprender possibilitada pela atualidade tecnológica é o desafio a ser assumindo por toda a sociedade.

2. Objetos Virtuais de Aprendizagem

Conhecidos também pela sigla OVA, os Objetos Virtuais de Aprendizagem podem ser tomados como todo e qualquer recurso digital (imagem, animação, simulação etc.) que tenha a capacidade de reutilização para suporte ao ensino (WILEY, 2000).

Conforme Machado e Silva, a função de um objeto de aprendizagem é:

> (...) atuar como recurso didático interativo, abrangendo um determinado segmento de uma disciplina e agrupando diversos tipos de dados como imagens, textos, áudios, vídeos, exercícios, e tudo o que pode auxiliar o processo de aprendizagem. Pode ser utilizado - tanto no ambiente de aula, quanto na Educação à Distância (MACHADO; SILVA, 2005, p. 2).

Flexibilidade, fácil manipulação e combinação, interatividade, são alguns benefícios que os OVAs acarretam ao ensino, eles são cada vez mais empregados pelas instituições educacionais, pois instigam os alunos a conhecerem mais e mostram de uma maneira diferente conceitos, teorias e esquemas de uma maneira mais leve, criativa e, propiciando a ampliação do aprendizado e as chances de sucesso escolar.

Para que um objeto de aprendizagem tenha eficiência e eficácia didática o educador deve procurar responder algumas questões:

> Deve-se definir, antecipadamente à criação dos objetos de aprendizagem, qual será o seu objetivo: O que ele vai ou não abordar? Com que profundidade? Qual enfoque adequado? Para que público? Qual a importância deste tópico para o conhecimento (disciplina e/ou curso) que se deseja transmitir? e Quais formas de Interatividade com o educando? Ainda deve-se planejar quais as metodologias e ferramentas aplicadas na construção do objeto de aprendizagem para que ele atinja os seus objetivos. (BORGES; NAVARRO, 2005).

Os objetos de aprendizagem possuem ainda outras grandes vantagens, como a possibilidade de sua reutilização, podendo gerar economias financeiras e assegurando a padronização da informação.

> Pode-se utilizar um objeto de aprendizagem, por exemplo, para realizar simulações de experiências e atividades práticas. Ele permite que o aluno teste, de maneira prática e interativa, inúmeras possibilidades do exercício proposto, que, se tivesse sido estudado apenas teoricamente, não estimularia tanto a aprendizagem do conteúdo (MACHADO; SILVA, 2005, p. 2).

Além da vantagem de reutilização, os objetos de aprendizagem podem respeitar o ritmo de aprendizagem de cada indivíduo, o que geralmente não ocorre na educação presencial (ZANETTE, NICOLEIT, GIACOMAZZO, 2006).

Estes softwares educativos devem ser concebidos com a premissa de serem facilitadores na construção do conhecimento, e devem servir como instrumentos para que o aluno construa o seu entendimento sobre o assunto que está sendo abordado.

Sendo assim, a construção de um objeto virtual de aprendizagem passa por três departamentos antes de sua total construção: a pedagógica, a tecnológica e a de design, buscando um objetivo em comum, cada uma contribuindo com sua especialidade.

2.1. Objetos Virtuais de Aprendizagem Matemáticos

Nos últimos anos, diversos autores têm conduzido investigações acerca dos OVAs para a compreensão de conceitos matemáticos (dentre eles, ROSCHELLE et al., 1999; CASTRO-FILHO et al., 2005), em especial os ligado à Álgebra.

Dessa forma, o presente trabalho propõe-se a apresentar um Objeto de Aprendizagem como ferramenta de auxílio para o ensino dos conceitos e teorias de diversas áreas das ciências da matemática.

2.2. Objeto Teorema de Pitágoras

Um desses objetos virtuais intitula-se por Teorema de Pitágoras e é um software desenvolvido na plataforma C# (Csharp), que visa instruir e construir conhecimentos aos alunos sobre o Teorema de Pitágoras por meio da apresentação do teorema, curiosidades, biografia de Filósofo Pitágoras de Samos, exercícios contextualizados, um jogo de palavras-cruzadas, vídeo-aula, contato com o desenvolvedor, interação com um blog onde o aluno pode obter mais materiais matemáticos, e a integração do Software Matemático Geogebra, conforme modelo do Anexo 1.

Adotando Metodologias Instrucionista, Construtivista e Sócio-Interacionista, o Software Teorema de Pitágoras procura instigar a curiosidade dos alunos, por meio da interação, já que o mesmo é levado a encontrar as respostas a partir de seus próprios conhecimentos e de da troca da socialização com outros colegas.

Os objetos virtuais em questão também utilizam o Método de Skinner, onde o aluno reforça seu conhecimento, utilizando a tecnologia como sua aliada.

Conclusão

Num contexto atual, as instituições de ensino devem prover aos seus acadêmicos, condições de aprender por meio da utilização dos recursos disponíveis, sejam eles objetos virtuais ou ambientes virtuais de aprendizagem. A utilização das TICs na educação, pela comunidade acadêmica, já é realidade. Contudo, o enfoque de Objetos Virtuais de Aprendizagem são ainda poucos utilizados, pois são recursos que devem ser constantemente pesquisados, utilizados, avaliados e aperfeiçoados. Cabe aos

pesquisadores, educadores e acadêmicos, a iniciativa de por em prática estas ferramentas de auxílio à aprendizagem.

Conquistada a possibilidade de se atrelar o software Geogebra a um OVA, adquire-se uma ferramenta mais "poderosa" no auxílio do ensino, onde o aluno poderá cursar determinado conteúdo matemático e utilizar o Geogebra para comprovar teorias e conjecturas demonstrada no objeto virtual.

Contudo, o conteúdo pedagógico deve ser cuidadosamente desenvolvido de modo que o tema abordado seja equilibrado, respeitando o intuito de auxiliar o aluno a construir os conceitos. Este aspecto é decisivo para o desenvolvimento destes recursos, pois agrupa profissionais com características distintas – educadores, pedagogos e programadores.

Pode se considerar que os objetos de aprendizagem, e em geral, as tecnologias envolvidas na sua produção, são um campo de estudos abrangente e que podem gerar boas oportunidades de desenvolvimento acadêmico e profissional, e ainda contribuem intrinsecamente para a inclusão digital e social.

Referências bibliográficas

Borges, Francisco; Navarro, Mairlos. *Aplicação colaborativa de objetos de aprendizagem, a partir de uma proposta de planejamento pedagógico integrado.* Belo Horizonte. 2005. Disponível em:<http://portal.ibta.com.br/cursos/ibtanews/news-01- 06/downloads/objetos_pgl.doc>. Acesso em: 10 de setembro de 2012.

Chaves, E. O. C. (1988).*O uso de computadores em escolas: fundamentos e críticas.* São Paulo: Editora Scipione.

Ferreira, Luis de França et al. (2004).*Integrando objetos de aprendizagem e realidade virtual para uso em ambientes de apoio à construção e aquisição de conhecimento e habilidade espacial.* In: VII CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 10, Porto Alegre.

Gonçalves, J. C. *Educação e conhecimento: o segundo nascimento do homem.* Disponível em: <http://www.univesp.edu.br/revista/revista3/publi-art2.php? codigo= 10> Acesso em: 07 de março de 2012.

Libâneo, José Carlos. (1998). *Adeus professor, adeus professora? Novas exigências educacionais e profissão docente*. São Paulo: Cortez Editora.

Machado, Lisandro Lemos; Silva, Juliano Tonezerda. (2005) .*Objeto de aprendizagem digital para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem no ensino técnico em informática*. Artigo. Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 16f.

Roschelle, J.; Digiano, C.; Pea, R.; Kaput, J. (1999). *Educational Software Components of Tomorrow*. M/SET 99 Proceedings [CD ROM], Charlottesville, VA: American Association for Computers in Education.

Valente, José Armando (Org.). (1999). *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas: UNICAMP/NIED.

Valente, José Armando. *Diferentes usos do computador na educação*. Disponível em: <http://upf.tche.br/~carolina/pos/valente.html>. Acesso em: 19 de maio de 2012.

Zanette, Elisa Netto; Nicoleit, Evânio Ramos; Giacomazzo Graziela Fátima. (2006). *A produção do material didático no contexto cooperativo e colaborativo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, na modalidade de educação a distância, na graduação.* In: VII CICLO DE PALESTRAS SOBRE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO. Porto Alegre.

Anexo 1

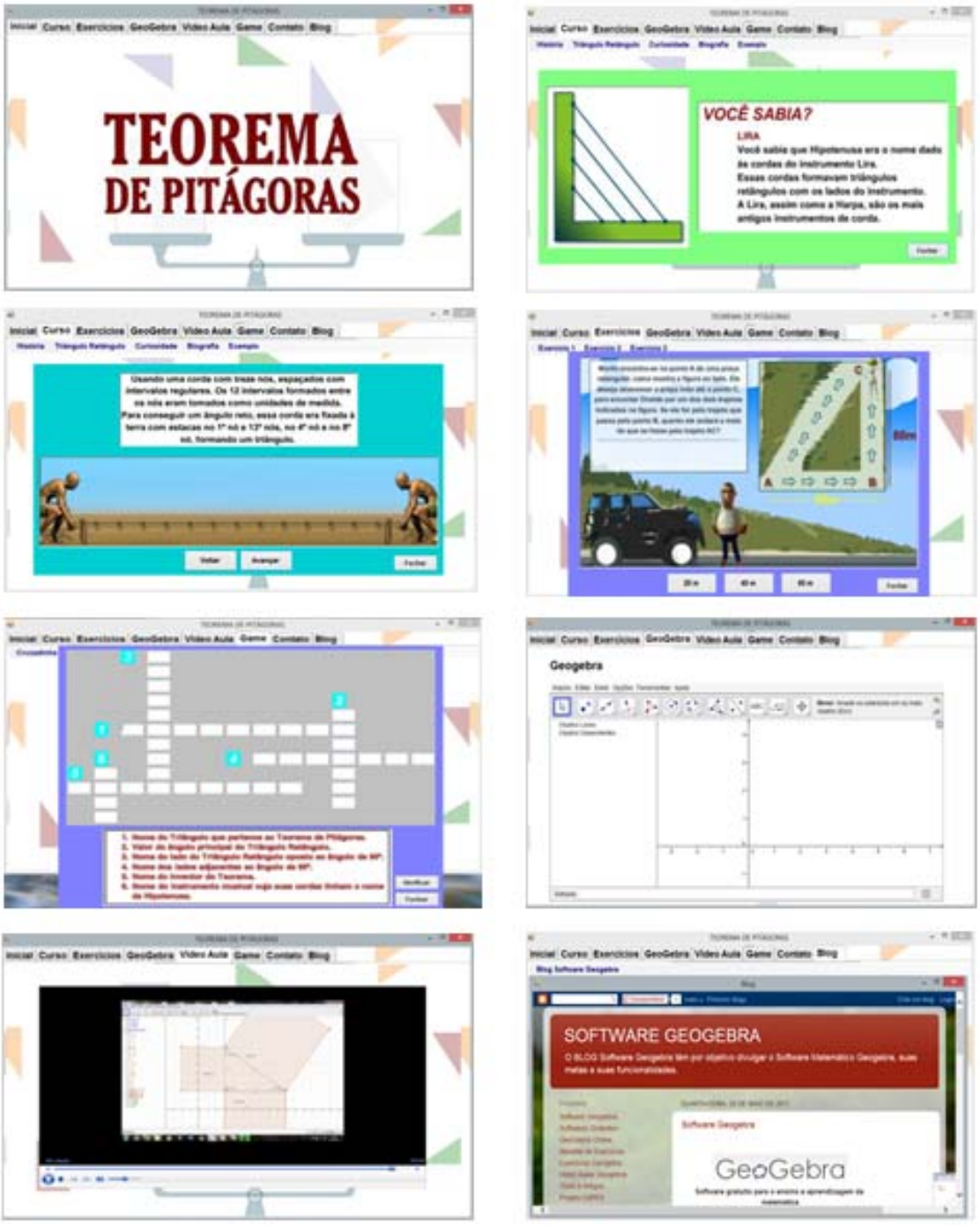


Figura 1: Telas do Objeto de Aprendizagem de Matemática
Fonte: (autor).

OPTIMIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA CON APLICACIONES DE GEOGEBRA EN UN HIPERTEXTO

Anabela Luján Erni
anaerni@hotmail.com
Universidad Nacional de Luján - Argentina

Modalidad: Comunicación
Nivel educativo: Curso universitario de primer año
Palabras clave: Hipertextualidad – Trigonometría – Aplicaciones en Geogebra

Resumen

Se diseña por medio del programa Power Point un hipertexto, dirigido a alumnos de de primer año de la Universidad Nacional de Luján, en el que se estudian las funciones trigonométricas, sus características, transformaciones y aplicaciones. El desafío de interpretar la lectura a partir de la red de significación que cada lector construye, permite establecer interacción entre el contenido, la persona y la computadora. En el trabajo se expone: introducción, objetivos, conocimientos previos, desarrollo del tema (funciones trigonométricas) y bibliografía. Con respecto a los conocimientos previos se brinda la posibilidad de recuperar algún contenido olvidado con una pequeña ejercitación. En lo que refiere a los contenidos a enseñar, además de la explicación teórica se ofrecen imágenes animadas diseñadas con el programa Geogebra, donde el alumno no sólo deberá observar, sino también modificar, explorar y conjeturar. Por medio de estas imágenes se propone una práctica de geometría dinámica facilitando la formulación de conjeturas sobre las propiedades involucradas. Entre dichas imágenes podemos mencionar: circunferencia trigonométrica; relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas; construcción de las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente a partir de la circunferencia goniométrica y las transformaciones en el plano como traslaciones, simetrías y dilataciones, ejemplificadas en la gráfica de la función seno.

Descripción de la unidad didáctica

Inicialmente se describe la secuencia didáctica con su introducción, sus objetivos, sus conocimientos previos y sus contenidos a enseñar. Después se exponen las tareas que componen la secuencia didáctica. Y por último, se menciona la bibliografía.

Introducción

Integrar geometría, algebra y análisis en un material hipertextual involucra un reto disciplinar y didáctico para docentes y estudiantes y una alternativa exploratoria conceptual para la enseñanza y aprendizaje de matemática, poniendo en juego competencias metamatemáticas asociadas a diversos marcos.

A lo largo de todo el material desarrollado se han diseñado situaciones didácticas de matemática dinámica, que dan pie a un tratamiento algebraico, analítico y geométrico. Se ejercitan habilidades de pensamiento ampliando el campo de la reflexión y

fomentando la comprensión. Se exploran diferentes estrategias que permiten por ejemplo descubrir: la relación entre el ángulo de una circunferencia y la longitud de arco correspondiente, las relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas, la construcción de las funciones a partir de la circunferencia goniométrica, entre otras.

De esta forma, se introducen las funciones trigonométricas por medio de su relación con el estudio de la geometría de los triángulos.

Objetivos

Los objetivos propuestos para el desarrollo de la unidad didáctica son:

- ✓ Convertir del sistema sexagesimal al circular y viceversa.
- ✓ Interpretar y relacionar las variaciones y signos de las funciones trigonométricas con respecto a ángulos de la circunferencia trigonométrica o goniométrica.
- ✓ Esbozar y analizar el comportamiento de las funciones trigonométricas, interpretando los conceptos de amplitud, período y desplazamientos verticales y horizontales.

Para cumplir con el primer objetivo se introducen actividades con el propósito de establecer relaciones entre los sistemas de medidas de ángulos.

En cuanto al segundo objetivo, se presentan técnicas para el estudio de la circunferencia trigonométrica, que permitan identificar la variación de las funciones de los ángulos notables y sus relaciones con ángulos de demás cuadrantes.

Con respecto al tercer objetivo se proponen actividades con el fin de comprender el comportamiento de las funciones y su relación con la circunferencia goniométrica.

Contenidos previos

1. Sistema sexagesimal: operaciones.
2. Clasificación de ángulos: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios.
3. Triángulos: Clasificación. Ángulos de un triángulo. Alturas de un triángulo. Congruencia de triángulos. Teorema de Pitágoras.
4. Razones trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos.
5. Funciones: concepto. Dominio e imagen. Análisis de funciones. Gráficas que se obtienen por simetría o traslaciones.

Contenidos a enseñar

1.- Medida angular: Ángulos orientados. Sistema de medición de ángulos (sexagesimal y radial). Conversión de ángulos.

2.- Circunferencia trigonométrica o goniométrica: Identidad pitagórica. Ángulos notables. Relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas.

3.- Funciones trigonométricas: Función seno y coseno (gráfica y análisis). Gráfica de las transformaciones. Función tangente (gráfica y análisis). Funciones cotangente, cosecante y secante.

Secuencia didáctica

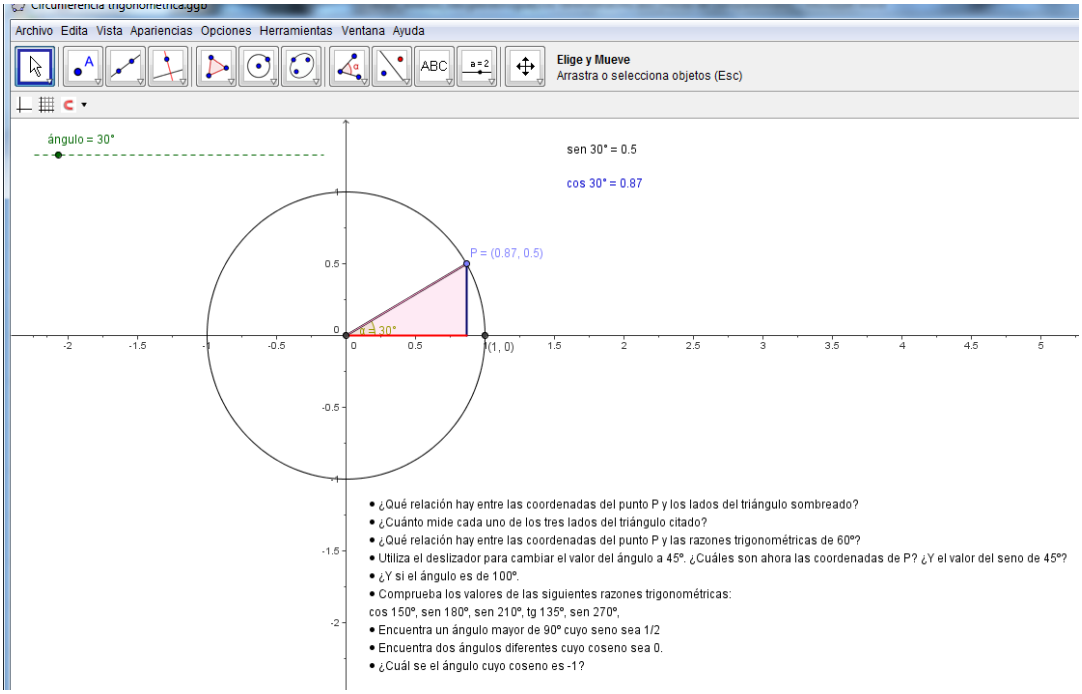
El diseño de este hipertexto ofrece a los alumnos la posibilidad de revisar algún contenido previo en caso de no recordarlo con una pequeña ejercitación a fin de interpretar la lectura actual. Los contenidos a enseñar se establecen en una estructura jerárquica, donde de los bloques principales se desprenden sub-bloques representados en los subtemas vinculados por nodos, ofreciendo a su vez, la posibilidad de una vuelta atrás a conocimientos previos generando una conexión conceptual y de navegación que muestra las relaciones. Además, para la comprensión y esclarecimiento de ciertos conceptos se ofrecen videos e imágenes animadas diseñadas en el programa Geogebra. De esta forma, se brinda un nivel de interactividad y una ambientación integral impulsando al alumno-lector a recorrer el texto.

Con el objeto de establecer la estructura de la aplicación del diseño hipertextual se crea un boceto que permite visualizar mejor los componentes enunciados, sus relaciones, los mecanismos de ubicación y navegación del lector, etc., al estilo de un mapa conceptual. A partir del boceto que se presenta en el ***Anexo I***, es posible tener una visión más acabada y concreta de la estructura general de la aplicación.

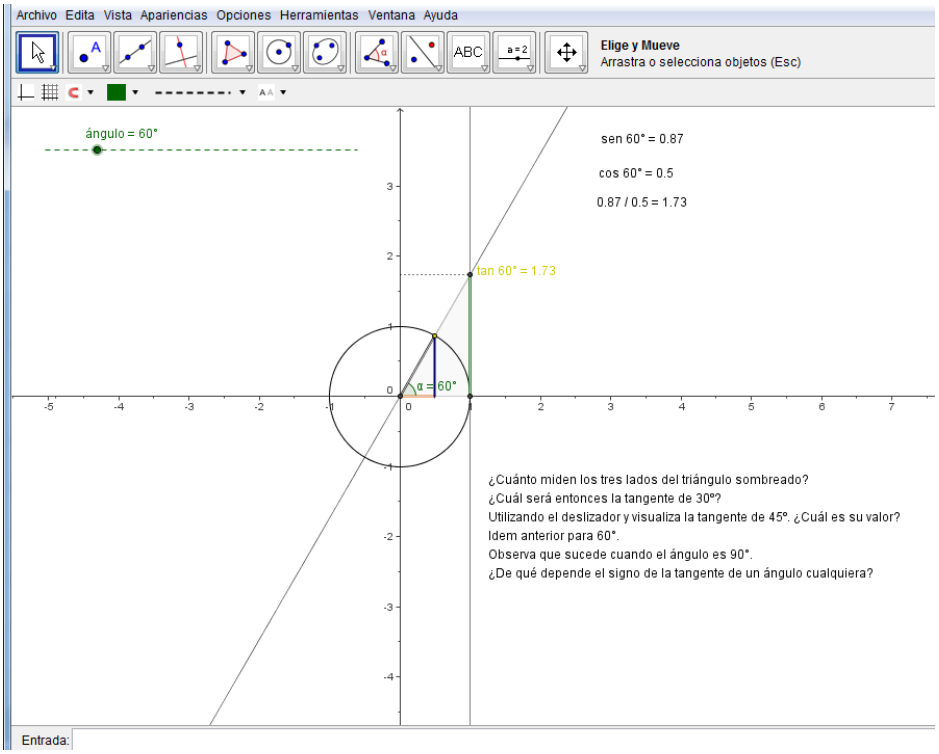
A lo largo del hipertexto se expone una explicación teórica de los contenidos a enseñar y una ejercitación al respecto, pero también ofrece visualizar el trazado dinámico de construcciones geométricas y la representación gráfica de las funciones trigonométricas en determinados momentos de la unidad. Entre ellos podemos mencionar:

- Al explicar los sistemas de medición de ángulos (sexagesimal y radial) se propone a los alumnos una actividad en Geogebra a fin de deducir la conversión de los ángulos.
- Al referirnos a la circunferencia trigonométrica se ofrece por medio del programa Geogebra:

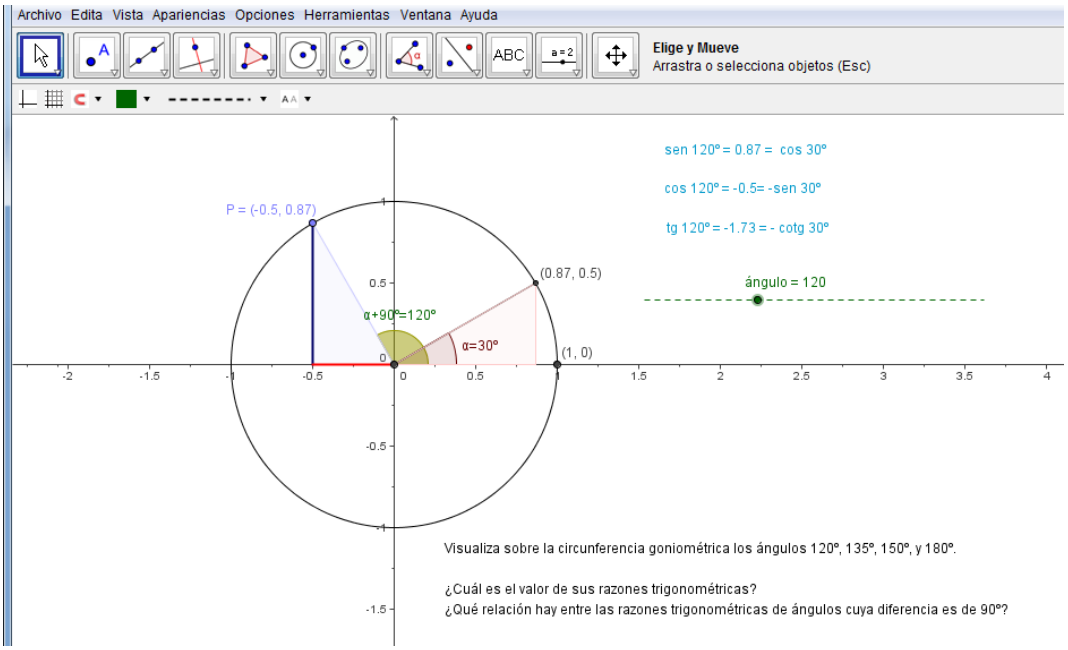
  1) Interpretar las posiciones y los valores que toman el seno y el coseno en la circunferencia entre $[0,2\pi]$.



2) Interpretar geométricamente la posición de la tangente y su valor con respecto al seno y coseno.



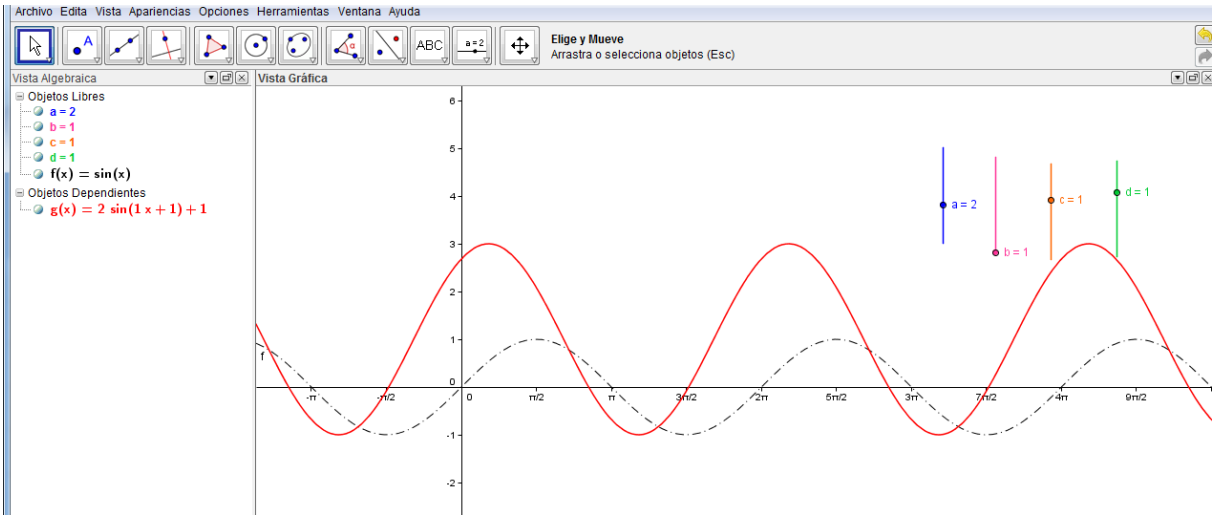
3) Observar las relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas que ilustramos, por ejemplo, con ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$.



❖ Al estudiar las funciones trigonométricas se presentan a través de animaciones en Geogebra:

1) La construcción de las funciones seno, coseno y tangente a partir de la circunferencia goniométrica, como se muestra en la siguiente imagen la construcción de la función seno.

2) Las transformaciones de las gráficas, como se muestra a continuación con la gráfica de la función seno:



Conclusiones

Al desarrollar el presente trabajo se aspiró realizar una mejora en el proceso de enseñanza – aprendizaje de los estudiantes. El estímulo de una lectura no secuencial, a la medida de los ritmos y necesidades de cada lector, y la utilización de la herramienta que permite interactividad, exploración, conjetura y elaboración, parecen ser recursos adecuados para lograr el propósito de un aprendizaje autónomo. Asimismo, cabe destacar la presencia del docente, como mediador, conduciendo esa búsqueda y acompañando los avances de los alumnos, brindándoles su ayuda al detectar errores y orientándolos en su corrección.

Con esta propuesta se inicia un camino que seguramente será revisado para introducir las mejoras necesarias con el objeto de optimizar su aplicación. Por otra parte, esta idea impulsa a producir nuevos materiales interactivos respecto a otros contenidos.

Como toda experiencia educativa, está sujeta a permanente revisión, cambio y ajuste. Las experiencias compartidas con otros colegas en estas próximas Jornadas serán fructíferas para tal fin.

Referencias

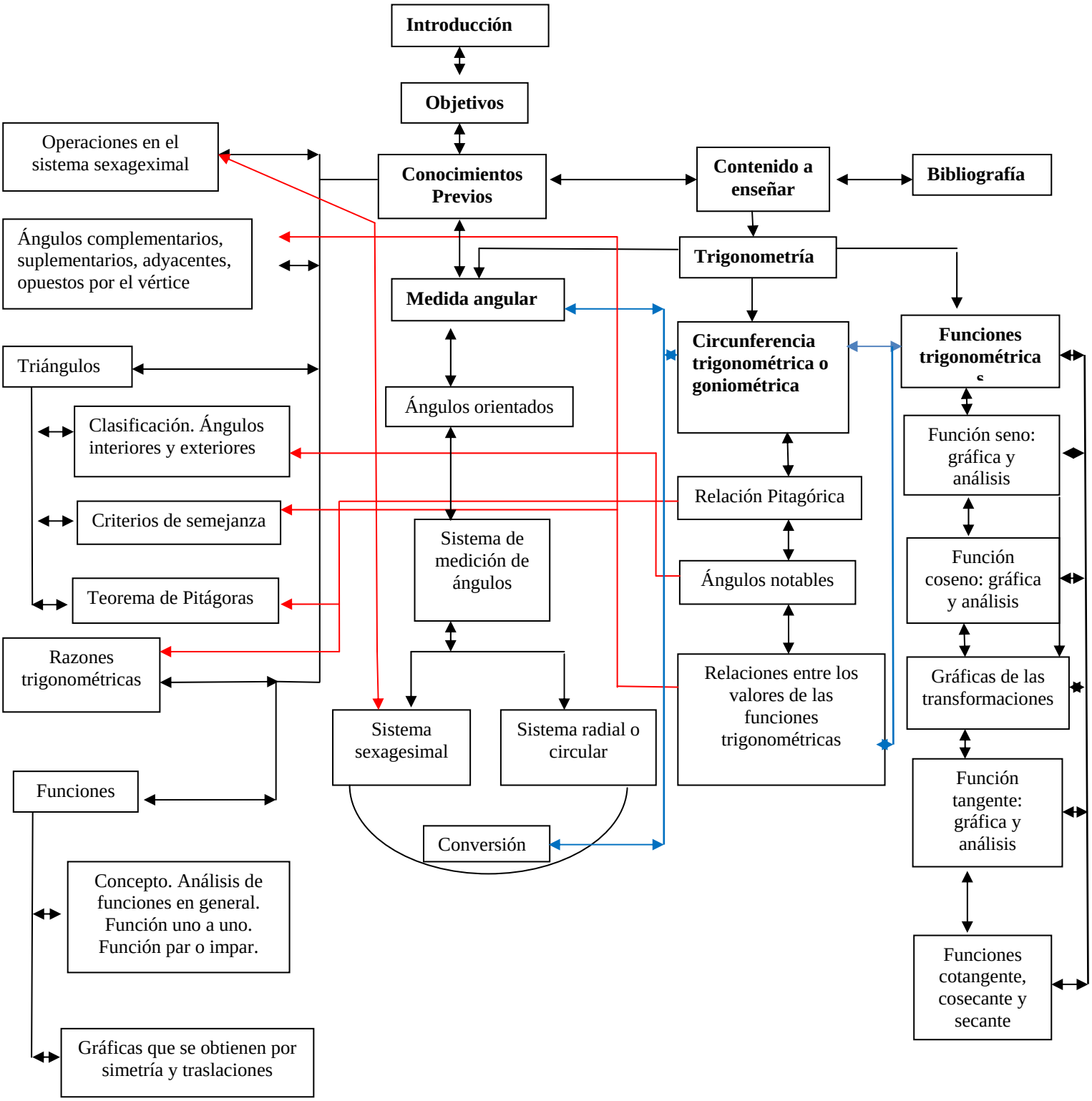
- Camuyrano, Net y Aragón. Matemática I. Editorial Estrada.
- Garaventa Luis, Legorburu Nora, Rodas Patricia. Carpeta de Matemática 8 y 9. Editorial Aique.
- Kaczor Pablo, Schaposchnik Ruth, Franco Eleonora, Cicala Rosa, Díaz Bibiana. Matemática I. Editorial Santillana.
- Novelli Alfredo. Elementos de Matemática. Impresiones Mlibros.
- Redlin, Stewart y Watson. Precálculo. Internacional Thomson Editores.

Páginas Web:

- http://www.geogebra.org
- htpp://www.geogebra.org/ayuda/search.html
- http://formacionprofesorado.educacion.es/index.php/es/materiales/236-geogebra-en-la-ensenanza-de-matematicas
- http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm

Anexo I

Estructura de la aplicación del diseño hipertextual (mapa conceptual)



Aclaraciones con respecto al mapa conceptual presentado:

Los bloques principales se destacan con negrita y de allí se desprenden los sub-bloques, donde cada uno de éstos últimos permiten seguir avanzando en la lectura, retroceder o dirigirse al concepto previo relacionado. Si bien la estructura de la lectura en cierto punto está dirigida, otorga la posibilidad al estudiante de sortear caminos en caso de que ya conozca el contenido anterior.

Las flechas rojas muestran los enlaces entre los conocimientos previos y los contenidos a enseñar y las fechas azules muestran una secuenciación de la lectura.

Cada sub-bloque a través de un ícono ofrece una pequeña ejercitación del tema expuesto con sus respectivos resultados, estimulando al lector a la autoevaluación y a poner en evidencia lo aprendido.

PROPOSTA DE UMA NOVA APLICAÇÃO COMO INSTRUMENTO PSICOPEDAGOGICA NA ESCOLA: O LABGG (LABORATÓRIO GEOGEBRA)

Eimard Gomes Antunes do Nascimento
eimard@yahoo.com
Mestre em Educação Brasileira pela Universidade Federal do Ceará (UFC) - Brasil.

Modalidade: Comunicação

Nível educativo: Ensino Fundamental, Médio e Superior.

Palavras-chave: Tecnologias. Informática. Educação matemática e tecnológica. GeoGebra.

RESUMO

Este artigo apresenta uma proposta usando o *software* GeoGebra, como instrumento psicopedagógico para o ensino nas escolas e universidades, com vista a promover a aprendizagem significativa. As organizações escolares e os educadores têm vivenciado um conjunto de desafios relativos ao processo ensino aprendizagem, em face do incremento, neste terceiro milênio, das novas tecnologias digitais, tais como: *playstation, internet, MP3, MP4, tablet, celulares de alta complexidade* e demais tecnologias que movimentam e transformam o dia-a-dia empírico e científico dos contextos educativos, mediante as redes sociais, as quais abarcam os mais diversos setores da educação formal, não-formal e informal. Assim, evidencia-se uma preocupação pedagógica no que tange aos procedimentos de ensino aprendizagem. O estudo, por conseguinte, apresenta uma proposta de criação de um laboratório GeoGebra (LABGG) de ensino e aprendizagem, com vistas a uma intervenção psicopedagógica na abordagem construtivista. A proposta objetiva ser implementada e implantada em contextos educativos diversificados nas organizações escolares formais e não-formais, agregadas em núcleos, por meio do LABGG. A proposta se consolida no pressuposto de que este software educativo promove ao aluno motivação e interesse pelo ensino-aprendizagem da matemática e estatística, uma vez que os aprendizes participam das práticas educativas em sessões de laboratório.

1 INTRODUÇÃO

O uso de recursos tecnológicos digitais ou tecnologias digitais interativas (TDI) no contexto escolar constitui uma linha de trabalho que necessita se fortalecer na medida em que há uma considerável distância entre os avanços tecnológicos na produção de softwares educacionais livres ou proprietários e a aceitação, compreensão e utilização desses recursos nas aulas ministradas pelos professores.

Santos (2007) afirma que apesar das tecnologias digitais se mostrarem influenciadoras às mudanças e transformações em âmbito educacional, suas utilizações nas aulas não correspondem ao que se espera. Em face da assertiva, a escola se ver diante da necessidade de redescobrir o seu papel social e pedagógico como unidade significativa no processo de crescimento e desenvolvimento da concepção de competência para a formação dos indivíduos que estão integrados a si. Omitir que o sistema educacional brasileiro se encontra em meio a uma expressiva crise torna-se impossível em face dos indicadores de rendimento escolar expresso pelo MEC/Inep (BRASIL, 2010). Convém ressaltar que em meio ao panorama de crise e problemas por que passa o sistema educacional brasileiro existe o avanço das tecnologias da informação. O crescimento das tecnologias educativas se constitui um fato visível.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN para o Ensino Fundamental e Médio expressam a importância dos recursos tecnológicos para a educação com vistas à melhoria da qualidade do ensino aprendizagem. Destacam que a informática na educação "permite criar ambientes de aprendizagem que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender" (BRASIL, 1998, p. 147).

Os PCN descrevem que aprender a utilizar a tecnologia diz respeito a compreender e usar o conhecimento científico-tecnológico. Além disso, ressaltam que o uso da tecnologia na educação não deve ser encarado apenas como uma inovação pedagógica para o uso de novos meios e instrumentos. É necessário saber que os diferentes recursos tecnológicos podem contribuir para a educação, identificando quando, por que e como a tecnologia pode mediar e auxiliar o ensino. Destacam, por conseguinte, que:

> [...] é indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se

> instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras. (ID IBDEM, p. 67)

Desta forma, o computador, mediante os *softwares* educativos, é utilizado como ferramenta auxiliar e pode se tornar um instrumento de estímulo aos discentes e um desafio aos professores, haja vistas que viabiliza a prática docente. Os professores, no entanto, têm formação incipiente em TDI. Valente (1998, p. 90) destaca a ideia da necessidade de uma educação para a compreensão, para a qualidade e interativa e assim se expressa:

> [...] a solução para uma educação que prioriza a compreensão é o uso de objetos e atividades estimulantes para que o aluno possa estar envolvido com o que faz. Tais alunos e objetos devem ser ricos em oportunidades, que permitam ao aluno explorá-las e, ainda, possibilitar aberturas para o professor desafiar o aluno e, com isso, incrementar a qualidade da interação com o que está sendo feito.

O *link* entre a teoria e a prática quando implantado de forma agradável e estimulante causa ao aluno o senso de curiosidade e, por via de consequência, o senso de pesquisa. Segundo Nascimento (2012), as ideias básicas do pesquisador Dewey (2007) sobre a educação estão centradas no desenvolvimento da capacidade de raciocínio e espírito crítico do aluno. Dewey defendia a democracia e a liberdade de pensamento como instrumentos para a maturação emocional e intelectual dos alunos. Afirma, outrossim, que o processo educativo consiste na adequação e interação do aluno com o programa da escola e das disciplinas, pois a concepção das relações entre um e o outro, tende a tornar a aprendizagem fácil, livre e completa.

No ensino tradicional, os recursos didáticos e pedagógicos (tecnologias) eram os quadros de demonstração da matéria, livros e cadernos. O aluno apenas "ouve", logo não é incentivado a ter uma postura investigativa (ativa) e interativa de modo que não é desafiado a construir seu próprio conhecimento. Numa aula de geometria, ministrada à luz da concepção pedagógica tradicional, o professor enuncia conceitos, definições e propriedades que, muitas vezes, são apenas memorizados ou decorados e, posteriormente, reproduzidos pelo aluno sem a devida compreensão.

As ideias de Dewey apregoam o princípio de que os alunos aprendem melhor realizando tarefas práticas associadas aos conteúdos estudados, fato que causa grandes estímulos e maior aprimoramento e memorização em vez de decorá-los. (NASCIMENTO, 2012).

Gravina (1998); Arcavi e Hadas (2000) explicam que a Geometria Dinâmica (GD) evidencia uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos geométricos. Deste modo, se pode introduzir o conceito matemático dos objetos a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa GeoGebra, surgindo daí o processo de questionamento, argumentação e dedução.

A avaliação do software GeoGebra, como ferramenta pscicopedagógica, nominada de Geometria Dinâmica e Interativa (GDI), se constitui uma nova metodologia para auxiliar a tecnologia tradicional, habitualmente utilizada por meio de recursos e procedimentos didáticos tradicionais, tais como: quadro de demonstração da matéria, aulas expositivas e papel. A epistemologia do Software GeoGebra possibilita ao docente interagir com os alunos mediante a tecnologia virtual e, por conseguinte, ter outra forma de ensino em ambiente de caráter laboratorial, situação que possibilita a prática da matéria geométrica estudada. A aplicação da GDI no contexto curricular se concretiza no Laboratório GeoGebra, denominado de LABGG.

2 O LABGG ?

O LABGG é a organização estrutural e metodológica para a aplicação do software de geometria dinâmica GeoGebra. Sua operacionalização se efetiva através de módulos de ensino-aprendizagem relativos aos assuntos prescritos na integralização curricular do projeto pedagógico da matéria objeto de estudo. O LABGG deve ser implantado no contexto educacional por ser um instrumento psicopedagógico adequado ao ensino-aprendizagem em matemática e em estatística. A formatação de o LABGG prover executar uma metodologia por assuntos em Núcleos e Níveis escolares, denominados de núcleos, assim mencionados: núcleo do ensino infantil (NEI), do ensino fundamental I e II (NF1 e NF2), do ensino médio (NEM), do ensino profissionalizante (NEP) e do ensino superior (NES), conforme demonstra a figura 1, a seguir.

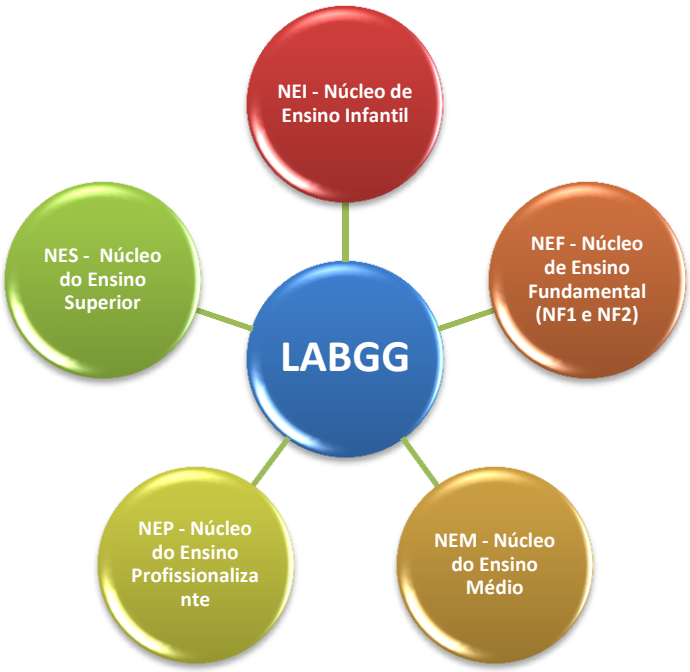


Figura 1 – Organização do LABGG por seus Núcleos.

O funcionamento LABGG tem por finalidade promover o processo de ensino-aprendizagem em matemática e estatística, mediante uma tecnologia educacional na vertente psicopedagógica com vista a fomentar conhecimentos e saberes com foco na álgebra, geometria e estatística. A habilidade de redimensionar conceitos básicos, através da manipulação de software, deve ser alicerçada e construída à medida que se fornece ao aluno os materiais instrucionais de apoio didático, baseados nos elementos concretos representativos do objeto geométrico a serem estudados e aprendidos. Montenegro (2005) referenda este pressuposto declarando que no ensino fundamental e médio, os alunos devem aprender utilizando com modelos sólidos e material visual.

A configuração da estrutura e organização do LABGG se apresenta de acordo com o organograma codificado por níveis de ensino escolar descrito e o elenco de conteúdos da matéria do estudo, delineados em módulos, tal como expressa a figura 2.

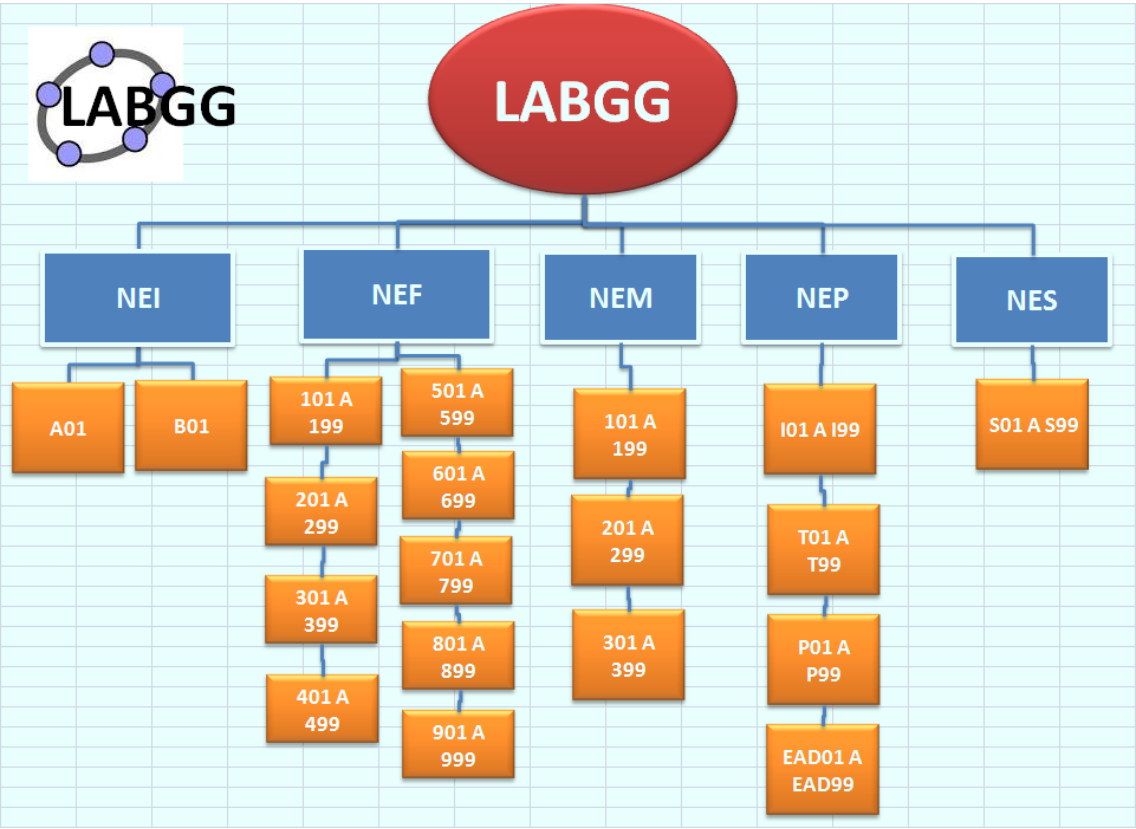


Figura 2 – Configuração da estrutura e organização do LABGG

Os módulos do LABGG serão inicialmente estruturados conforme o organograma acima, onde descreve a seguinte nomenclatura:

Núcleos	Codificação dos Módulos	Nomenclatura do modulo
NEI	A01 a A99 B01 a B99 ...	Primeiro ao nonagésimo nono módulo do nível A Segue-se para outros níveis.
NEF	NF1-101 a NF1-199 ...	Primeiro ao nonagésimo nono módulo do 1º Ano do Ensino Fundamental 1
NEM	NEM-101 a NEM-199 ...	Primeiro ao nonagésimo nono módulo do 1º Ano do Ensino Médio

NEP	(a) NEP-I01 A NEP-I99 (b) NEP-T01 a NEP-T99 (c) NEP-P01 a NEP-P99 (d) NEP-E01 a NEP-E99	Primeiro ao nonagésimo nono módulo do Núcleo profissionalizante nos seguintes níveis: (a) Iniciante (b) Técnico (c) Profissional (d) Educação a Distancia – EaD.
NES	NES-S01 a NES-S99	Primeiro ao nonagésimo nono módulo do Ensino Superior

D´Ambrosio (1986) chama atenção para o fato de que, em situações diversas, o aluno se mostra mais confortável com o uso de tecnologias mediadas pelo uso do computador e *softwares* do que somente com os professores, visto que, nos últimos tempos as crianças e jovens fazem uso da tecnologia virtual em jogos e brincadeiras que são dispostos no mesmo formato da tecnologia educacional. Veras (2007) ressalta a necessidade de realizar avaliação de projetos e programas de ensino e aprendizagem, em especial, os vinculados à tecnologia educacional de modo a manter os êxitos e sucesso dos procedimentos pedagógicos e instrucionais e redimensionar os processos e práticas educativas inadequadas.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em face do exposto, têm-se a convicção que o LABGG se fundamenta na perspectiva didática pró-ativa e interativa, vivenciada em duas representações diferentes do mesmo objeto que interagem entre si: no caso, a representação geométrica e sua representação algébrica. A utilização do *software* como recurso didático no ensino da Matemática se constitui um caminho para o professor vivenciar com os alunos o processo ensino-aprendizagem a satisfação, motivação, competência e habilidade em relação à aprendizagem preconizada pelo Plano de Desenvolvimento da Educação do Brasil, com vistas ao desenvolvimento científico, tecnológico, social e humanístico da Nação e com qualidade de vida sustentável.

A implementação e implantação do LABGG pode substituir as aulas tradicionais, uma vez que proporciona situações enriquecedoras devido a manipulação de materiais virtuais, o que possibilita a construção e criação de conceitos e resignificados redimensionados na vivência, interação e fixação de conhecimentos e saberes.

Oportuno esclarecer que software GeoGebra é um programa de acesso livre, com versão permitida mediante cópia e distribuição para fins educativos, porém, expressamente vetado para fins comercias. Pode-se usar tanto no ambiente do WINDOWS, produzido pela Microsoft e disponibilizado, também, no ambiente LINUX.

Sugere-se que professores e pesquisadores apliquem o GeoGebra com vistas à avaliação desse software educativo no contexto escolar com a finalidade de auferir certificação, validade de eficiência e efetividade. O incremento de trabalhos futuros em matemática e áreas afins tornará possível reafirmar a cientificidade pedagógica da tecnologia educacional arrimada em um método instrucional de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. & N. HADAS (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers ofr Mathematical Learning* 5(1), 25–45.

BRASIL. MEC. SEMTEC. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília, 1998.

D´AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação:** reflexões sobre educação e matemática. 2 ed., Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

DEWEY, J. **Democracia e educação***:* capítulos essenciais. São Paulo: Ática, 2007.

FREIRE, P. (1987). **Pedagogia do oprimido**, Volume 21. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. *A* **Aprendizagem da matemática em ambientes informatizados.** IV Congresso RIBIE. Brasília, 1998.

MONTENEGRO, Gildo A.. **Inteligência visual e 3-D**. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

NASCIMENTO, Eimard G. A. do. **Avaliação do software GeoGebra como instrumento psicopedagógico de ensino em geometria.** 112f. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2012.

_____. **Avaliando o impacto das ideias de John Dewey introduzidas por Anísio Teixeira na educação**. Em: II Simpósio de Pós Graduação em Educação da UERN, 2011, Mossoró-RN, 2011.

_____. **Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola**. Em: XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN 1808-8457, 2012, XII Encontro de iniciação à docência da Unifor, ISSN 2175-5396, 2012, Fortaleza-CE, 2012.

SANTOS, V.P. **Interdisciplinaridade na sala de aula**. São Paulo: Loyola, 2007.

VERAS, Neide F. M. **Avaliação do ensino fundamental na modalidade ciclos de formação:** caracterização e contextualização. 234f. Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2007.

REFLEXIONES EN TORNO AL DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA PROPUESTA DE ACTIVIDADES SOBRE CÓNICAS USANDO GEOGEBRA: INTERCAMBIO BRASIL-ARGENTINA

Pérez Medina Carlos Roberto
mathperez@gmail.com
Doctorando del Programa Doctorado en Ciencias de la Educación, Universidad Nacional de Córdoba. Docente de la Universidad Nacional de Río Negro (UNRN), sub-sede General Roca, Becario Doctoral del IIECNyMat, Sede Alto Valle y Valle Medio. Argentina.

Souto Daise Lago Pereira
daiselago@gmail.com
Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidades Estadual Paulista (UNESP), campus de Rio Claro, SP. Docente da Universidade do Estado do Mato Grosso. Membro do GPIMEM desde 2010. Brasil.

Modalidad: Comunicación
Nivel Educativo: Terciario, Formación y actualización docente.
Palabras clave: Cónicas, Álgebra, Evaluación, Educación Matemática.

Resumen
Presentamos una experiencia de implementación en aula de un conjunto de actividades diseñadas sobre Cónicas para desarrollarse usando GeoGebra, abordando este contenido desde un tratamiento algebraico, por medio de la manipulación y análisis de las expresiones algebraicas de éstas curvas y su correspondiente efecto gráfico. Son dos los aspectos que queremos resaltar de la propuesta: uno que corresponde a la implementación es el uso del software tanto en una actividad de clase como en una de evaluación, pues se usó como recurso para evaluar en un examen parcial de la materia; y el otro que corresponde al diseño, es el uso de una personalización de la barra de herramientas del programa como variable didáctica de la propuesta. La implementación se efectuó en el curso Geometría del primer año de la carrera Diseño de Interiores y Mobiliario de la UNRN (General Roca-Argentina), y el diseño de las actividades se realizó como una actividad de evaluación en el marco del curso de extensión online "Tendências em Educação Matemática" que ofrece la UNESP (Rio Claro-Brasil). En este contexto la experiencia que presentamos constituye un intercambio entre Brasil y Argentina en el ámbito de la Educación Matemática que es fructífero y merece ser destacado.

Curso *Tendencias em Educação Matemática*. Este curso de extensión se viene ofreciendo desde el año 2000 en la modalidad a distancia online, a profesores de matemáticas de varias partes de Brasil y de otros países, desde el *Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"*, Rio Claro-São Paulo-Brasil (IGCE-UNESP). Está coordinado por el Prof. Marcelo de Carvalho Borba quien es docente del *Programa de pós-graduação em Educação Matemática* de la UNESP–RC, y coordinador del *Grupo de Pesquisa em Informática outras mídias e Educação Matemática* (GPIMEM). El curso se configura como un contexto práctico para la formación continua de los profesores y tiene como

objetivo general: analizar críticamente algunas de las tendencias en educación matemática, iniciar un diálogo acerca de qué es la investigación en educación matemática y proporcionar a los maestros una experiencia en la práctica docente apoyada por diferentes enfoques pedagógicos.

El marco inicial del intercambio entre Brasil y Argentina, al que nos referimos en el resumen, fue la décima edición del curso, en el que el primer autor de este artículo actuó como un participante y el segundo autor como investigador y auxiliar en la organización. En este espacio fueron discutidas críticamente algunas de las tendencias en educación matemática, y además, fueron discutidos otros temas sobre el estudio de las secciones cónicas con el software de matemáticas dinámica – GeoGebra (http://www.geogebra.org). El entorno virtual de aprendizaje en el que se desarrolló el intercambio en el curso fue Tidia-Ae (http://tidia-ae.rc.unesp.br), que cuenta con herramientas como chat, correo electrónico, foros y portfólio.

La propuesta del curso estaba anclada en una visión epistemológica de los *seres-humanos-con-medias* que cree en una forma cualitativamente diferente de producir conocimiento cuando las tecnologías de la información y la comunicación son incorporadas al contexto del aula de clase. Esta visión considera actores humanos y no humanos como protagonistas en el proceso, que forman una unidad inextricable que piensa en conjunto (Borba & Villarreal, 2005).

Cabe decir que las ideas que impregnan las tareas de naturaleza matemática, foco de este artículo, fueron apoyadas en el enfoque con tecnologías experimentales de Borba y Villarreal (2005). La naturaleza dinámica de algunos software educativos, como GeoGebra, permite que las actividades experimentales sean exploradas, ya que con este tipo de tecnología la elaboración de conjeturas, refutaciones y sus respectivas justificaciones pueden ser favorecidas (Souto & Santos, 2010).

Apoyados en estas ideas, el trabajo que se propuso a los participantes del curso fue realizar tres tareas que implican la construcción de la parábola, la elipse y la hipérbola, las cuales se describen en detalle en la siguiente sección.

Diseño de las actividades. Como actividad de evaluación final del curso virtual, se pedía diseñar tres actividades para el aula de clase sobre el tema cónicas, una por cada curva: parábola, elipse e hipérbola. El conjunto de las tres actividades conformaba el trabajo final, el cual tenía como consigna la siguiente (la que se pone aquí es la que corresponde a la parábola, y es la misma en el caso de la hipérbola y la elipse).

Esta atividade é apenas uma pequena parte do que podemos propor ao explorar o conceito de parábola. Vamos agora construir, experimentar, realizar outras análises e produzir uma atividade para se aplicada em sala de aula… É importante que seja bem detalhada, como se vocês estivessem planejando uma aula.

Para producir las actividades a ser aplicadas en el aula de clase para el estudio de las cónicas, se tuvo en cuenta fundamentalmente el tratamiento matemático que desarrollaba la propuesta de las actividades del curso virtual, con el propósito de elegir un camino que fuera distinto o poco indagado en éstas. La propuesta del curso consistía en explorar las cónicas como lugar geométrico por medio de la construcción de sus representaciones ejecutables a partir de los elementos geométricos básicos que las definen, también fueron incluidos aspectos algebraicos para el estudio pero no fueron tratados con igual profundidad. La siguiente tabla describe el enfoque de la exploración para las distintas partes de cada actividad, vale la pena decir que las tres actividades (parábola, elipse y hipérbola) guardaban la misma estructura general, por eso se presenta una tabla que describe la estructura de las tres:

Enfoque	Tratamiento matemático
Traza	A partir de los elementos geométricos básicos que definen la curva, la exploración se realiza por arrastre del punto generador y usando la herramienta *traza* para formarla. Se solicita la descripción de lo que ocurre en la pantalla gráfica por esta acción de arrastre y la formulación de relaciones respecto de los elementos geométricos de cada curva. Luego habilitando la ventana algebraica y continuando con el arrastre, se pide describir qué ocurre también en ésta en relación con el gráfico.
Lugar geométrico	A partir de los elementos geométricos básicos que definen la curva, la exploración aquí utiliza la herramienta *Lugar Geométrico*. Agregando a la representación otros elementos geométricos, se pide identificar las relaciones que caracterizan las propiedades geométricas de la curva y su observación en la ventana algebraica.
Ecuación canónica	A través de la barra de entrada se ingresa la ecuación canónica de la curva y se pregunta qué ocurre con la ecuación y el gráfico al redefinir los valores de sus parámetros.
Ecuación por traslación de ejes	El estudio se realiza a través de la redefinición de los valores de los parámetros de la ecuación de la curva obtenida a través del proceso de traslación de ejes.

Tabla 1. Estructura de las actividades sobre cónicas del curso virtual

Como se puede ver en la tabla, el tratamiento matemático que desarrolló la propuesta del curso virtual, estuvo fuertemente orientado hacia el lugar geométrico, aunque también contempló el lado algebraico, el énfasis no estaba puesto en éste aspecto y fue poco explorado. Dada esta situación, elegimos la perspectiva algebraica como camino para el estudio y análisis de las cónicas en la propuesta de actividades que se pedía diseñar. Se decidió aprovechar algunas inquietudes que las actividades del curso

dejaban abiertas en algunos de sus incisos del enfoque “Ecuación canónica”, en los que se preguntaba por lo que ocurre con la ecuación y el gráfico cuando se redefine el valor de los parámetros. De esta manera, se decidió que el abordaje del contenido se hace desde un tratamiento algebraico, por medio de la manipulación y análisis de las expresiones algebraicas de éstas curvas y su correspondiente efecto gráfico.

El objetivo general de la propuesta de actividades es la construcción de conocimiento en dos niveles: uno es el matemático sobre el tema cónicas, particularmente sobre la relación que se establece entre la ecuación y su gráfico cartesiano; y otro es el práctico en el uso del software, orientado hacia el uso de herramientas de tipo algebraico y el manejo de propiedades de curvas como color, sombreado y rastro. Como características generales de estructura de las tres actividades de la propuesta están las siguientes: Se usan la ventana gráfica con los ejes coordenados y la ventana algebraica; La actividad se estructura en partes que estudian un aspecto particular de la curva, y al final de cada una se pide formular un enunciado que describa el comportamiento del gráfico según la acción sugerida sobre los parámetros de la ecuación y el gráfico mismo; Cuando hay acciones en el software que se deben repetir varias veces, éstas son indicadas a lo largo de la actividad de distintas maneras (Ej. Entrada de valores en la ventana algebraica; modificación de valores de los parámetros); se realiza una personalización de la barra de herramientas que consiste en ocultar el botón que corresponde a las herramientas de cónicas. En el anexo se muestra el esquema general del diseño de las actividades propuestas para parábola e hipérbola, la de elipse está completa.

Implementación de las actividades. La descripción que se realizamos en este apartado corresponde apenas a la experiencia en cuanto a metodología de implementación de las actividades en la clase, dado que la extensión del documento no da lugar a presentar los análisis de las respuestas de las alumnas, realizados respecto de los propósitos de aprendizaje que se pretendían con las actividades.

La implementación de las actividades se realizó en la asignatura *Geometría* (cursada del 2011) de la carrera *Diseño de Interiores y Mobiliario*, que se ofrece en la Universidad Nacional de Río Negro, en la sub-sede General Roca de la sede Alto Valle y Valle Medio (Argentina). El tema curvas cónicas correspondía a la unidad 4 cuyos contenidos son: *Manejo de sistemas 2D. Lugar geométrico. Sistema de coordenadas cartesianas. Ecuación de segundo grado en x e y. Obtención de las cónicas como secciones planas. Superficie cónica: Circunferencia, elipse, hipérbola, parábola*. El objetivo general de la

asignatura fue: *reconocer a la geometría para el estudiante de diseño de interiores y mobiliario, como un instrumento del cual se sirve, aprovechando todo lo que ella puede brindarle como técnica*. La metodología de clase planteada era de tipo dinámica con una participación activa del estudiante y clases teórico-prácticas, donde la presentación de la teoría se realiza en el momento que la actividad o el desarrollo de la práctica, indique o requiera la formalización de los conceptos involucrados.

Las actividades de la propuesta exigen un conocimiento práctico de manejo del software relacionado con las herramientas de tipo algebraico y de gráficas cartesianas, que los estudiantes de la asignatura no poseían, puesto que las unidades anteriores al tema de cónicas en las que ellos habían trabajado también con el software, correspondían a una geometría plana no métrica por lo que las herramientas que conocían hasta ahora eran de esta índole. Por esta situación, fue necesario que se destinaran tres clases para la implementación, una por cada actividad, y que la metodología de trabajo fuera diferente para cada una. En consecuencia se realizaron modificaciones muy generales a las actividades, fundamentalmente de formato. Vale la pena resaltar, que en las tres actividades se personalizó la barra de herramientas restringiendo el botón que corresponde a las herramientas de cónicas, aspecto que fue clave para conseguir cumplir los propósitos de la actividad.

CÓNICA	ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN
Parábola	Actividad de exploración dirigida por el profesor.	Se desarrolló a modo de exposición del profesor con una presentación de diapositivas. Esta metodología de trabajo tenía un doble propósito: 1) que los estudiantes aprendieran el contenido matemático parábola, y 2) el manejo del software en las herramientas específicas para ecuaciones y gráficos en el plano cartesiano.
Elipse	Actividad de Trabajo Práctico desarrollado en clase. (Anexo)	Los alumnos trabajan de manera individual con la actividad impresa en papel y el profesor acompaña el proceso respondiendo a las preguntas que surgen. Producto de la actividad, los estudiantes debían entregar por escrito las respuestas a las preguntas planteadas en la actividad y por mail los archivos geogebra en los que trabajaron. Material que fue utilizado con el propósito de hacer una devolución a los estudiantes sobre su trabajo.
Hipérbola	Actividad de examen parcial de	En el segundo examen parcial se evaluó el tema de curvas cónicas, y dado que faltaba estudiar la hipérbola, se decidió

	la materia.	diseñarlo en dos partes. En la primera parte se evaluó el contenido de parábola y elipse a partir de preguntas de distinto tipo. En la segunda parte del examen se evalúa el tema de hipérbola, con una actividad exploratoria sobre su ecuación, del mismo estilo que las de elipse y parábola desarrolladas en clase, pero limitada a un solo caso.

Tabla 2.Descripción de las actividades implementadas en el aula de clase

Algunas Reflexiones. Las reflexiones que aquí presentamos se han elaborado a partir de las respuestas dadas por el primer autor a preguntas formuladas por el segundo autor, con base en los propósitos de la implementación de las actividades y la valoración del trabajo de los alumnos en la clase a través del registro escrito y digital de su actividad.

¿De qué manera los alumnos realizan o formulan las hipótesis? La mayoría de los alumnos formulan las hipótesis en términos de los casos particulares con los que han trabajado como una lista de hechos que observan en la ventana gráfica sobre el gráfico de la ecuación que se está estudiando, tal listado son ideas o frases que guardan poco o nada de cohesión entre ellas. En algunos casos, aún cuando en la consigna se explicita que se debe formular un enunciado que describa en el caso general el comportamiento del gráfico de una cierta ecuación, los estudiantes explicitan las condiciones impuestas sobre los valores de los parámetros de los casos particulares a los que se refieren. Otros estudiantes, sí formulan las hipótesis en términos generales e imponen las condiciones que vinieron usando para los casos particulares, usándolos como ejemplos. La formulación de hipótesis sucede en la medida en que el alumno consigue "pensar junto" con el software, pues en esos momentos es posible verificar que los feebdbacks del GeoGebra provocan reorganizaciones en el pensamiento de los alumnos. Ese aplicativo puede ser, por tanto, considerado un autor en el proceso de formulación de hipótesis. Ese tipo de observación converge para la visión epistemológica de los seres-humanos-con-medias, propuesto por Borba (1999).

En su opinión ¿cuál es el rol que el software desempeña en la formulación de tales hipótesis? El rol es el de ser un protagonista en la visualización de los hechos geométricos que dependen de las entradas algebraicas que hacen los estudiantes, en la mayoría de los casos. De esta manera, el software entrega feedbacks a las acciones de los alumnos, reorganizando sus pensamientos, a partir de la presentación de los gráficos de las curvas de las ecuaciones que se estudian, y ver los cambios que se generan en éste

según la variación de los parámetros. Ese tipo de comportamiento está caracterizado como un proceso parcial de "moldagem recíproca" como proponen Borba y Villarreal (2005). En los casos en que las hipótesis están formuladas en términos de “proceso”, el software también ayuda de un modo diferente, del que dependen los hechos matemáticos que los estudiantes pueden observar, el software les muestra qué pasa o puede pasar y les modifica su forma de pensar sobre las actividades dependiendo del uso del programa.

¿Cuáles son las dificultades operacionales que los alumnos tuvieron con geogebra? Las dificultades operacionales que los alumnos tuvieron con el geogebra fueron relativas al funcionamiento del software básicamente, cuando querían cambiar los valores de los parámetros, en algunas ocasiones no se los permitía, por ejemplo. Tuvieron dificultad en la entrada de las expresiones algebraicas por la sintaxis propia que exige el programa (exponente cuadrático), también en la conservación del rastro de la curva dado que al mover la pantalla gráfica con zoom o la herramienta “Desplazar vista gráfica”, se borraba de sus pantallas el rastro que había dejado algunas curvas que ya habían graficado, y esto en principio fue un problema.

¿Qué de las actividades fue novedad para los alumnos y qué no lo fue? ¿Porqué? Consideramos que la novedad fue que se comenzó a trabajar en una geometría analítica, incluyendo por supuesto ejes coordenados en el plano, coordenadas para los puntos, ecuaciones para las líneas o curvas en el plano; la entrada de expresiones algebraicas, el uso y la manipulación de objetos sobre la ventana algebraica, la herramienta de rastro y lo que les ofrecía ésta para responder a las preguntas formuladas. También fue novedad el estilo de preguntas que se les estaban haciendo, el tipo de situaciones de visualización planteadas, el mismo tipo de actividad exploratoria en el sentido de deducir cosas de lo que estaban haciendo con el software. Asimismo, que ahora los trabajos prácticos de la clase los entregaban en el formato digital del software, y el trabajo independiente de las estudiantes con el programa, sin la guía o dirección del profesor. En otras palabras, podemos decir que el abordaje-experimental-con-tecnologías (Borba & Villarreal, 2005), propuesto durante el curso "Tendência em Educação Matemática", tiene reflejos en la disciplina, siendo considerada, una novedad interesante.

¿Qué de la planeación no resultó? De lo que se planeo para la clase y no se logró llevar a cabo fue que las actividades fueran desarrolladas en su totalidad, que las estudiantes tuvieran un trabajo más autónomo, que manejaran conceptos básicos de matemáticas para que dedujeran de las preguntas las relaciones implícitas que se estaban sugiriendo,

que tuvieran un mayor nivel de reflexión (autónomo) trabajando con el software. En síntesis, verificamos que, durante o desarrollo de las actividades, se formó un colectivo pensante de seres-humanos-con-GeoGebra.

Conclusiones

Haber logrado sacar adelante esta experiencia de intercambio académico, a través de una comunicación online, a partir de una instancia de formación docente continua en un curso de extensión y su implicancia en nuevos enfoques de aplicación en el aula de clase, con una etapa de diseño coordinada desde Brasil y otra de implementación vivenciada en Argentina, constituye un avance importante para consolidar el área de estudio de la Educación Matemática en nuestra región con perspectiva de apertura a nuevos temas de estudio y propuestas de trabajo académico.

Presentamos aquí solo una conclusión breve y general dada la limitación del número de páginas permitido para este documento, sin embargo las consideraciones extendidas las exhibiremos en la comunicación presencial en el evento.

Referencias Bibliográficas

- Borba, M.C. & Villarreal, M.V. (2005). Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New York: Springer.
- Nicolini, A., Santa Maria, G., Vasino, S. (1998). Matemática para arquitectura y diseño. Buenos Aires. Nueva Librería.
- Selva, A. C.V. & Borba, R.E.S. (2010). O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Souto, D. (2012). Refletindo sobre o papel do software GeoGebra na produção de conhecimentos matemáticos construídos por um coletivo pensante formado por humanos e mídias. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.
- Souto, D. & Santos, S. (2010). Explorando o ensino de cônicas no geogebra. Anais do X Encontro Paulista de Educação Matemática: X EPEM. São Carlos.
- Spinadel, V.W. de., Nottoli, H. (2008). Herramientas matemáticas para la arquitectura y el diseño. Buenos Aires. Nobuko

ANEXO: DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

ACTIVIDAD DE PARÁBOLA. El propósito de esta actividad es la exploración de la ecuación cuadrática general $y = ax^2 + bx + c$ analizándola a partir de cada uno de sus términos para deducir sus propiedades y características. Se comenzará con el término cuadrático, luego se incluye el término independiente y finalmente el término lineal. Esta exploración se hará usando el software geogebra y sus herramientas.

Partes 1 y 2: Exploración del término cuadrático $y = ax^2$. Explora la concavidad de la parábola al considerar varias ecuaciones para distintos valores de *a*, entrando inicialmente una ecuación por cada valor de *a* dado y luego cambiando el valor del parámetro *a* de la ecuación. Se usa la propiedad del color de la gráfica para observar su comportamiento y formular un enunciado que lo describa usando como condicionales "si $a < 0$ " y "si $a > 0$ ". En la parte 2, el parámetro *a* es manipulado como *deslizador*, y se usa la herramienta *rastro* del gráfico para estudiar la propiedad de la apertura de las ramas en relación con el valor absoluto de *a*.

Parte 3: Exploración incluyendo el término independiente $y = ax^2 + c$. Los dos parámetros *a* y *c* de la ecuación se manipulan como *deslizador* para estudiar qué del gráfico depende de cada uno: las coordenadas del vértice de la parábola, y cómo determinar en cualquier caso las intersecciones con los ejes y su coordenadas.

Parte 4: Exploración de la ecuación cuadrática completa $y = ax^2 + bx + c$. Se invita a proponer una manera de explorar la ecuación cuadrática general usando la herramienta *deslizador*, considerando la variación del parámetro *b* y su experiencia previa.

ACTIVIDAD EXPLORATORIA: ELIPSE. TRABAJO PRÁCTICO

El propósito de esta actividad es explorar la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y su gráfico correspondiente, a partir de la relación de tricotomía entre *a* y *b*. Se hará considerando en principio los elementos básicos del gráfico y la ecuación, para luego estudiar en profundidad cada uno de los casos de la tricotomía $a > b$, $a = b$ y $a < b$.

Parte 1: Exploración inicial. Usaremos para esta parte la ventana gráfica con los ejes coordenados, la ventana algebraica y el campo de entrada. Asegúrese que éstas estén habilitadas en el programa.

1. Introduzca *a* y *b* como parámetros desde el campo de entrada con los valores

siguientes $a = 5$ y $b = 3$.

2. Introduzca la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Describa el gráfico que se obtiene de la ecuación. Intente hacerlo con el mayor detalle que le sea posible.

3. En la ventana algebraica, cliquee con el botón derecho del mouse sobre la ecuación ingresada en el paso anterior, elija la opción *propiedades* y marque la opción *Muestra Rastro*, y elija en *Estilo* un *sombreado* de 25.

4. Ahora elija la opción *propiedades* para el parámetro *a* y cambie su valor por 5,5.

b) ¿Qué ocurre con la ecuación y el gráfico cuando se cambia el valor del parámetro *a*?

c) ¿Existe alguna relación con el gráfico descrito en el inciso a)?

Parte 2: Exploremos en profundidad el primer caso

5. Vuelva a cambiar el valor del parámetro *a* eligiendo un valor diferente, tal que $a > 5$. Elija por lo menos tres valores distintos.

d) ¿Qué relación existe entre los parámetros *a* y *b* según los valores usados hasta ahora en 1, 4 y 5?

e) ¿Qué se puede decir sobre lo que le ocurre al gráfico de la ecuación al cambiar el valor del parámetro *a* conservando la relación encontrada en d)?

f) ¿El gráfico de la ecuación se interseca con el eje *x*? ¿cuáles son las coordenadas de la intersección?

g) ¿El gráfico de la ecuación se interseca con el eje *y*? ¿dónde?

h) ¿Cómo se determinan en general la intersección del gráfico con los ejes?

i) ¿Cuál es la distancia entre los puntos de intersección del gráfico con el eje *x*? ¿y cuál es entre los puntos de intersección con el eje *y*?

j) Entre las distancias calculadas en el punto anterior ¿Cuál es la mayor?

k) ¿Qué relación encuentra entre la relación encontrada en d) y la respuesta al inciso anterior?

l) ¿Podría formular un enunciado en el que describa el gráfico de la ecuación teniendo como condición para los parámetros *a* y *b*, la relación encontrada en el inciso d)?

Parte 3: Situación particular, el segundo caso

6. Cambie los valores de los parámetros *a* y *b* de manera que la relación que se tenga entre ellos sea $a = b$. Sería importante considerar varios casos.

m) Describa el gráfico que se obtiene.

n) ¿Cuáles son las intersecciones del gráfico con los ejes? ¿cuáles las distancias entre

ellas sobre el mismo eje? ¿cómo son estas distancias?

o) ¿Cómo podría describir esta situación en una afirmación general?

Parte 4: Último caso de la tricotomía

7. . En la ventana algebraica, cliquee con el botón derecho del mouse sobre la ecuación y deshabilite su rastro. Luego cliquee sobre el parámetro *b*, elija la opción *propiedades* y cambie su valor asegurándose que se tenga la relación $a < b$. Considere varios valores para los parámetros.

p) ¿Cómo es este nuevo gráfico en relación con el que se obtuvo en el inciso a)?

q) ¿Cuáles son las intersecciones del gráfico con los ejes?

r) ¿las intersecciones con los ejes para este caso se determinan igual que en el inciso h)? En cualquier caso describa cómo.

s) ¿Cuáles son las distancias entre los puntos de intersección en cada eje?

t) ¿Cómo relaciona las distancias del inciso anterior y la relación pedida en el inciso 7?

¿Podría formular un enunciado en el que describa el gráfico de la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ teniendo como condición para los parámetros *a* y *b*, la relación dada en el inciso 7?

ACTIVIDAD DE HIPERBOLA. El propósito de esta actividad es realizar un estudio inicial exploratorio de la hipérbola en el ambiente dinámico del software geogebra, a partir de sus ecuaciones y en particular de sus parámetros *a* y *b*, mostrando la relación entre el gráfico y los valores posibles de dichos parámetros.

Parte 1: Exploración inicial para un parámetro. Reconocimiento del gráfico de la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ explorándolo a partir de distintos valores para sus parámetros *a* y *b*. Usando la herramienta *rastro* y *sombreado* para el gráfico, se estudia la relación que existe con los cambios de valores del parámetro *a*, cuál es la intersección del gráfico con los ejes coordenados y cómo determinar sus coordenadas identificados como los vértices.

Parte 2: Explorando para el otro parámetro. Estudiar la concavidad de las ramas de la hipérbola. Describir el comportamiento de la gráfica cuando el valor del parámetro *b* varía en un intervalo de 1 a 7. Usando la herramienta *color* de la gráfica y deslizador para el parámetro *a* se propone explorar si existe una relación entre el cociente b/a y la amplitud de las ramas del gráfico.

Parte 3: ¿Explorando otra ecuación? Se propone explorar la ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

RELACIONES ENTRE LA VARIACIÓN DE PARÁMETROS Y LOS EFECTOS GEOMÉTRICOS EN LA FUNCIÓN AFÍN: UNA PROPUESTA DE ANÁLISIS CON GEOGEBRA

Angela K. Cervantes M. – Nidia R. López A. – Rafael E. Luque A. - Juan L. Prieto G.
akcervantesm@gmail.com – nidialopez80@hotmail.com – luque14@gmail.com – juanl.prietog@gmail.com
Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

Modalidad: CB.
Nivel Educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Parámetro, función afín, recta, GeoGebra.

Resumen

En la actualidad, el tema de la integración eficiente de las tecnologías en la enseñanza de la matemática es un tema controvertido dada las dificultades que encuentran los profesores para establecer relaciones entre el contenido matemático y las posibilidades que ofrecen los programas informáticos. Al respecto, consideramos que una forma de favorecer tales relaciones es mediante la participación del profesorado en experiencias de formación que ayuden a mejorar la comprensión de los objetos matemáticos que se enseñan, apoyados en recursos tecnológicos como el GeoGebra. En tal sentido, este trabajo presenta una secuencia para analizar los efectos geométricos provocados por la variación de los parámetros de la función $f(x) = ax + b$*. Los efectos de cambio de dirección y traslación que experimentan la familia de rectas correspondientes a la expresión antes indicada, son visualizados y explorados mediante la herramienta "Deslizador" del GeoGebra. La secuencia consta de tres pasos referidos a los valores posibles de los parámetros* a *y* b*. Consideramos que este tipo de secuencias brinda al profesor la oportunidad de potenciar su pensamiento matemático, tener un mejor dominio de los contenidos que enseña y contribuir con su práctica en la mejora de la calidad de la matemática escolar.*

INTRODUCCIÓN

Por muchos años la enseñanza de las funciones reales de variable real (afín, cuadrática, etc.) en el nivel de Educación Media se ha caracterizado por el desarrollo de métodos centrados mayormente en la memorización y aplicación directa de fórmulas y procedimientos de la resolución de ejercicios típicos. Como consecuencia, muchas veces los alumnos no logran "comprender" las características esenciales y el comportamiento de determinadas funciones a partir de su forma simbólica (Darmawan & Iwan, 2011). La situación tiende a agravarse ante la presencia de profesores de Matemática con dificultades para interpretar adecuadamente el comportamiento de una función afín determinada desde el punto de vista de su gráfica. Este hecho refleja la necesidad de promover experiencias formativas donde los profesores de Matemática tengan la oportunidad de mejorar su capacidad, para comprender los efectos

geométricos asociados a la variación de los parámetros de la expresión que define una función.

Algunas investigaciones han mostrado lo provechoso de utilizar recursos tecnológicos, como el GeoGebra, para la aprehensión de tales efectos. Al respecto, Bayazit y Aksoy (2010) señalan que el GeoGebra es una herramienta de enseñanza potente que permite integrar el uso de las expresiones algebraicas y sus representaciones gráficas y, por lo tanto, si esta es integrada a la práctica del profesor los estudiantes tendrán una oportunidad de comprender el significado subyacente de las normas, los procedimientos y el hecho, conocimientos asociados a las nociones de ecuaciones y funciones. En este trabajo se plantea una secuencia para el análisis de la relación existente entre la variación de los parámetros de la función afín y los efectos geométricos que esta acción produce en la gráfica, haciendo uso del GeoGebra, con el objetivo de proporcionar a los profesores un instrumento para la apropiación, comprensión y enseñanza de estos contenidos.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS DEL DISEÑO

La secuencia aquí descrita se ha diseñado a partir de las siguientes consideraciones: (i) la variación de los parámetros en la expresión general $f(x) = ax + b$ produce efectos geométricos "globales" sobre la representación gráfica de la función afín correspondiente y, a su vez, (ii) estos efectos experimentados por la gráfica (la recta) pueden ser analizados mediante el uso del GeoGebra. Los efectos que se analizan son de dos tipos: *cambio de pendiente y traslación*, los cuales se caracterizan por las diferencias percibidas en cuanto al ángulo de inclinación y/o la posición relativa que tiene una recta con respeto a aquella correspondiente a la función identidad, cuya expresión es $f(x) = x$ y que actúa como referente. Dado que la variación de cada parámetro de $f(x) = ax + b$ produce un efecto único sobre la recta, se realiza el análisis de ambos efectos por separado, procurando con ello una mejor comprensión del tópico.

La utilización del GeoGebra para el análisis consiste básicamente en crear y usar dos deslizadores asociados unívocamente a los parámetros de la expresión $f(x) = ax + b$, cuyos valores se ajustan convenientemente, para cada intervalo [mínimo, máximo] establecido a lo largo de la secuencia. De esta manera, el uso de un deslizador, esto es, el ajuste del parámetro correspondiente dentro del intervalo conlleva a que se puedan apreciar las características de determinado efecto sobre la recta. Además, en el caso de

cambio de pendiente, es necesario construir el ángulo formado entre el eje x y la recta correspondiente a $f(x) = ax + b$ para visualizar el cambio de dirección experimentado por estas rectas.

DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA

A continuación, se describe la secuencia de análisis organizada en dos apartados que responden a los efectos mencionados:

Cambio de pendiente

La variación del parámetro a de la función afín produce un efecto sobre la recta canónica llamado *cambio de pendiente*. Este efecto se relaciona con los cambios de inclinación que experimenta una recta con respecto al eje de las abscisas. En el análisis se toma como referente la inclinación de la recta correspondiente a la función identidad $f(x) = x$, la cual forma un ángulo de 45º con el *eje x* (medido desde el eje hasta la recta, en sentido contrario a las agujas del reloj). En este sentido consideramos que cualquier recta con un *ángulo de inclinación* diferente es una consecuencia de la variación del parámetro $a$para un valor distinto de 1. Para dotar de sentido a este efecto utilizando el GeoGebra, es conveniente realizar el análisis en dos momentos:

Cuando b=0: Análisis del cambio de pendiente en la función lineal

Cuando el valor del parámetro b es igual a 0, la forma general de la función afín se reduce a $f(x) = ax$, la cual es representativa de una familia muy particular de estas funciones, denominada "función lineal". La característica más resaltante de toda función lineal es que su gráfica "pasa" por el origen del sistema de coordenadas. Dado que el parámetro a puede tomar cualquier valor real, es conveniente orientar el análisis del cambio de pendiente para ciertos valores de este, los cuales serán considerados en el análisis como "singulares". Por ejemplo, $a = 1$ se considera un valor singular debido a que la recta definida por $f(x) = x$ corresponde a la función identidad y, al ser esta considerada como referente del cambio, no es posible que se perciba algún efecto geométrico.

Otro valor que consideramos singular es cuando $a = 0$, donde la recta correspondiente adquiere una dirección particular: *horizontal* (su ángulo de inclinación es 0º o 180º). Estos dos valores nos permiten dividir el estudio del cambio de pendiente en los siguientes tres casos:

a) Caso 1. Cuando a varía en $[1, +\infty)$

Para saber lo que ocurre a la recta referente cuando a varía en $[1, +\infty)$ utilizando GeoGebra, se debe ajustar el intervalo del deslizador convenientemente, por ejemplo, con valores para el mínimo de 1 y máximo de 20, 60 y 100, respectivamente, con el propósito de relacionar el *cambio de pendiente* con los elementos de la gráfica (la recta referente y el *eje y*). Luego de activar la opción "Animación Automática" al deslizador, y observar lo que sucede en cada intervalo es posible concluir lo siguiente: (i) a medida que a se acerca a un valor máximo cada vez mayor, el ángulo de inclinación observado tiende a ser 90º y, en consecuencia, la recta se acerca más al eje de las ordenadas, y (ii) para cualquier valor de a en el intervalo se observa la familia de rectas cuyos ángulos de inclinación están entre $45°y\ 90°$ (ver Figura 1a).

b) Caso 2: Cuando a varía entre [0, 1]

Para visualizar lo que le ocurre a la recta referente en este caso, debemos ajustar el intervalo del deslizador, para un mínimo y máximo de 0 y 1 respectivamente. Dada la proximidad entre los extremos, es conveniente utilizar un incremento de 0.1 ya que esto permite apreciar una mayor cantidad de rectas en el intervalo. Luego de esto, el uso de la "Animación Automática" permite observar el cambio de pendiente y concluir lo siguiente: (i) a medida que a se acerca al valor mínimo del intervalo, el ángulo de inclinación de la recta disminuye hasta llegar a ser $0°$ y, en consecuencia $f(x) = 0$ determina una recta horizontal que coincide con el eje de las abscisas, y (ii) la variación de a en el intervalo permite apreciar la familia de rectas cuyos ángulos de inclinación están entre $0°\ y\ 45°$, ambos inclusive (ver Figura 1b).

c) Caso 3: Cuando a varía en $(-\infty, 0]$

Para analizar el efecto cambio de pendiente cuando a varía en $(-\infty, 0]$, procedemos de forma análoga al caso 1, es decir, ajustando el intervalo del deslizador para distintos valores del mínimo, por ejemplo para -100, -60 y -20, con un máximo de 0. Tras activar la "Animación Automática" del deslizador, podemos observar que en los tres intervalos se concluye que: (i) a medida que a se acerca a un mínimo cada vez menor, el ángulo de inclinación observado tiende a ser 90º y, en consecuencia, la recta correspondiente se acerca más al eje de las ordenadas, (ii) a medida que a se acerca al valor máximo, el ángulo de inclinación de la recta aumenta hasta llegar a ser 180º,de tal modo que ésta es horizontal, y coincidente con el eje de las abscisas,

(iii) Cuando a toma el valor de -1, la recta $f(x) = ax$ es perpendicular a la canónica, por tanto el ángulo de inclinación es de $45° + 90° = 135°$ y, (iv) la variación de a en el intervalo permite apreciar la familia de rectas cuyos ángulos de inclinación están entre $90° y\ 180°$ (ver Figura 1c).

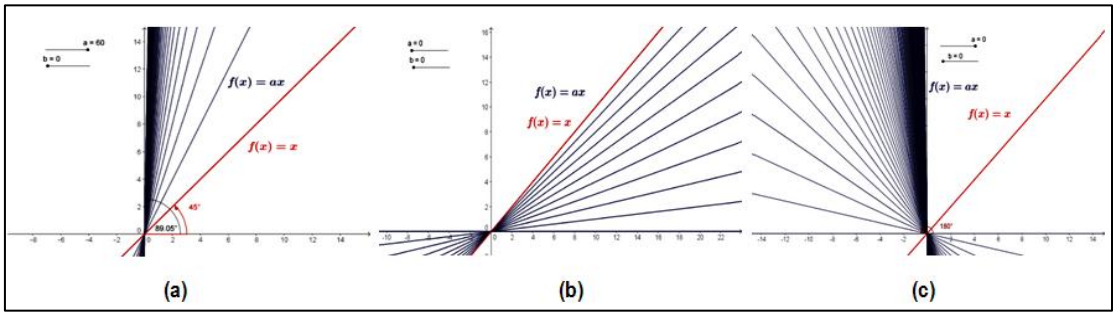


Figura 1. Cambios de pendiente producidos por la variación del parámetro a

Cuando b ≠0: Análisis del cambio de pendiente de la gráfica de $f(x) = ax + b$

En este caso, el cambio de pendiente experimentado por la familia de rectas que comparten un mismo valor de *b* (no nulo) tiene las mismas características del caso anterior, con la diferencia puesta en el punto de corte con el *eje y*. En este caso, las rectas de la familia cortan al eje de las ordenadas en un punto distinto al origen del sistema. Este corte define un efecto distinto al *cambio de pendiente* que es analizado en el apartado siguiente. Por ejemplo, si nos referimos a las rectas definidas por la expresión $f(x) = ax + \frac{3}{2}$, donde el intervalo del parámetro a se ajusta con valores para el mínimo de 1 y máximo de 60 y *b* toma el valor fijo de $\frac{3}{2}$, el efecto de cambio de pendiente, esto es, la variación en el ángulo de inclinación de cada recta de la familia con respecto al *eje x*, puede ser observado claramente con sólo dibujar la recta paralela al *eje x* que pasa por el punto de corte de $f(x) = ax + \frac{3}{2}$ con el *eje y* (ver Figura 2). Como puede verse, esta recta está determinada por la ecuación $y = \frac{3}{2}$.

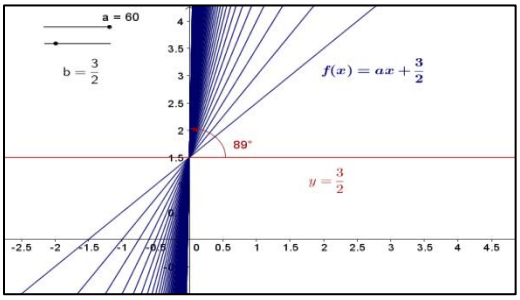


Figura 2. Cambios de pendientes en la familia de rectas definidas por $f(x) = ax + \frac{3}{2}$

Traslación

El efecto sobre la recta canónica que produce la variación del parámetro b de la función afín es llamado *traslación*. Este efecto se relaciona con los cambios de posición que experimenta una familia de rectas con respecto a la posición que ocupa el referente. El desplazamiento observado por las rectas asociadas a $f(x) = ax + b$ tras la variación de b se da en la dirección "vertical" y en dos sentidos según la posición ocupada por la recta canónica: *hacia arriba o hacia abajo de esta*. Para visualizar este efecto con GeoGebra basta con ajustar el deslizador de b en un intervalo [mínimo, máximo] conveniente, y realizar el análisis para una familia de rectas determinadas, por ejemplo, la correspondiente a la expresión $f(x) = 3x + b$, dónde $f(x) = 3x$ actúa como referente del efecto. Procurando una mejor visualización de este efecto, el ajuste del deslizador asociado al parámetro b se hace en tres momentos, considerando al 0 como un valor crítico pues el parámetro no lo toma.

Caso 1: Cuando b varía en (0,∞)

La variación de b en este intervalo muestra la familia de rectas de $f(x) = 3x + b$ que se han traslado "hacia arriba" de la recta referente. Este efecto se observa con cualquier par de valores positivos para el mínimo y máximo del intervalo, por ejemplo 1 y 20, respectivamente. Luego de activar la "Animación Automática" se puede ver que, tras la variación del parámetro b, el valor que éste toma coincide con el valor de la ordenada del punto *(0, b)* que corta al *eje y* (ver Figura 2a).

Caso 2: Cuando b varía en (−∞,0)

Al igual que el caso anterior, la variación de b en un intervalo con valores mínimo y máximo negativo (p.e., -20 y -1, respectivamente) muestra una familia de rectas que se han trasladado "hacia abajo" de la recta referente. Además, se observa que el valor del parámetro b coincide con la ordenada de *(0, b)*, punto que corta al *eje y* (ver Figura 2b).

Caso 3: Cuando b varía en (−∞,∞)

En este caso es posible observar ambas familias de rectas, las desplazadas hacia arriba y hacia abajo de $f(x) = 3x$ (la referente). Para ello basta con ajustar el intervalo [mínimo, máximo] del deslizador de *b* con valores de signos distintos, por ejemplo, de -10 y 10, y activar la "Animación Automática" (ver Figura 1c). Para una mejor comprensión de este efecto, resulta más conveniente el análisis como se muestra en este caso ya que: (i) en cualquier sentido de la traslación, hacia arriba o hacia abajo, las rectas que se desplazan en el intervalo tienen la misma pendiente debido a que a tiene

un valor fijo y, (ii) el valor que toma el parámetro b al manipular el deslizador siempre se corresponde con el valor de la ordenada del punto de corte con el *eje y*, lo que otorga un sentido a la idea de ordenada en el origen.

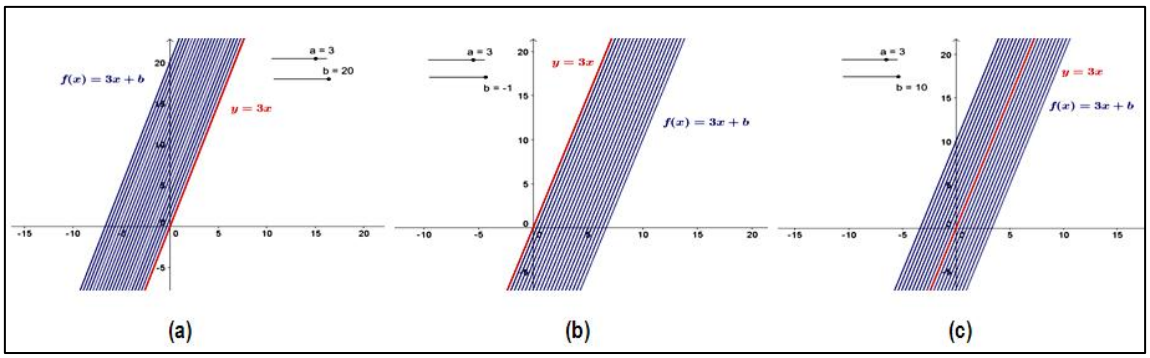


Figura 3. Traslaciones producidas por la variación del parámetro b.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Esta secuencia constituye una manera de dotar de sentido a los efectos geométricos asociados a la variación de los parámetros de la función $f(x) = ax + b$, con el doble propósito para la formación de profesores de Matemática de: (i) ampliar la compresión del tópico que subyace y (ii) favorecer los procesos de integración eficiente de recursos tecnológicos en la práctica de enseñanza de la matemática. En cuanto a los recursos, Hohenwarter (2006) señala que actualmente es posible tratar con funciones matemáticas mediante el uso de los conocidos programas de geometría dinámica y, al respecto, el autor asegura que el GeoGebra ofrece varias ventajas educativas en comparación con los demás programas de este tipo y con los métodos tradicionales de enseñanza. Además, debido a que las gráficas son muy posiblemente la forma de representación más significativa de las funciones en el ámbito escolar (Basurto y Gallardo, 2011), la propuesta aquí descrita permite desarrollar habilidades para anticipar el comportamiento de una recta dada la forma de su expresión simbólica, cuestión que puede convertirse en objeto de enseñanza y que es de gran valor para la población de estudiantes de Educación Media, impactando así en los métodos de enseñanza, especialmente en el diseño de secuencias didácticas y de tareas matemáticas para estos alumnos.

Bibliografía

- Basurto, E. y Gallardo, A. (2011). El estudio de los parámetros por medio de tecnologías hibridas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, 287-296. Ciudad Real: SEIEM.

- Bayazit, I y Aksoy, Y. (2010).Connecting Representations and Mathematical Ideas with GeoGebra.*Geogebra International Journal of Romania*, 1 (1), 93-106.

- Darmawan, D. y Iwan, P. (2011). On the teaching of analyzing the effects of parameter changes on the graph of function. Trabajo presentado en la *Fourth National Conference on Mathematics Education*, Julio, Yogyakarta.

- Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using GeoGebra. Trabajo presentado en el *Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*, Julio, Dresden.

- Losada, R. (2007). GeoGebra: La eficiencia de la intuición. *La Gaceta de la RSME*, 10 (1), 223-239.

RESOLVENDO PROBLEMAS GEOMÉTRICOS COM O SOFTWARE GEOGEBRA, VALORIZANDO A INTERATIVIDADE NO PROCESSO DE ENSINO – APRENDIZAGEM

Daiane Pertile - Angelica Lourdes Pierozan - Diego Eduardo Lieban
daiane.pertile@bento.ifrs.edu.br – angelica.pierozan@bento.ifrs.edu.br – diego.lieban@bento.ifrs.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Câmpus Bento Gonçalves

Modalidade: C
Nível: Médio/Terciário
Palavras-chave: Prática docente; Geogebra; Geometria; Interatividade.

Resumo
A geometria da forma como muitas vezes é trabalhada não permite que o educando tenha uma compreensão significativa daquilo que está vendo. Por isso, há necessidade de introduzirem-se nas práticas docentes, mecanismos que facilitem o entendimento do aluno. Neste trabalho apresenta-se um estudo de caso realizado com 19 alunos de oitava série. O objetivo foi analisar a contribuição do software GeoGebra na resolução de problemas de geometria (mais precisamente em exercícios cujo foco era a estratégia de obtenção de áreas de figuras) e investigar como os elementos de interação propostos nos arquivos desenvolvidos pelos autores (apoiados em uma espiral guia) podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Este estudo é fruto de um projeto de pesquisa (Iniciação Científica) desenvolvido no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Câmpus Bento Gonçalves. Buscando oferecer aos professores de matemática uma alternativa didática que possa contribuir no processo de ensino e aprendizagem de geometria, está sendo criado um site denominado "Interagindo com o software Geogebra". Neste site apresenta-se alguns arquivos desenvolvidos pelos autores que podem servir de modelo para que os professores de matemática possam criar seus próprios arquivos, dentro do enfoque que desejam trabalhar.

1. Introdução

Os softwares educativos, quando adequadamente utilizados, podem contribuir para o ensino de vários conteúdos matemáticos. Cabe ao professor escolhê-los, tendo em vista o planejamento previsto, seja pelo conteúdo a ser abordado, pelo tempo reservado para a atividade, pelo domínio (da ferramenta ou conteúdo) da turma ou por qualquer outro fator que possa interferir direta ou indiretamente na condução da proposta. Com isso, não basta apenas o professor disponibilizar de ferramentas se a aplicação delas não for pensada e estudada previamente.

Observa-se – a partir da vivência recente das autoras como alunas do Ensino Médio da rede pública – que o uso de softwares nas aulas de matemática não é algo trivial e que ainda não

convence grande parte dos professores de suas contribuições para o ensino. Este artigo relata um experimento utilizando o software Geogebra no ensino de Geometria.

A escolha pelo software Geogebra fez-se por acreditar que ele potencializa o aprendizado do aluno, uma vez que tem interface acessível e atraente, com menus interativos e dá condições de construções dinâmicas. Contudo, é fundamental que acentue-se sempre a reflexão sobre os papéis do professor e do aluno diante da tecnologia: nem deixar o aluno liberto demais (a ponto de sentir-se desassistido), nem fazer por ele as etapas que contribuam significativamente para o seu aprendizado (instruindo com uma série de "passo a passo", por exemplo).

2. Tecnologias interativas no ensino de matemática

As tecnologias interativas aliadas ao ensino estão, cada vez mais, despertando a atenção de professores e alunos. Corroborando com isso, Silva e Vicari (2009, p.1) enfatizam que:

> A utilização de recursos tecnológicos no meio educacional tem buscado ampliar as possibilidades do processo de ensino-aprendizagem, tradicionalmente exposta em um cenário composto por um professor (com seu discurso explanatório) e os alunos (sujeitos observadores e registradores das informações passadas).

Há, no entanto, uma diferença fundamental entre as tecnologias que apenas repassam informações e não permitem que o aluno interaja com o que está sendo feito e as tecnologias que permitem uma maior interação do espectador.

Segundo Silva,

> As novas tecnologias interativas renovam a relação do usuário com a imagem, com o texto, com o conhecimento. São de fato um novo modo de produção do espaço visual e temporal imediato. Elas permitem o redimensionamento da mensagem, da emissão e da recepção. Na modalidade comunicacional massiva (rádio, cinema, imprensa e TV), a mensagem é fechada uma vez que a recepção está separada da produção. O emissor é um *contador de histórias* que atrai o receptor de maneira mais ou menos sedutora e/ou impositora para o seu universo mental, seu imaginário, sua récita. Quanto ao receptor, seu estatuto nessa *interação* limita-se a assimilação passiva ou inquieta, mas sempre como recepção separada da emissão. Na modalidade computacional interativa permitida pelas novas tecnologias informáticas, há mudança significativa na natureza da mensagem, no papel do emissor e no estatuto do receptor. A mensagem torna-se modificável na medida em que responde às solicitações daquele que a consulta, que a explora, que a manipula. Quanto ao emissor, este assemelha-se ao próprio *designer* de *software* interativo: ele constrói uma rede (não uma rota) e define um conjunto de territórios a explorar; ele não oferece uma história a ouvir, mas um conjunto de territórios abertos a navegações e dispostos a interferências e modificações, vindas da parte do receptor. Este, por sua vez, torna-se utilizador, usuário, que manipula mensagem como co-autor, co-criador, verdadeiro conceptor (SILVA, 2000, p.11, grifo do autor).

Em uma avaliação mercadológica, Silva (2007) observa, também, que os estrategistas de *marketing*, estão percebendo que o consumidor faz por si mesmo, que não é mais manipulável, que adquire maiores padrões de exigência diante da variedade de opções de escolha. E certamente esta realidade não é diferente na esfera educacional. Entre tantas alternativas e meios de aprendizagem, que estão em voga, dificilmente o aluno será agradado com aquele que é fruto de repetições e faz dele um mero coadjuvante, passivo repetidor de lições despejadas. Ele, assim como o consumidor, estabece padrões de exigência que o coloquem como elemento crucial do processo. E esse é um direito que não podemos negar-lhe.

Além disso, fazer uso da *tecnologia* para trabalhar conceitos diversos - seja em matemática ou qualquer outra área - em prol de uma aprendizagem significativa tem sido amplamente defendido por diversos autores. Sobre essa tendência, Zorzan preconiza o recurso da tecnologia, alegando que:

> Atualmente, em pleno século XXI, quando as máquinas possibilitam informações e soluções em um tempo reduzido, não é mais possível que a escola continue a desmerecer ou desconsiderar a tecnologia em suas propostas pedagógicas. [...] a escola não pode abrir mão dos novos recursos tecnológicos disponíveis, do contrário, tornar-se-á um espaço obsoleto e desvinculado das reais necessidades oriundas da inteligência humana. (ZORZAN, 2007, p.10)

Porém, a inserção do recurso tecnológico em sala de aula deve ser cuidadosa, sob pena de tornar-se apenas um instrumento de dispersão e não atingir seus objetivos propostos. Ao refletir-se sobre a utilização do *software* Geogebra como facilitador para a construção do conhecimento, é necessário e fundamental pensar em como fazer uso desta ferramenta para quebrar a “tradição” de decorar fórmulas e conceitos da geometria. Por isso da iniciativa em desenvolver um projeto com problemas ligados a geometria, a fim de auxiliar professores e alunos no estudo da mesma. Gravina (1996) afirma que os *softwares* podem ser trabalhados de duas formas. Na primeira, os próprios alunos constroem as figuras, tendo como objetivo o domínio dos procedimentos para se obter a construção. Na segunda, o professor entrega as figuras prontas aos alunos para que estes possam reproduzi-las. O objetivo desta última modalidade de trabalho é possibilitar que, por meio da experimentação, os alunos descubram as invariantes das propriedades das figuras reproduzidas. Em suma, programas de geometria dinâmica (GD), como é o caso do Geogebra, proporcionam uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos.

O professor, diante desta perspectiva, deve assumir um papel de parceiro, conduzindo atividades que visem à exploração e a descoberta e favoreçam a criatividade e o envolvimento do aluno com o assunto em questão. Assim, em uma prática em que o sujeito participa e percebe os resultados de suas ações, e mais, faz uso desta interação para o desenvolvimento do conhecimento, entende-se haver uma aprendizagem sólida e consistente.

3. Concepção da proposta

A geometria da forma como é habitualmente trabalhada, na maioria das vezes não permite que o aluno visualize com clareza propriedades inerentes de certas construções, independente das dimensões que tenham. Logicamente que mais do que visualizar, espera-se que o aluno convença-se, com argumentos consistentes, da validade de certas proposições. Utilizando o Geogebra para realizar estas construções, facilitamos a visualização da situação, além do convencimento por parte do aluno - com argumentos consistentes para justificar a validade de certas proposições - ser mais natural. O Geogebra possibilita, além da visualização de uma mesma construção em diferentes disposições, uma melhor compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos. Assim, pode ser usado para revelar relações geométricas intrínsecas que poderiam passar despercebidas numa representação estática.

Neste projeto especificamente, tem-se por princípio explorar componentes de interatividade, fazemos uso de uma espiral, que serve como linha-guia para que o usuário possa, com um ponto sobre a curva, percorrer a trajetória (num sentido convergente da espiral, ou seja, de fora para dentro) e, assim, na medida em que vai avançando, ter à sua disposição um conjunto de instruções que o conduzem à resolução de um determinado exercício ou à demonstração de um teorema. A dinâmica é norteada por uma pergunta ou sugestão inicial combinada à instrução de percorrer com o ponto sobre a espiral para obter ajuda. Na medida em que as instruções vão aparecendo o usuário tem opção de realizar, a partir do encaminhamento dado, as construções convenientes com o uso das ferramentas habituais do Geogebra ou, se preferir, clicar na caixa de exibição de objeto que acompanha a instrução, para ter um retorno mais imediato. A ideia é, com isso, respeitar o ritmo de aprendizagem de cada aluno, uma vez que entendemos que cada um tem um tempo diferente de assimilação e, da mesma forma, alguns podem, de acordo com as atividades, sentir-se mais desafiados que outros, procurando evitar (ou pelo menos, adiar) o auxílio do recurso oferecido. É fundamental deixar claro que o objetivo não é resolver o problema em si, mas oferecer apoio, caso o usuário sinta necessidade, com elementos que eventualmente sugiram o caminho da solução. O avanço,

quanto à utilização do recurso, é derteminado pelo próprio aluno/usuário, estimulando, assim, uma prática autônoma diante destes modelos.

A fim de ilustrar o procedimento sugerido, apresentamos um exemplo de arquivo aplicado na oficina realizada, a qual será discutido com mais detalhes na seção seguinte. Além dos exercícios cujo foco era a estratégia de obtenção de áreas de figuras planas, apresentou-se aos alunos uma atividade que tinha por objetivo desafiar a intuição matemática dos mesmos. Na FIGURA 1 exibimos a visualização inicial do arquivo, antes da navegação sobre a curva espiral. Já na FIGURA 2, é exibida uma tela quando então foram exibidas as instruções existentes, uma de cada vez, todas elas tendo os auxílios correspondentes sido utilizados. Observe as posições inicial e final do ponto **E** sobre a espiral, em cada tela.

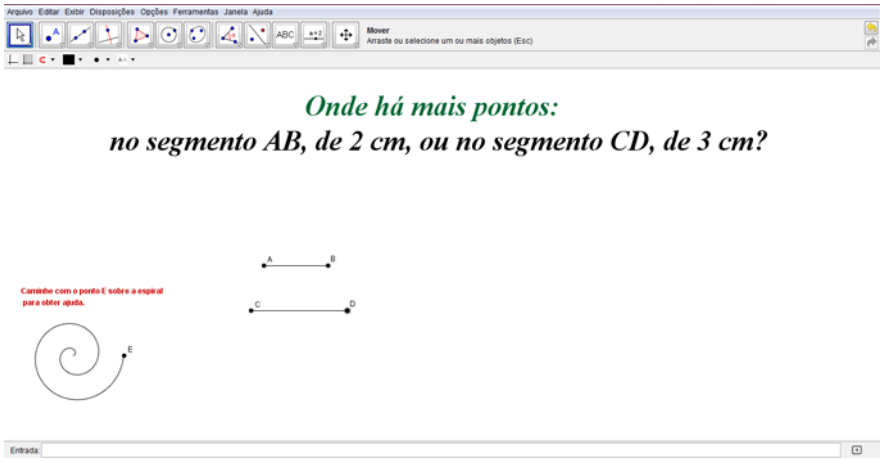


FIGURA 1: arquivo em fase inicial da exploração, desafiando a intuição matemática dos alunos

FONTE: acervo dos autores

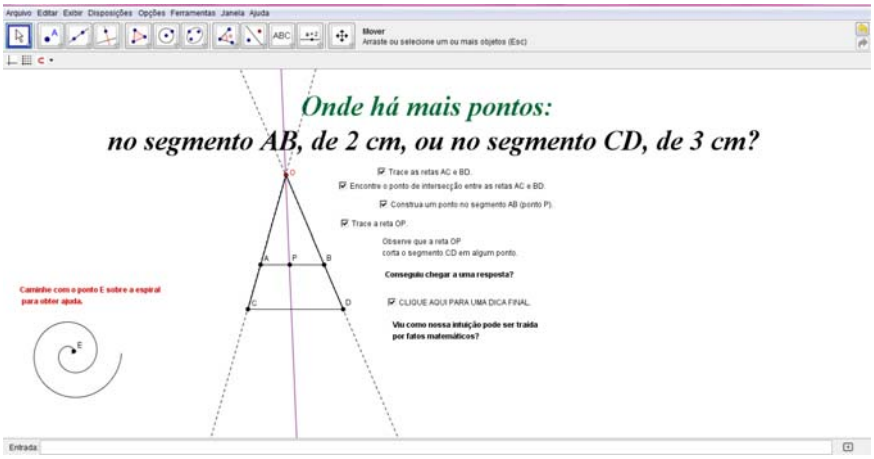


FIGURA 2: arquivo em fase final da exploração, procurando esclarecer o desafio lançado

FONTE: acervo dos autores

Neste exemplo apresentado, nossa intenção era sugerir que o número de pontos em um segmento independe de seu tamanho, de modo que sempre é possível estabelecer uma correspondência (um para um) entre os pontos de quaisquer dois segmentos dados.

4. Site - espaço para o compartilhamento de saberes

Um *site* se caracteriza como sendo um meio de comunicação, tal como a televisão, o jornal, um Blog. Todos estes têm por finalidade a divulgação de informações. Com isso, buscando oferecer aos professores de matemática uma alternativa didática que possa contribuir no processo de ensino e aprendizagem de Geometria, e com a necessidade de inserir metodologias interativas a serviço do ensino da matemática, está sendo criado um *site* denominado "Interagindo com o *software* Geogebra".

Neste *site* (que está em construção) apresenta-se alguns arquivos desenvolvidos pelos autores que enfatizam principalmente a geometria plana e que eventualmente podem servir de modelo para que os professores de matemática possam criar seus próprios arquivos, dentro do enfoque que desejam trabalhar. Todas as atividades desenvolvidas tem um caráter de interatividade, como foi enfatizado anteriormente. Procuramos também disponibilizar no *site* os artigos produzidos ao longo do projeto para que possam contribuir na formação de professores e alunos. Com materiais a sua disposição e atividades bem estruturadas o professor traz para a sala de aula mais um atrativo e faz com que os alunos, por meio da participação e interação possibilitadas pelo *software* Geogebra, se sintam envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

5. Um estudo de caso na Escola Municipal de Ensino Fundamental Doze de Maio - Vila Flores/ RS

A finalidade deste estudo foi analisar a contribuição do *software* Geogebra na resolução de problemas de geometria e investigar como os elementos de interação propostos nos arquivos desenvolvidos pelos autores podem ajudar no processo de ensino e aprendizagem de matemática. A hipótese adotada foi a de que o *software* de geometria dinâmica possui potencialidades e auxilia na visualização de certas propriedades. Logo, a mudança da representação estática para a dinâmica traria contribuições, sobretudo, em relação à percepção dos objetos geométricos e ao processamento da imagem, proporcionando uma compreensão mais eficaz de certas proposições.

A oficina foi realizada com 19 alunos da 8º série na Escola Municipal de Ensino Fundamental Doze de Maio – Vila Flores/RS. O trabalho foi dividido em duas experiências distintas: aula

realizada em sala de aula, e aula no laboratório de informática, com o uso do *software* Geogebra. A duração da oficina foi de 1h30min.

Primeiramente os alunos trabalharam em sala de aula resolvendo atividades impressas que abordavam relações entre áreas. Após, os educandos foram direcionados até o laboratório de informática, onde houve a apresentação do *software* Geogebra, o menu do programa e suas respectivas funções básicas, assim como a interface do *software*, com a finalidade de estarem sempre à disposição do aluno para consulta. No laboratório os alunos desenvolveram as mesmas atividades que tinham resolvido na sala de aula, porém agora em modelos digitais. Os educandos eram instruídos de como deveriam proceder ao utilizar o *software*, por exemplo, de como deveriam conduzir o ponto sobre a espiral, onde era preciso clicar para obter a construção imediata. Para finalizar, os alunos responderam a uma autoavaliação, que tinha por finalidade verificar quais as dificuldades encontradas em trabalhar tanto com o modelo impresso quanto digital das atividades.

6. Discussões e resultados

Para analisar os resultados obtidos foi levado em consideração as respostas da autoavaliação respondida pelos alunos, além de nossa observação *in loco*. Quando questionados sobre as dificuldades encontradas para resolver as atividades impressas, 3 alunos responderam que não encontraram dificuldades, enquanto 16 alegaram que sim. Dentre os que encontraram dificuldades em resolver as questões alguns argumentaram ter pouco tempo para desenvolver as atividades, outros disseram que não estavam na aula no dia da explicação da matéria feita pela professora de Matemática da turma.

No segundo item questiona-se os alunos se tinham encontrado dificuldades para resolver as questões utilizando o *software* Geogebra: 15 alunos responderam que não haviam identificado dificuldade alguma, enquanto 4 alunos responderam que acharam difícil. Alguns alunos comentaram que gostaram de trabalhar com o Geogebra, por ser de *fácil acesso* e de *alta qualidade* (as expressões em destaque foram utilizadas pelos próprios alunos). Para finalizar foi solicitado que eles comparassem os dois modelos de trabalho – impresso e digital – e respondessem qual possibilita um melhor aprendizado ou facilita a resolução da atividade e qual deles foi mais atrativo para trabalhar: 16 alunos responderam que a melhor forma de trabalhar seria utilizando o *software*, pois torna a visualização da imagem mais clara, mais compreensível e é uma forma interessante de aprender que se diferencia da tradicional lista de atividades impressas. E 3 alunos alegaram que não gostaram de trabalhar nem com o *software*

Geogebra e nem com as questões impresas, não sugerindo nenhuma outra forma para se trabalhar.

Em anexo, apresentamos algumas respostas apresentadas que corroboram o relato acima.

7. Considerações finais

A oficina realizada possibilitou uma reflexão sobre o uso do *software* Geogebra no ensino de Geometria. Algumas respostas desenvolvidas pelos alunos comprovam um avanço significativo quanto à visualização e à compreensão das atividades utilizando o *software*, enquanto outras respostas mostram que os alunos têm dificuldades tanto em resolver as atividades impressas quanto digitais.

A capacidade do docente em decidir o momento e a abordagem adequados na utilização da tecnologia como um recurso auxiliar no processo de ensino-aprendizagem reflete o seu conhecimento do conteúdo da disciplina, que deve ser pensado, analisado e aperfeiçoado continuamente. Não basta que o professor queira utilizar as tecnologias no ensino da matemática, é necessário que ele esteja capacitado e que seus objetivos didáticos estejam relacionados com o *software* a ser utilizado para que seu uso em sala de aula não se torne em vão.

8. Referências

- GRAVINA, M. A *Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado de geometria*. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7, 1996, Belo Horizonte. *Anais*... Belo Horizonte, 1996.
- SILVA, M. *Sala de aula interativa*. Rio de Janeiro: Quarter, 2000.
- SILVA, J. M. Q.; VICARI, R.M. *Relacionando a Televisão Digital Interativa com o conceito de Objetos de Aprendizagem*: conceitos, aspectos históricos, e perspectivas. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2009, Florianópolis. Anais... Florianópolis, XX SBIE, 2009.
- ZORZAN, A. S. L.; *Ensino-Aprendizagem*: Algumas tendências na educação matemática. In: GÜLLICH, R. I. C (Org.). Educar pela pesquisa: Formação e processos de estudo e aprendizagem com pesquisa, 2007.

Anexos

1 – Você encontrou dificuldades para resolver as atividades impressas? Quais?

Um pouco na segunda questão, mas acabei aprendendo e entendendo como se faz.

2 – E trabalhando com o Geogebra encontrou dificuldades? Quais?

Não, pois gostei de trabalhar, não conhecia e fiquei muito interessada

3 – Comparando as duas maneiras trabalhadas, na sua opinião, qual possibilita um melhor aprendizado ou facilita a resolução da atividade? Por quê?

Com o Geogebra, pois pude fazer os passos do desenho.

4 – E com qual você mais gostou de trabalhar? Por quê?

Com a Geogebra, por conter coisas novas e ser muito divertido.

5 – Comentários Extras:

Adorei esta nova atividade, pois aprendi coisas novas.
Espero algum dia ver novamente este tipo de trabalho.
Também adorei conhece-los.

SUBGRUPOS DISCRETOS DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO

María Teresita Carrión Rebellato
pitacar@gmail.com
Consejo de Formación en Educación - Uruguay

Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Isometrías del plano, generadores del subgrupo, embaldosado, región fundamental.

Resumen
Este trabajo está constituido por animaciones realizadas con GeoGebra que permiten visualizar teselaciones del plano a partir de una figura inicial a la que se le aplica, en forma periódica y reiterada, dos o tres isometrías, que serían los generadores de uno de los subgrupos discretos de las isometrías del plano.
Al finalizar cada animación, se podrá apreciar una teselación que contiene todas las isometrías que pertenecen a ese grupo ornamental.
Entre ellos hay algunos inspirados en la obra del artista holandés M. C. Escher.
Algunas de estas animaciones se usaron como recurso auxiliar en el curso: "Grupos Ornamentales. Subgrupos discretos de las simetrías del plano" de los doctores Andrés Abella y Ángel Pereyra en el Tercer Coloquio Uruguayo de Matemática, desarrollado entre el 20 y el 22 de diciembre de 2011 en Montevideo.

Introducción

Un subgrupo discreto de isometrías del plano es un grupo de éstas que no contiene traslaciones de vectores arbitrariamente pequeños ni rotaciones de ángulos arbitrariamente pequeños. Dicho de otro modo, G es un subgrupo discreto de las isometrías del plano, si existen dos números reales positivos h y k tales que los módulos de los vectores de todas las traslaciones de G sean mayores o iguales que h y los ángulos de todas las rotaciones de G, tomados entre 0 y 2π, sean mayores o iguales que k.

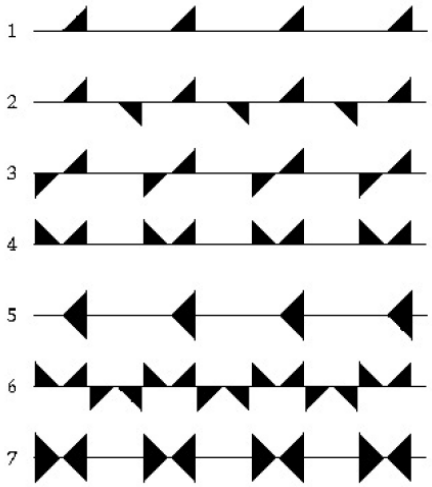
Si G no contiene traslaciones, es un grupo de Leonardo. En este caso, G solo puede contener rotaciones con centro en el mismo punto y/o simetrías axiales con ejes que pasen por ese punto, que será el punto fijo de todas las isometrías del grupo.

Si G contiene traslaciones en una sola dirección, es un grupo de friso, que además de las traslaciones, G puede contener simetrías centrales, simetrías axiales de eje paralelo o perpendicular a la dirección del friso y antitraslaciones con eje paralelo a la dirección del friso.

En otro caso, G será un grupo de embaldosado del cual hablaremos más adelante.

A continuación, podemos apreciar ejemplos de estos grupos:

Grupo de Leonardo



Los 7 grupos de friso

Lo interesante de estos grupos es que pueden ser generados por una, dos o hasta cuatro isometrías como máximo. Ser generado por n isometrías significa que está constituido por ellas, sus inversas y toda isometría que resulte de la composición de dos o más de ellas.

Se llama región fundamental, a un conjunto de puntos tal que él y sus imágenes en todas las isometrías del subgrupo, constituyen una partición del plano. Con esto se logra, partir el plano en regiones congruentes (iguales) a la que se le llama embaldosado, mosaico o teselación.

Grupos de embaldosado

Existen 17 grupos de embaldosado, resultado obtenido por Fedorov y Schoenfliess en 1890. Estos se pueden agrupar en cinco categorías, según las rotaciones que contienen:

- Grupos sin rotaciones:
    1) p1: generado por dos traslaciones de vectores linealmente independientes.
    2) cm: generado por una simetría axial y una antitraslación con ejes perpendiculares.
    3) pg: generado por dos antitraslaciones con ejes paralelos.
    4) pm: generado por dos simetrías axiales y una traslación.
- Grupos con rotaciones de ángulo π (simetrías centrales):

5) p2: generado por tres simetrías centrales.
6) cmm: generado por dos simetrías axiales de ejes perpendiculares y una simetría central.
7) pmm: generado por cuatro simetrías axiales con ejes en los lados de un rectángulo.
8) pmg: generado por una simetría axial y dos simetrías centrales.
9) pgg: generado por dos antitraslaciones de ejes perpendiculares.

- Grupos con rotaciones de ángulo $2\pi/3$:
  10) p3: generado por dos rotaciones de ángulo $2\pi/3$.
  11) p31m: generado por una simetría axial y una rotación de ángulo $2\pi/3$.
  12) p3m1: generado por tres simetrías axiales en los lados de un triángulo equilátero.
- Grupo con rotaciones de ángulo $\pi/2$:
  13) p4: generado por una simetría central y una rotación de ángulo $\pi/2$.
  14) p4m: generado por tres simetrías axiales en los lados de un triángulo rectángulo isósceles.
  15) p4g: generado por una simetría axial y una rotación de ángulo $\pi/2$.
- Grupo con rotaciones de ángulo $\pi/3$:
  16) p6: generado por una simetría central y un giro de ángulo $2\pi/3$.
  17) p6m: generado por tres simetrías axiales en los lados de un triángulo rectángulo con un ángulo $\pi/6$

Sobre la nomenclatura: La notación utilizada es la establecida por la Unión de Cristalografía (Comité Español) y consta de cuatro símbolos ordenados:

Símbolo 1: una letra p o c.

Símbolo 2: un número 1 si no hay rotaciones, 2 si la rotación mínima es de ángulo π, 3 si la rotación mínima es de ángulo $2\pi/3$, 4 si la rotación mínima es de ángulo $\pi/2$ o 6 si la rotación mínima es de ángulo $\pi/3$

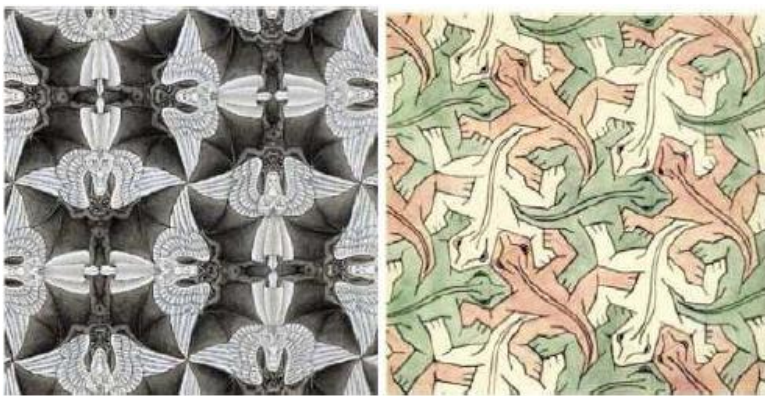
Símbolo 3: una letra o un número m (simetría axial), g (antitraslación) o 1 (ninguna de ellas)

Símbolo 4: una letra o un número m, g o 1, igual que el símbolo 3.

Esta notación se suele simplificar siempre que no dé lugar a confusión. Así por ejemplo el grupo p411 se simplifica en p4 y el p4gm se simplifica en p4g.

El artista holandés M. C. Escher estudió en profundidad los grupos de embaldosado. En 1922 llegó a Granada y quedó deslumbrado al visitar la Alhambra. Los creadores de los mosaicos de la Alhambra de Granada no conocían el teorema de clasificación de Fedorov, y seguramente no sabían cuántos grupos de simetrías podían usarse para teselar el plano y por eso resulta asombroso que hayan realizado diseños de los 17 grupos.

Inspirado en los mosaicos nazaríes, Escher da un paso más utilizando motivos irregulares, como por ejemplo los que podemos apreciar en la siguiente figura:

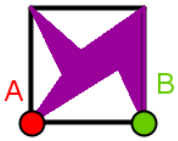


Las animaciones

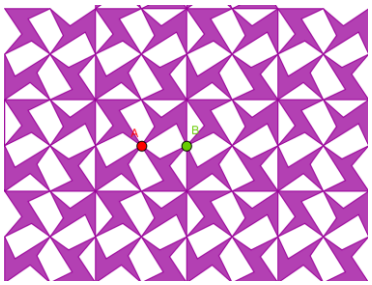
Para generar un mosaico debemos conocer una región fundamental y cuáles son los generadores del grupo.

Se presentarán animaciones que permitan visualizar cómo a partir de una región fundamental y aplicando en forma reiterada y periódica las isometrías generadoras de uno de los subgrupos discretos, se logra la teselación del plano.

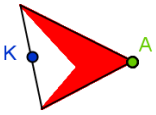
En la primera animación, se trabaja con el grupo p4 tomando como región fundamental un cuadrado, con un diseño asimétrico para que se aprecie el movimiento y la aplicación reiterada la rotación de centro A y ángulo $\pi/2$ y la simetría de centro B.



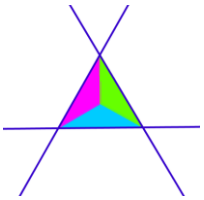
Al final de la animación, se llega a la siguiente teselación:



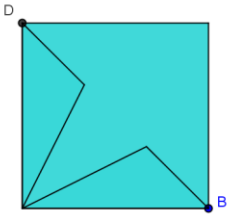
En segundo lugar, presentamos el grupo p6 con la siguiente región fundamental, aplicando la rotación de centro A y ángulo π/3 y la simetría de centro K.

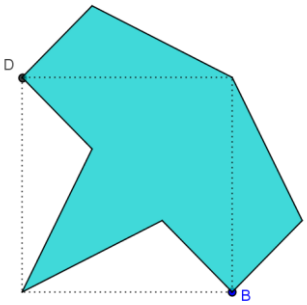


Y el grupo p3m1, con la región fundamental que se adjunta y las simetrías respecto a ejes que contienen los lados del triángulo.

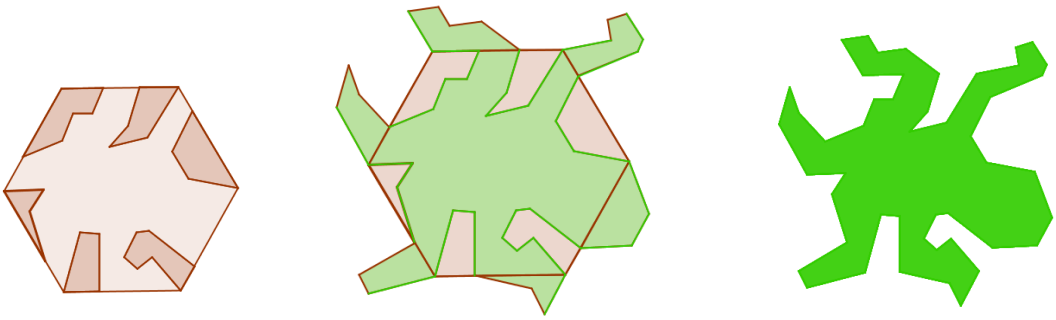


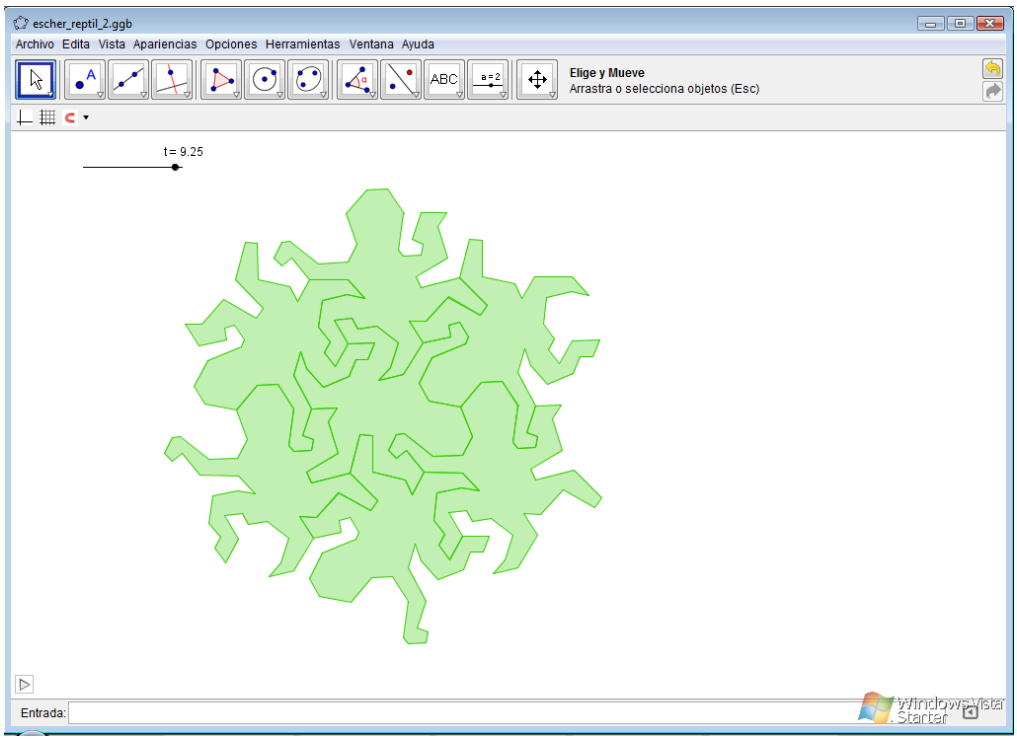
La región fundamental puede tener distintas formas. Un método para construir una región fundamental irregular consiste en modificar una región ya conocida.
Por ejemplo, si tenemos un cuadrado (ver figura) lo podemos modificar por medio de rotaciones de centros B y D y ángulo π/2 para obtener otra región de un grupo p4.

Modificando 

se obtiene 

Finalmente, emulando una de las obras de Escher, se presentará un grupo p3, trabajando con una región fundamental irregular que parte de un hexágono regular y se modifica en un reptil:





Captura de pantalla durante la animación

Referencias bibliográficas

- Abella, A. y Pereyra, A. (2011) *Grupos Ornamentales. Subgrupos discretos de las isometrías del plano.* En Publicaciones Matemáticas del Uruguay – Vol. 13. Editorial Board.

- Garro Garro, JC, Rojo Montijano, J. (2009) Artículo: *"Un mosaico para Dubai"*. Jornadas Internacionales de Didáctica de las Matemáticas en Ingeniería. http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/JORNADAS%201/126%20Comunicaci%C3%B3n%20TESELACIONES%20DUBAI.pdf Consultado 10/09/2012

- Toth G.(2002) *Glimpses of Algebra and Geometry*, Second Edition. Ed. Springer.

- http://www.eschergranada.com/es/mc-escher/biografia consultado 31/10/2012

- http://www.geometriadinamica.es/Investigaciones/Arte-y-Geometria-Mosaicos/4.2-El-nombre-del-grupo-cristalografico.html Consultado 15/10/2012

TRANSIÇÃO INTERNA DO CÁLCULO: UMA DISCUSSÃO DO USO DO *GEOGEBRA* NO CONTEXTO DO CÁLCULO A VÁRIAS VARIÁVEIS

Francisco Regis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE

Modalidad: Comunicacion
Nivel educativo: Universitário
Palabras clave: Interpretação geométrica, Visualização, Geogebra, CAS Maple.

Resumo
Registramos no Brasil a escassez de trabalhos com interesse na transição interna do Cálculo em Uma Variável Real – CUV para o Cálculo a Várias Variáveis - CVV. Nas investigações recentemente desenvolvidas com este objeto de investigação (ALVES, 2011; ALVES & BORGES NETO, 2012; ALVES; BORGES NETO & INGAR, 2012)), destacamos o papel da tecnologia no sentido de promover a visualização e a apreensão perceptiva de propriedades de objetos matemáticos no espaço IR^2 *e* IR^3*. Assim, com o auxílio do Geogebra, podemos discutir situações do CVV que admitem uma interpretação imediata no contexto do CUV e possíveis ligações conceituais evidenciadas pelo CAS Maple. Tal perspectiva que orienta a abordagem didática que discutiremos pode favorecer ao aprendiz, o entendimento acerca da ligação conceitual, com apoio na representação gráfica, dos conceitos estudados tanto no CUV como no CVV que são discutidos, de modo prioritário, no espaço* IR^2 e IR^3.

1. Introdução

Identificamos no Brasil, mesmo que de modo incipiente, estudos que buscam compreender, investigar e compreender as mudanças enfrentadas pelos estudantes acadêmicos, no período de um a dois anos em estudo no *locus* acadêmico. Ora, no Brasil, esse período corresponde, de modo geral, o espaço de tempo em que os alunos tomam o primeiro contato com o Cálculo em Uma Variável Real – CUV e, no ano subseqüente, com o Cálculo a Várias Variáveis – CVV.

Nada mais natural esperar do aluno a manifestação da expectativa a respeito do fato de que o conteúdo apreendido ou, pelo menos, explicado pelo professor no primeiro período de estudo do CUV, funcione e facilite a apreensão e/ou o entendimento no contexto do CVV, todavia, tal fato nem sempre se manifesta de modo automático.

Assim, diante dos entraves indicados na literatura no Brasil em relação a *transição interna* (ALVES, 2011) do Cálculo, trazemos exemplos de situações, que envolvem uma visão de complementaridade entre o *software Geogebra* e, dada à complexidade dos conceitos do CVV, outro será usado, como o caso do *software* que constitui um Sistema de Computação Algébrica – *CAS Maple*.

2. Transição interna do Cálculo

Temos observado há décadas vigor na produção de investigações no contexto de ensino do Cálculo em Uma Variável Real – CUV, todavia, sobretudo no Brasil, divisamos a escassez de estudos pertinentes ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis – CVV. Por outro lado, a identificação de sérios entraves, há décadas indicados no CUV é digna, também, de atenção e vigilância dos professores no contexto de ensino do CVV, posto que, muitos destes problemas e entraves tendem a se manifestar, respeitadas algumas particularidades e especificidades, em ambos os contextos de ensino acadêmico (ALVES, BORGES NETO & MACHADO, 2007; ALVES, 2011; ALVES, BORGES NETO & INGAR, 2012).

Acentuamos o uso, numa perspectiva de complementaridade, dos *softwares Geogebra* e do *CAS Maple* permitem a descrição de um cenário de atividades de investigação inexequiveis quando restritas ao ambiente lápis/papel, fato que pode transformar e evitar uma aprendizagem apoiada apenas na reprodução automática de técnicas algorítmicas sofisticadas, embora, em várias circunstâncias, desprovidas de significado conceitual para o aprendiz. No próximo segmento, priorizaremos exemplos nos espaços IR^2 e IR^3.

3. Exemplos de situações do CVV com uso do *Geogebra*

O estudo do CUV, com base na abordagem dos livros de Cálculo, se restringe na exploração dos conceitos no IR^2. Por outro lado, os conceitos do CVV, que possuem uma fundamentação formal em Análise no IR^n, são explorados, de modo predominante, no espaço IR^3 e, com raras exceções, no IR^4. Por outro lado, a percepção e o entendimento, a partir da visualização, desses objetos conceituais, pode atuar no sentido de proporcionar uma *transição interna* (ALVES, 2011), do CUV para o CVV, de modo adequado. Nos casos em que discutimos neste trabalho, destacaremos as relações conceituais entre representações algébricas e geométricas, do CUV e do CVV.

Por exemplo, no CVV, estudam-se funções do tipo $f(x,y) = x^3y - xy^3$. Ora, um gráfico desta natureza é impraticável de se descrever, somente com lápis e papel. Ademais, quais são propriedades que podemos investigar relacionadas com esta função, no contexto do CVV, que podem ser analisadas no contexto do CUV e, reciprocamente?

Reparemos que, nesse caso, temos $f : IR^2 \to IR$ e, o estudante deve compreender, por exemplo, que as funções $f(3,y)$ e $f(x,3)$, são as restrições da função $f(x,y)$, para um subconjunto do seu domínio que é o IR^2.

Com uma ideia semelhante, destacamos na figura 2, as funções $r(x) = sen(x^2)/x^2$ e $r(x,y) = sen(x^2+y^2)/(x^2+y^2)$. A situação que buscamos significar, com base nos gráficos exibidos abaixo, é a qualidade de limitação da imagem das funções, nas proximidades das origens do IR^2 e do IR^3. Com base ainda nas relações conceituais extraídas dos gráficos, concluímos, com o gráfico gerado pelo *Geogebra* que $\lim_{x\to 0} sen(x^2)/x^2 = 1$ (lado esquerdo). De modo semelhante, com base na figura 1(lado direito) escrevemos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} sen(x^2+y^2)/(x^2+y^2) = 1$.

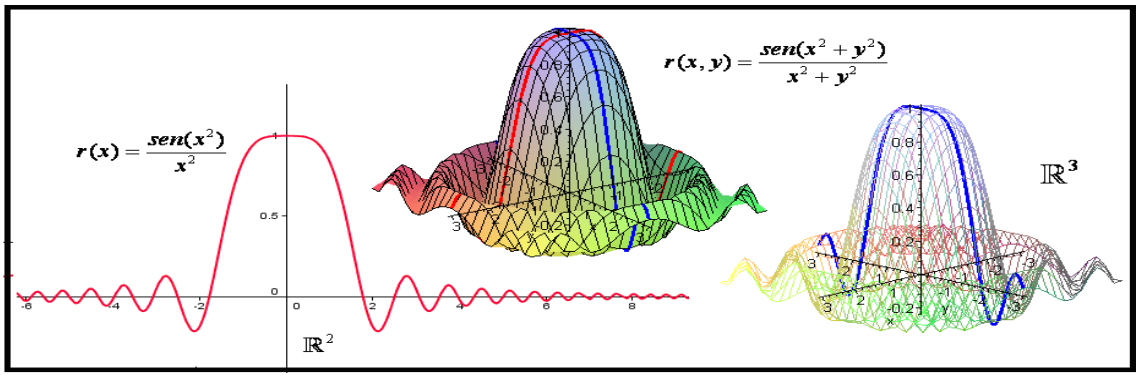


Figura 1: Descrição de imagem limitada de funções com o *Geogebra* e o *CAS Maple*

Tanto no CUV como no CVV, se estuda a noção de imagem ilimitada de funções. Do ponto de vista topológico, dizer que uma função $f: IR^n \to IR$ é ilimitada significa que, não conseguimos obter uma bola no espaço IR^n, de modo que sua imagem (ou gráfico) não se encontra dentro da bola. No CUV, destacamos na figura 2 (lado esquerdo) uma circunferência e a função $1/x$. Mas, no lado direito da mesma figura, visualizamos o gráfico de $1/(x+y)$ e, nas vizinhanças da origem $(0,0,0)$, possui um comportamento semelhante a função $1/x$, ou seja, não conseguimos uma bola (em nenhum dos dois casos) que contenha o gráfico dessas funções (ver fig. 2, lado esquerdo).

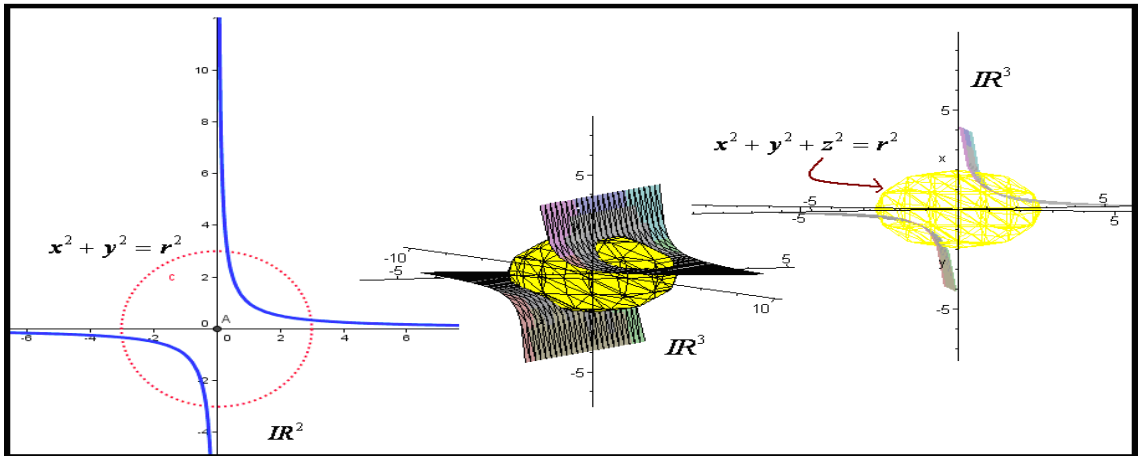


Figura 2: Descrição de imagem ilimitada de funções com o *Geogebra* e o *CAS Maple*

No CUV estuda-se a noção de função *derivável*, por outro lado, no CVV, estudamos a noção de função *diferenciável*. Geometricamente, no CUV, a interpretação intuitiva deste conceito relaciona-se com a noção de coincidência entre o gráfico de uma função $y = f(x)$ e uma reta tangente nesse ponto. No CVV, temos a noção de plano tangente ao gráfico de uma função. Por outro lado, a imagem metafórica sugerida pelos autores de livros didáticos, é significada por meio da noção de "bico" ou "quina" (fig. 3).

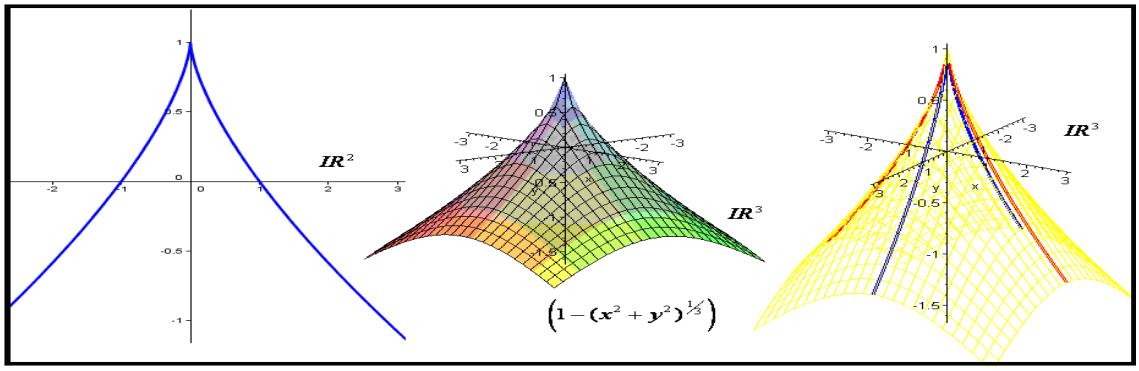


Figura 3: Descrição da noção da perda de diferenciabilidade com o *Geogebra* e o *CAS Maple*

Por exemplo, na figura 3, do lado esquerdo, descrevemos o gráfico da função $g(x)=1-(x^2)^{1/3}$, enquanto que do lado direito, vislumbramos o gráfico da função $g(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/3}$. Reparemos que em ambos as situações, percebemos a identificação de "bicos" ou "quinas" nos gráficos, nas proximidades da origem. Assim, depreendemos a perda de diferenciabilidade de ambas as funções, e relações conceituais entre os gráficos exibidos no IR^2 e IR^3.

Vejamos outro exemplo com as funções $h(x,y)=(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x+y}\right)$ e $h(x)=(x^2)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Uma das maneiras tradicionais de calcularmos tal limite pode ser por intermédio do uso do *teorema do sanduíche* estudado no contexto do CUV. Com o apoio do *Geogebra*, compreender as seguintes relações $-x^2 \le (x^2)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$ (no CUV). Todavia, no IR^3, com apoio nos gráficos fornecidos pelo *CAS Maple*, percebemos o mesmo comportamento relativo ao CUV

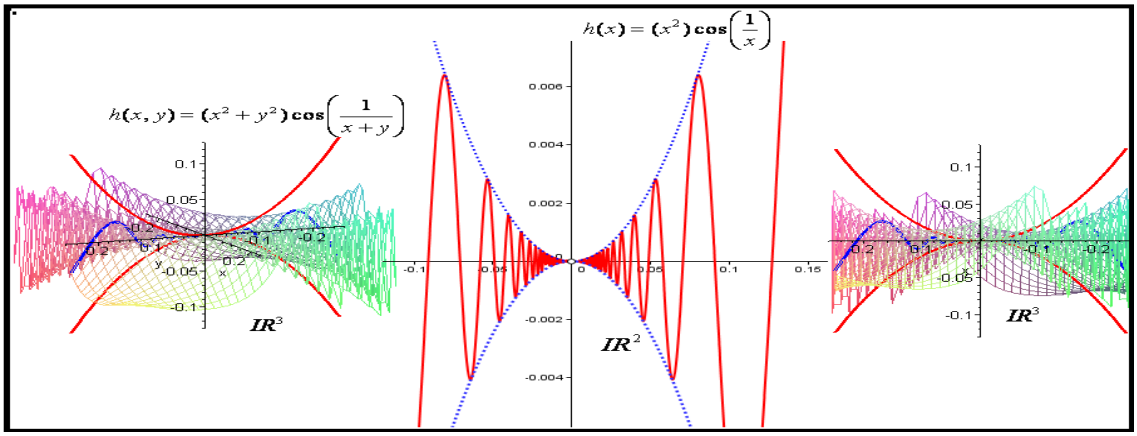


Figura 4: Relações evidenciadas com o Geogebra e o CAS Maple do teorema do sanduiche

Na figura 5, divisamos outro exemplo de conceito que pode ser significado com base na descrição e modelo matemático do CUV. De fato, com o *Geogebra*, obtêm-se o gráfico das funções $y=x^2$ e $y=-x^2$ que constituem as duas curvas parametrizadas por $\alpha(t)=(t,t^2)$ e $\beta(t)=(t,-t^2)$ sobre a região do espaço aonde temos definido o parabolóide hiperbólico, conhecido com um comportamento de "sela" (fig. 5).

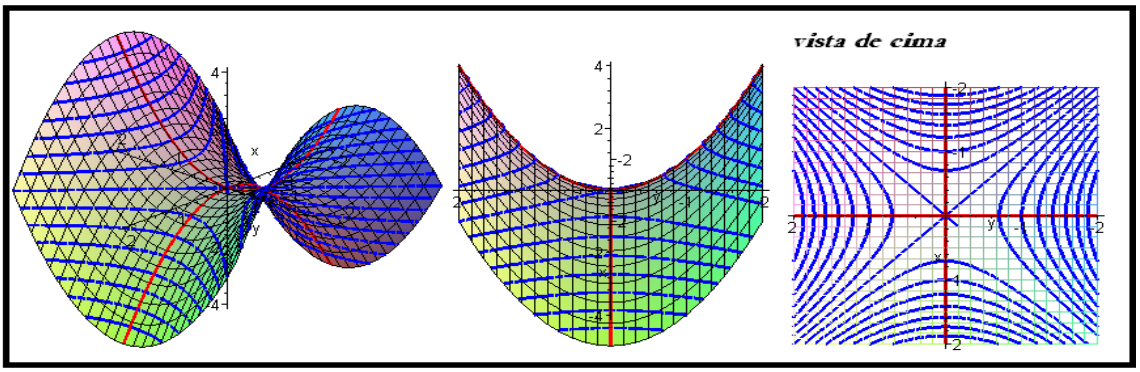


Figura 5: Descrição da noção da curva de nível e de sela com o *Geogebra* e o *CAS Maple*

NO CVV, podemos investigar a existência do seguinte limite $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ que, caso exista, é definido como a *derivada parcial* da função $f(x,y)$ e denotamos por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, no ponto (x_0,y_0). Neste caso, lidamos com a restrição da função $f(x,y_0)$. Por exemplo, se consideramos a função $f(x,y)=4-x^2-2y^2$. Avaliamos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-2$ que, no CUV, é justamente a declividade da reta descrita por $(y-1)=-2(x-1)$. Na figura 6, divisamos as relações entre os gráficos exibidos. O elemento invariante nesse caso, é que o entendimento, segundo o qual, tanto no CUV como no CVV, se obtém a declividade de uma reta.

Na figura 6, exibimos uma construção com o *Geogebra* que evidencia o comportamento da declividade da reta tangente, sobre uma curva obtida pela interseção da superfície

descrita pelo gráfico da função $f(x,y)=4-x^2-2y^2$, com o plano de equação $y=1$. A construção geométrica da obtenção da derivada parcial é exibida na figura 6 (lado esquerdo) e percebemos as devidas relações.

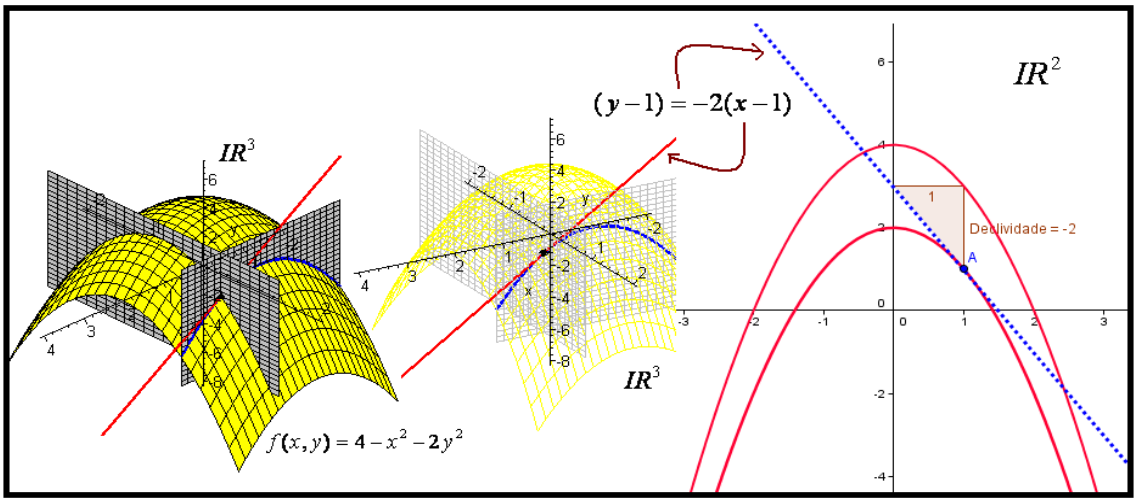


Figura 6: Descrição com o auxilio do *Geogebra* da restrição da função e o comportamento da declividade que coincide com a noção de derivada parcial no CVV

Para concluir, consideremos a seguinte equação em termos de duas variáveis $y^5+16y-32x^3+32x=0$. Reparemos, com base na figura 5 (lado esquerdo), que o *locus* descrito por tal equação, define um subconjunto do IR^2 que, aparentemente, possui as propriedades de ser o gráfico de uma função de y como variável de x, todavia, Krantz & Parks (2002, p. 2) sublinham que "nenhum fórmula para tal função existe.".

Por outro lado, quando escrevemos $y^5+16y=32x^3-32x$, para cada valor fixado $x\in IR$, descrevemos a família de funções $y^5+16y=k$, com $k=32x^3-32x$.

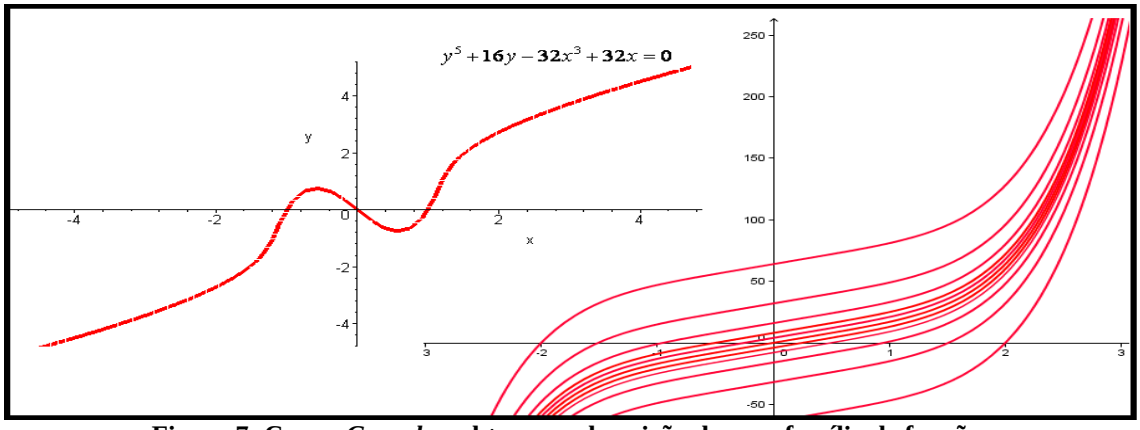


Figura 7: Com o *Geogebra* obtemos a descrição de uma família de funções

Por fim, o processo de integração no contexto do CUV, é recorrente a orientação dos autores de livros didáticos no Brasil, fornecer a descrição do processo de obtenção da área de uma região no plano IR^2 que se encontra abaixo do eixo das ordenadas. De fato, na figura 7, divisamos com relativa facilidade o trecho abaixo do eixo. Por outro lado, o

trecho da curva que exibimos no plano (lado esquerdo, figura 7), corresponde exatamente a uma das restrições da função $h(x,y) = ysen(xy)$, relativa ao seu domínio aqui considerado como $[1,2]\times[0,\pi]$. Comparemos seu comportamento com base na fig. 8.

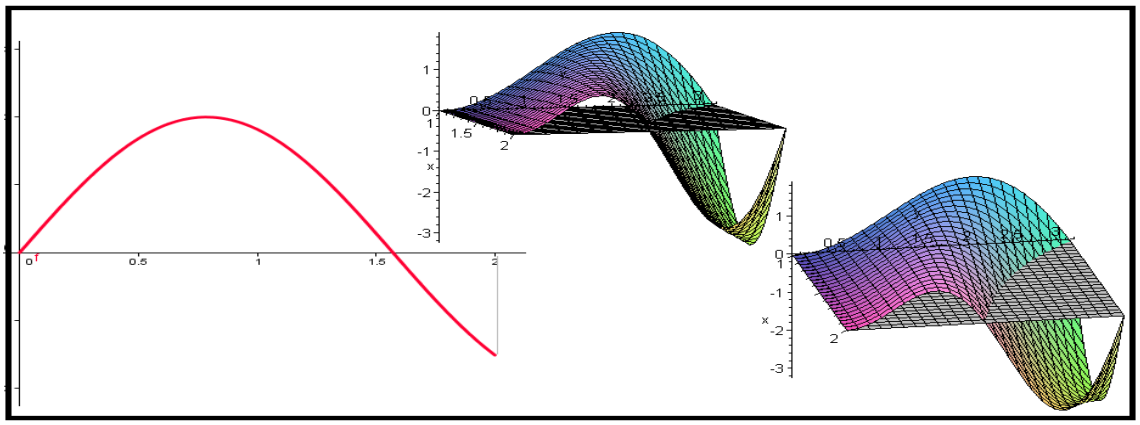


Figura 8: Visualização da região de integração no IR^2 e no IR^3

Desse modo, dada a representação gráfica fornecida pelo computador, podemos extrair e descrever o comportamento particular nessa região $[1,2]\times[0,\pi]$ e compreender, com o auxilio do *Geogebra*, a região que se encontra abaixo do plano xOy, bem com a região do espaço abaixo do gráfico. Apesar de que, quando restringimos tal tarefa ao quadro analítico, este elemento comum a ambos os contextos é desconsiderado, com o uso da tecnologia, evidenciamos um comportamento e raciocínio semelhante.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa comunicação, evidenciamos uma perspectiva de exploração didática envolvendo as possibilidades de complementaridade com vistas ao apoio ao entendimento, proporcionado pelos *softwares Geogebra* e *Maple*. Nos casos que discutimos há pouco, evidenciam o papel do *Geogebra* no sentido de proporcionar a compreensão de determinadas propriedades atinentes ao CUV e ao CVV no cenário da *transição interna*.

REFERÊNCIAS

Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio; Machado, Rosélia, C. C. (2007). Uma sequência de Ensino para a aquisição do conceito de derivada parcial, direcional e teoremas correlatos no Cálculo em Várias Variáveis, In: *Conexões, Ciência e Tecnologia*, v. 1, n. 1, 29-34.
Disponível em: http://revistaconexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/issue/archive.

Alves, F. Regis. V.& Borges Neto. H. (2008). Aplicação da Sequência Fedathi na aquisição do processo de Integral Tripla com o auxílio do Maple. In: *XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Acessível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/trabalhos_comissao_cientifica.php Alves, Francisco. R. V. (2011). Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 353p. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php

Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2011a). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. Educação Matemática Pesquisa. v. 13-3, 597-626, Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive. Acesso em: 25 dez. 2011.

Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2011b). Análise de livros de cálculo a várias variáveis: o caso da comutatividade das derivadas parciais. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 1-12. Disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem

Alves, Francisco Regis; Borges Neto, H. & Alves Dias. M.. (2012). Implicações e aplicações da teoria das representações semióticas no ensino do Cálculo. In: *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. v. 5, Disponível em: http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM

Alves, Francisco. R. V. (2012). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra. In: *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, 1, CLXV-CLXXIX, Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index. Acessado em: 04 de Abril de 2012.

Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. Ingar, Kátia, V. (2012). Aplicações da Sequência Fedathi: sobre o ensino dos pontos críticos e de inflexão. VI Colóquio Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas. Disponível em: http://irem.pucp.edu.pe/164/iv-coloquio-internacional-sobre-ensenanza-de-las-matematicas

Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2012). Curvas parametrizadas: atividades envolvendo a visualização dos conceitos do Cálculo. In: *RELME 26*, p. 1-12. Disponível em: http://www.relme26.ufop.br/index.php?option=com_content&view=frontpage&lang=pt

Krantz. Steven. G. & Parks. Harold. R. (2002). *The implicit function theorem*. New York: Hardcover. 149p.

UNA EXPERIENCIA EN LA FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA ACERCA DEL TEMA "FUNCIONES"

Silvina Cafferata Ferri – Dolores Bosch – Federico Gómez – Daniela Rodríguez Brot
scafferata@fibertel.com.ar – dolobosch@fibertel.com.ar – fedetipito@gmail.com – danielarbrot@gmail.com
Instituto de Enseñanza Superior N°1 "Dra. Alicia Moreau de Justo" – Argentina

Modalidad: Comunicación
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Funciones – Secuencias didácticas – Formación docente – Actualización docente.

Resumen

La presente comunicación tiene como objetivo exponer el resumen y las conclusiones de un trabajo desarrollado en un Instituto de Formación Docente de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Se diseñó e implementó durante el año 2011, repitiéndose en la actualidad, un curso de actualización docente destinado a profesores de Matemática en ejercicio en el Nivel Medio, con el objeto de analizar la posible inclusión de un programa como GeoGebra en sus clases, referidas al desarrollo del contenido Funciones y la multiplicidad de aspectos que este contenido incluye.

Participaron además de la elaboración, desarrollo e implementación de este curso alumnos avanzados del profesorado de Matemática del Instituto, lo que permite también reflexionar acerca de la inclusión y utilización de un programa como GeoGebra como herramienta didáctica para la clase de Matemática en la formación docente y el tipo de actividades que se pueden elaborar.

Podremos compartir esta experiencia a través de una puesta en común, tanto de las actividades diseñadas para el curso de actualización, como así también las secuencias didácticas que los docentes asistentes han elaborado como producto final del curso realizado, destinadas a alumnos de escuela media en relación al contenido antes mencionado.

Introducción

Los avances tecnológicos, especialmente computacionales, plantean grandes desafíos tanto para los docentes como para los investigadores. Asimismo, afecta a los distintos niveles de decisión educativa en cuanto a la incorporación de recursos informáticos al proceso de enseñanza y aprendizaje.

La incorporación de la computadora en la escuela, mediada por un software educativo, impacta en forma directa sobre los docentes, su formación, el currículum en Matemática, el proceso de enseñanza y aprendizaje, entre otros.

Por ello, la capacitación del docente es primordial, ya que tiene a su cargo la responsabilidad de diseñar situaciones didácticas que permitan aprovechar al máximo las potencialidades de la tecnología de acuerdo con el nivel evolutivo del estudiante.

A su vez, es indispensable que los docentes asimilen esta tecnología, ya que, de lo contrario, se correría el riesgo de llevar a cabo una práctica de escasa o nula significación.

Esta competencia de generar situaciones de aprendizaje adecuadas no requiere solamente del conocimiento de la herramienta informática sino que además deberá contemplar la selección de contenidos que se abordarán con ella, a través de cuáles programas y de qué forma se llevará adelante el proceso de enseñanza.

Esto dará lugar a una nueva mirada acerca de algunos contenidos matemáticos, resultantes de los avances en el campo tecnológico, que posibiliten el tratamiento de problemas y situaciones que sin ellos no serían accesibles, y abran, a la vez, la posibilidad de adoptar un enfoque experimental de la Matemática que cambie la naturaleza de su aprendizaje.

Podemos plantearnos entonces *¿cuáles son los contenidos que integran el currículum en el área de Matemática, que resultan susceptibles de ser abordados en ambientes informáticos aprovechando así sus características diferenciales?*

El contenido *Funciones* es considerado uno de los temas de mayor importancia en la Matemática, no sólo por su riqueza desde el punto de vista de la disciplina, sino por su aplicación a distintos aspectos de la realidad como es la modelización. Esta importancia también se refleja, por ejemplo, en que el mismo concepto es abordado con distintos niveles de profundidad y desde distintos aspectos durante todos los años de la Escuela Media. Por lo cual, hemos fijado nuestro punto de interés en torno a este bloque de contenidos.

Propuesta de actualización docente

De acuerdo con lo descripto en la introducción, se planteó el interés por diseñar encuentros de capacitación o actualización docente, destinados a Profesores de Matemática de Escuelas de Nivel Medio (13-17 años) o a estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática.

El proyecto surge y se desarrolla en un Instituto de Formación Docente: Instituto de Enseñanza Superior N° 1 “Dra. Alicia Moreau de Justo”, de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina.

El grupo de trabajo que se conforma para ello está integrado por una docente del instituto, a cargo de las asignaturas Cálculo I y Cálculo II de la carrera de Profesorado en Matemática, junto a tres estudiantes avanzados de la misma.

La elección del software GeoGebra[1] para el diseño de actividades de aula está fundamentada desde distintos aspectos.

Por un lado, considerando los contenidos a trabajar, resulta muy favorable la capacidad gráfica del programa, que permite presentar situaciones, ilustrar y visualizar conceptos y resultados, experimentar ejemplos, verificar soluciones, etc.

Sin disponer de un dominio completo del programa, en las primeras sesiones de trabajo es posible obtener la solución a una gran cantidad de problemas de la Matemática y de sus aplicaciones a través de la construcción de gráficos y utilizando su potencial para el cálculo numérico y simbólico.

Por otro lado, es un programa creado, diseñado y destinado a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, con las ventajas que esto significa para esta disciplina.

Se consideraron, además, todos los aspectos positivos que se pueden enunciar acerca de los software libres, de descarga e instalación gratuitas.

Esto ha resultado de sumo interés en el último tiempo ya que actualmente nos encontramos en nuestro país en un proceso de distribución de netbooks gratuitas para todos los alumnos de escuelas públicas. En lo que a Nivel Medio se refiere, el Ministerio de Educación del Gobierno Nacional es el encargado de esta distribución, a través del Programa Conectar Igualdad[2], que comenzó hace aproximadamente dos años y que se sigue realizando por etapas.

Las computadoras que ya han sido distribuidas cuentan con algunos programas instalados, y la posibilidad de instalación de otros, por lo que un software como GeoGebra ha tomado una difusión muy relevante en el último tiempo y ha despertado sumo interés por parte de los docentes acerca de su utilización y su implementación en el aula.

De acuerdo con todo lo expuesto, hoy en día, resulta fundamental que los docentes reflexionen acerca de la posibilidad de diseñar y poner en práctica diferentes situaciones problemáticas que requieran la utilización de la computadora como herramienta para su resolución. Sin embargo, al mismo tiempo deben permitir un aprendizaje significativo de los contenidos a desarrollar, de modo que no resulte una mera herramienta de cálculo apenas algo más sofisticada que otras.

[1] Proporcionado por: http://www.geogebra.org/
[2] Página del Programa: http://www.conectarigualdad.gob.ar/

Acerca del curso implementado

Tal como se ha comentado, el curso está destinado a profesores de Matemática de Escuela Media o a estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática. Se desarrolla en el mencionado instituto, durante 6 encuentros, de 2 horas reloj de duración cada uno.

Los objetivos del curso son:

- Brindar un conocimiento y una clara visualización del potencial del software.
- Potenciar en los docentes la utilización racional de la computadora como herramienta didáctica en su clase.
- Complementar con otros recursos la formación didáctico-matemática con que cuentan.
- Idear y analizar actividades de aplicación de los conocimientos teóricos y prácticos adquiridos, que se puedan implementar en la clase de Matemática en la Escuela Media.
- Incentivar a los docentes para la generación de nuevas ideas propias con el uso del software.

Los ejes temáticos en los que nos centramos son:

- Introducción a la utilización del programa: menú, ventanas, sintaxis de las sentencias, funciones incluidas en el software, utilización de las herramientas, configuración de opciones y propiedades, ejemplos de aplicación.
- Concepto de función. Representaciones gráficas. Desarrollo de algunos de los aspectos y características particulares de cada una de las funciones que se incluyen en la Escuela Media. Derivabilidad de funciones. Integrales indefinidas y definidas.
- Actividades y situaciones problemáticas cuya resolución conllevan la implementación de estos contenidos mediante la modelización a través de funciones. Aplicaciones de las mismas a distintas áreas del conocimiento, como por ejemplo Ciencias Naturales.

Durante los encuentros, los docentes y estudiantes desarrollan y resuelven distintas actividades diseñadas a trabajar con cada uno de los contenidos incluidos en los ejes mencionados. Conjuntamente, se plantean preguntas con el objetivo de reflexionar sobre la importancia e innovación de la aplicación del software, y se debate sobre las ventajas y desventajas que tiene el uso del mismo.

El último encuentro está destinado a que cada uno de los participantes presenten una propuesta personal de secuencia didáctica de actividades respecto de alguno de los

contenidos desarrollados en el curso, que permitan utilizar el software como herramienta para su resolución, que se pueda implementar en alguno de los cursos en que ellos trabajen.

Al igual que a lo largo de todo el curso, con las propuestas realizadas por cada participante, se elabora un material conjunto para ser distribuido y compartido entre todos los profesores y estudiantes que asisten al curso.

Algunos ejemplos de actividades desarrolladas en los encuentros

En el primer encuentro se les distribuye a los docentes un material con las actividades a desarrollar, que comienza con una breve descripción del programa, las partes de la pantalla y sus elementos principales, las funciones incluidas en el menú que se utilizan más frecuentemente, las opciones que se despliegan de cada ícono de la barra de herramientas, y se inicia el trabajo con funciones.

A partir de la definición de un ejemplo de una función, se analizan las opciones de configuración del gráfico: su visualización, opciones de configuración de los ejes, cuadrícula, etc. Del mismo modo, se analizan las opciones de configuración de los objetos, que en este caso, resulta la función definida. Se puede ver así la posibilidad de mostrar u ocultar el objeto, renombrarlo, visualizar un rótulo, eliminarlo, modificar su color o su estilo, etc.

La posibilidad de definir un punto, perteneciente o no a la gráfica de la función, permite trabajar con la forma en que se visualizan los objetos en la Vista Algebraica, según se trate de objetos dependientes o libres. Del mismo modo, se analiza la posibilidad de que el programa defina los puntos como intersección de objetos, como puede ser en este caso, entre dos funciones.

Para poder graficar otros ejemplos y conocer otras opciones del programa, se analizan las funciones incluidas, que pueden visualizarse en el botón como así también las modificaciones y desplazamientos de los gráficos a partir de la definición de otros ejemplos.

A partir del segundo encuentro y en los sucesivos se incorporan otros objetos y otras funciones: comienzan a utilizarse los deslizadores, con su correspondiente configuración y opciones. Esto permite que los docentes elaboren gráficos donde se visualice la influencia de ciertos parámetros en la definición de una función, como por ejemplo: $f(x) = a(x-b)^2 + c$ ó $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx - c) + d$

Pueden también definirse puntos de la forma A = (a , f(a)) a partir de un deslizador "a" definido, como por ejemplo A = (a , ln(a)) o A = (a , cos(a)) para trabajar con los asistentes otras opciones de configuración, como por ejemplo animación automática, activar rastro, limpiar rastro, etc.

Otras actividades incluyen también la posibilidad de trabajar con funciones definidas en un intervalo y funciones definidas por ramas, lo que permite incorporar sentencias como Función[Función, Número a, Número b] o Si[<Condición>,<Entonces>,<Si no>]

Se plantean también otras situaciones más abiertas en cuanto a la resolución y construcción con el programa, como por ejemplo:

- *Así como en las funciones lineales analizamos y calculamos proporciones, insertemos una circunferencia con centro en el Origen de coordenadas. ¿Cómo podemos mostrar o permitir que se visualicen las proporciones trigonométricas para distintos ángulos y para distintos radios de la circunferencia?*
- *Consideremos la circunferencia trigonométrica de radio* 1 *y las proporciones trigonométricas antes calculadas. Puede definirse un punto cuyas coordenadas sean: el valor del ángulo, y el valor de una de esas proporciones calculadas. Visualizar el rastro que deja este nuevo punto y la gráfica que describe a medida que se mueve el punto sobre la circunferencia*.

Otros tipos de secuencias que se les plantea a los asistentes permiten no sólo trabajar en relación a las construcciones con el programa sino también la posibilidad de reflexionar en conjunto en relación a su aplicación con los alumnos de escuela media:

Al trabajar con la función afín la ecuación explicita de la recta es $y = a \cdot x + b$, *donde "a" es la pendiente y, tal como se ha estudiado, puede calcularse como* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. *En GeoGebra las construcciones de las rectas con deslizadores se podrían hacer en función de "a" o de "*Δx y Δy*" ¿Cuáles son las ventajas de trabajar con deslizadores para* Δx y Δy *en lugar de uno para "a"? ¿Y las desventajas?"*

En cada encuentro se dejan algunas actividades o problemas para que los asistentes puedan pensar y resolver para el encuentro siguiente, al igual que la posibilidad de su implementación en el aula. Por ejemplo:

Un campesino cuenta con 240 m de cerca y desea encerrar un campo rectangular que bordea un río recto. En la rivera no se necesita cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que ocupa el área máxima?

¿Cómo puede resolverse esta actividad utilizando GeoGebra? ¿Qué contenidos pueden desarrollarse a partir de ella?

Otras actividades que se incluyen a lo largo de los encuentros permiten rever conceptos relativos a otras funciones, como es el caso de otras funciones polinómicas, homográficas, exponenciales, logarítmicas, etc.

El desarrollo de ellos abarca también el concepto de derivabilidad en un punto, a través de las variaciones de los incrementos, su extensión al concepto de función derivada y derivadas sucesivas, ecuaciones de las rectas tangente y normal, aplicaciones de las derivadas al estudio de funciones, etc. Desde el punto de vista del programa, se trabaja nuevamente con deslizadores y distintos tipos de puntos, se incorporan las sentencias Derivada[Función], Derivada[Función,Número], f'(x), f''(x), el ícono asociado al gráfico de rectas tangentes, comandos Raíz, Desarrolla, Extremo, Mínimo, Máximo, etc.

Otros ejemplos de actividades relativas al análisis de funciones incluyen el trabajo con el software, relativos a integrales indefinidas, definidas, el área entre una función y el eje X, el área entre funciones, etc. incorporando así comandos como Integral[Función], Integral[Función, a, b], Integral[Función f, Función g, a, b].

Entre cada encuentro, además de dejar planteados algunos problemas *para pensar*, se les facilita a los participantes algunos ejemplos de archivos diseñados en GeoGebra, tal como puede visualizarse en el Anexo a modo de ejemplo. Las construcciones de estos archivos en GeoGebra no son sencillas para alguien que esté comenzando a conocer el programa, pero creemos que proporcionarles estas construcciones a los docentes y alumnos asistentes sirve para desplegar la posibilidad de utilizar materiales didácticos construidos por otros, aún si se desconocen detalles técnicos acerca de cómo fueron realizados. Algunos de estos ejemplos son generados por el grupo de trabajo encargado del dictado del curso, y otros obtenidos de la web, particularmente de la página de GeoGebra hecha para compartir estos archivos[3].

A modo de introducirse en lo referido a programación, los asistentes llegan a crear un ejemplo de applet, que combina el trabajo con números aleatorios, casillas de entradas de datos, botones, y nuevos comandos. Un ejemplo de ello también se incluye en el Anexo.

[3] http://www.geogebratube.org/

Consideraciones finales

Tal como se planteó al comienzo del presente trabajo, resulta de interés analizar con los Profesores de Matemática que actualmente ejercen en la Escuela Media, y con los estudiantes avanzados de la carrera como futuros docentes, *¿cuáles son los contenidos que integran el currículum en el área de Matemática, que resultan susceptibles de ser abordados en ambientes informáticos aprovechando así sus características diferenciales?*

El bloque referido a Funciones y todos los conceptos que a partir de ello se desprenden presentan una disposición particular respecto de ser desarrollados con el aporte de una herramienta didáctica como GeoGebra.

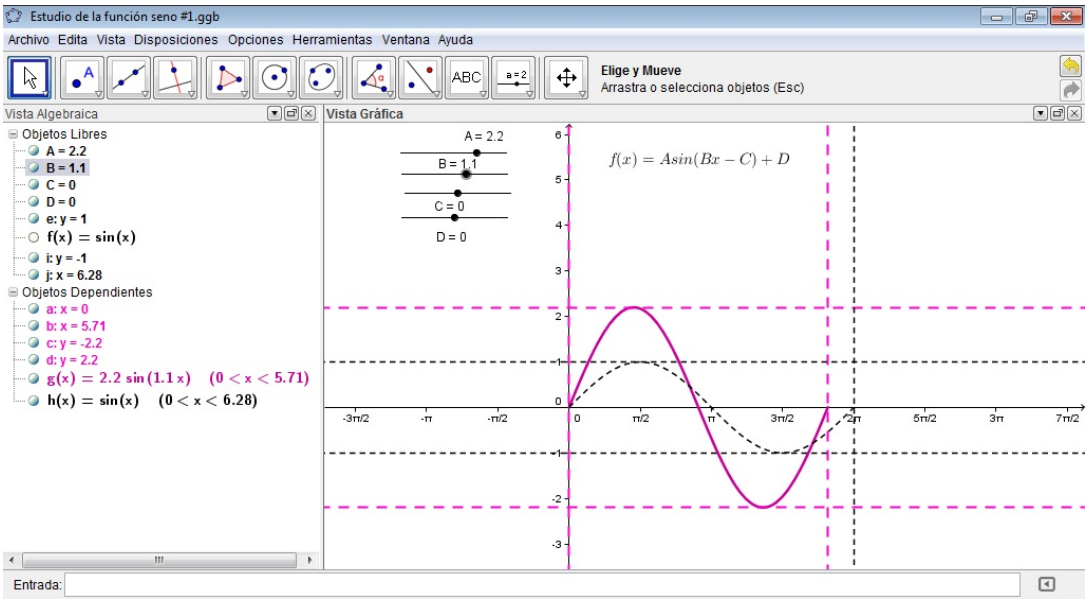
De acuerdo con la breve descripción que realizamos acerca de los encuentros, es nuestro objetivo que los asistentes puedan introducirse a la utilización del programa, sus objetos y sus comandos, y experimenten los primeros ejemplos de construcciones propias, como así también la utilización de archivos diseñados por otros. En todos los casos, destacamos el análisis que de esas actividades ellos pueden realizar respecto de la utilización en sus clases como así también el diseño de sus propias secuencias didácticas para su implementación.

Referencias bibliográficas

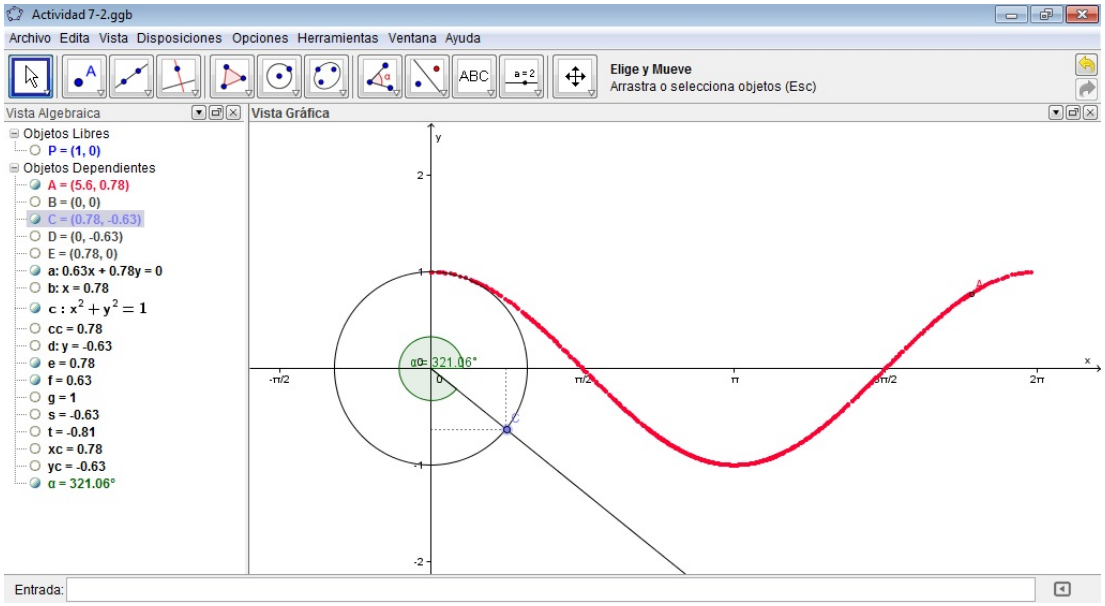
- Borbón, A: *Manual para Geogebra*. Revista Digital Matemática, Educación e Internet. Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica. http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/Secciones/Temas_de_Geometria/ABorbon_ManualGeogebraV11N1_2010/2_ABorbon_ManualGeogebra.pdf. Consultado el 12/10/2012.
- Carrillo, A; Llamas, I. (2010). *Geogebra: mucho más que geometría dinámica*. México: Alfaomega Ra-Ma Editores.
- Corte Ramos, B. (2008): *Apuntes sobre Geogebra… con unos toques de mates*. Centro del Profesorado y de Recursos de Gijón. Gobierno del Principado de Asturias. http://web.educastur.princast.es/cpr/gijon/recursos/mates/ManualGeogebra.pdf Consultado el 12/10/2012
- Federación de Enseñanza de Andalucía (2010): ¿Qué es Geogebra? *Temas para la Educación. Revista Digital para Profesionales de la Enseñanza*. Número 8. ISNN 1989-4023. http://www2.fe.ccoo.es/andalucia/docu/p5sd7158.pdf

Anexo: algunas imágenes sobre las actividades realizadas

Ejemplo 1: La incorporación de los deslizadores permite que los asistentes elaboren gráficos donde se visualice la influencia de ciertos parámetros en la definición de una función, como por ejemplo $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx - c) + d$. La posibilidad de definir una función sólo en un intervalo permite en el caso de las funciones trigonométricas visualizar sólo un período de cada función.



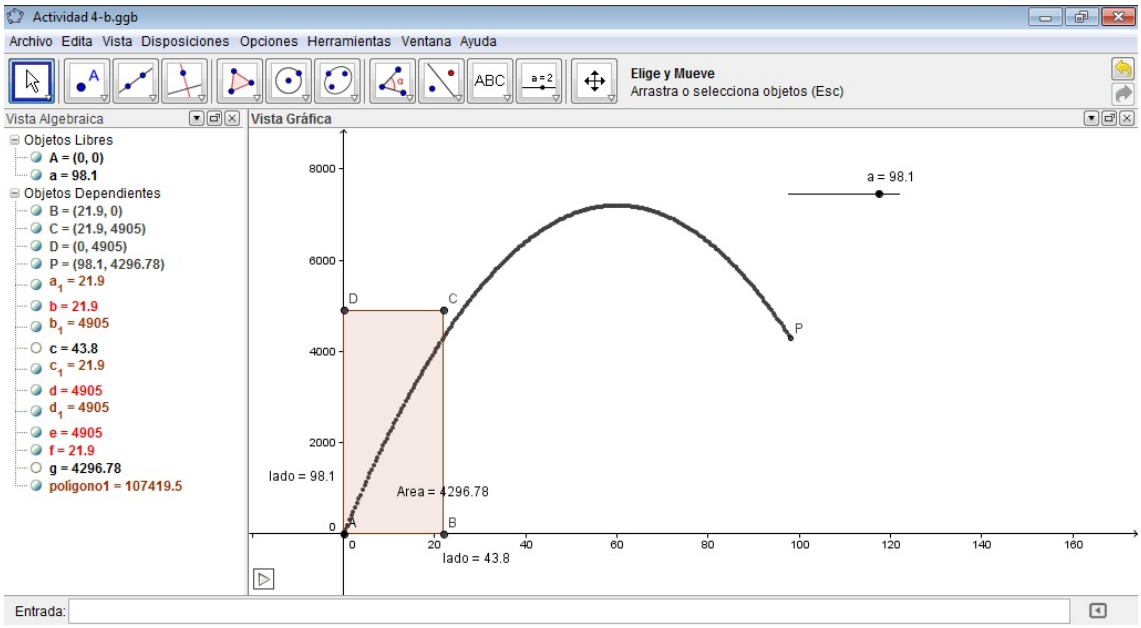
Ejemplo 2: Considerando la circunferencia trigonométrica y las proporciones trigonométricas que pueden calcularse, se puede definir un punto, dado el ángulo y una de las proporciones calculadas, para visualizar luego el rastro que deja ese punto a medida que se mueve el que está sobre la circunferencia.



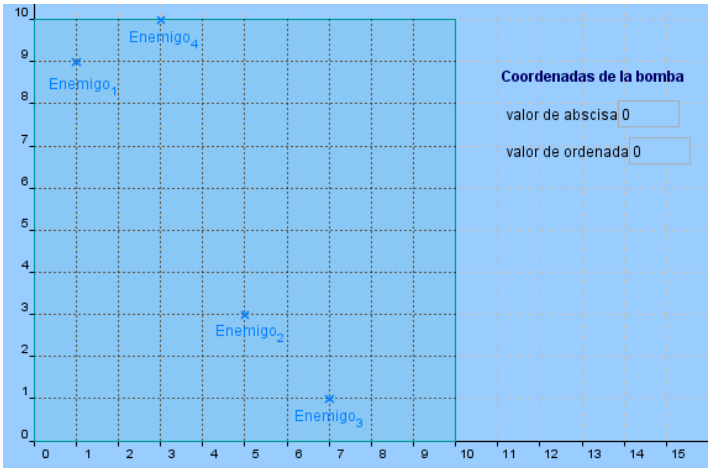
Ejemplo 3: Ante un problema como el comentado anteriormente:

Un campesino cuenta con 240 m de cerca y desea encerrar un campo rectangular que bordea un río recto. En la rivera no se necesita cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que ocupa el área máxima?

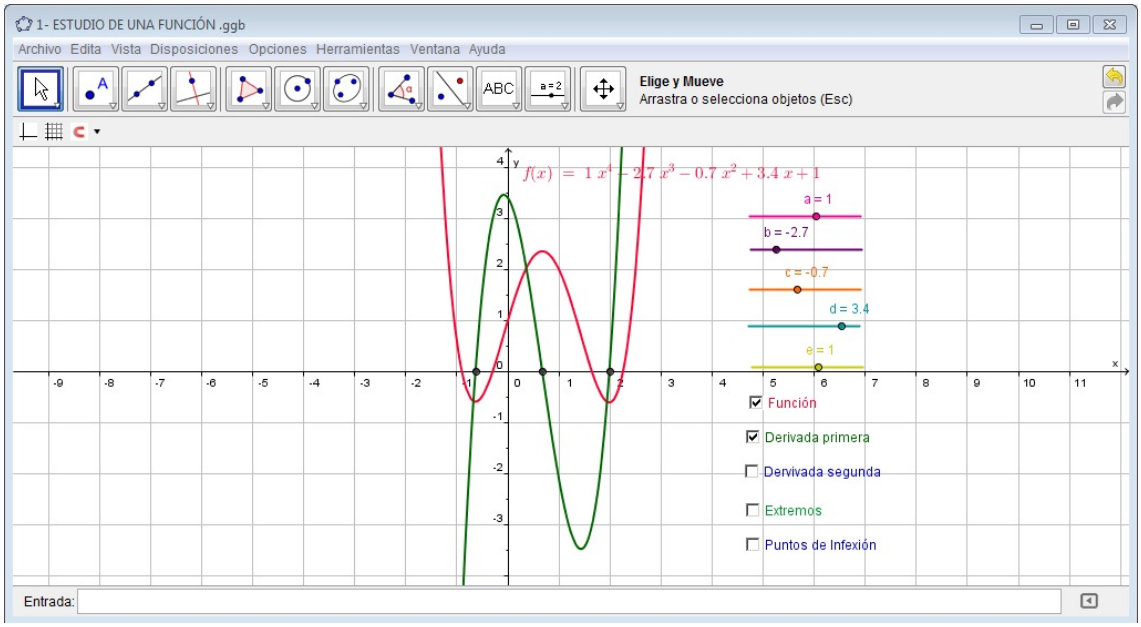
El programa permite visualizar los posibles rectángulos que se pueden construir con las características dadas, y la gráfica correspondiente al área de cada uno de ellos.



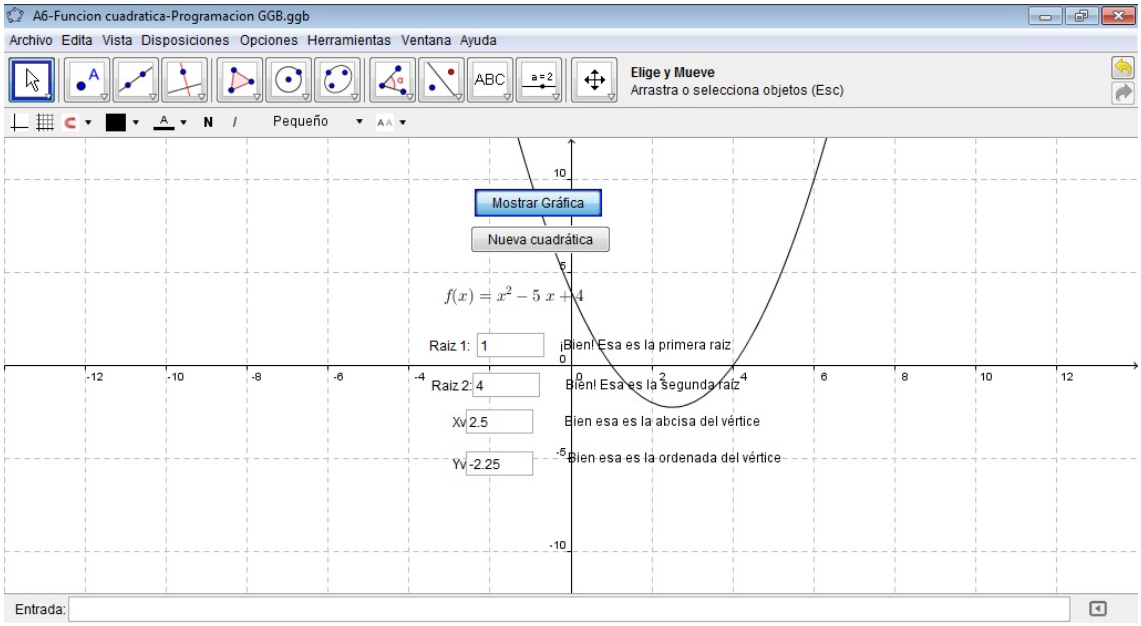
Ejemplo 4: Uno de los archivos que se les facilita a los participantes es una Batalla Naval. Ellos, a modo de *usuarios* en lugar de diseñadores, leen la consigna planteada, prueban su funcionamiento, experimentan alternativas, analizan contenidos a desarrollar con sus alumnos y plantean actividades que se pueden realizar a partir de su utilización.



Ejemplo 5: Mediante la utilización de deslizadores y casillas de control puede visualizarse un ejemplo de actividad que permite realizar el estudio de funciones polinómicas a partir de sus derivadas.



Ejemplo 6: Los asistentes crean un applet que genere funciones cuadráticas de manera aleatoria (con la utilización de la generación de números aleatorios). Se ofrecen casillas de entradas de datos para que los usuarios respondan cuáles son las raíces y las coordenadas del vértice. El programa, entonces, debe poder indicar si la respuesta es correcta. Y, en ese caso, habilitar un nuevo botón que permita visualizar el gráfico de la función, adaptando su escala o los límites de visualización de acuerdo con cada caso.



UNA SECUENCIA PARA ANALIZAR LOS EFECTOS GEOMÉTRICOS RELACIONADOS CON LA FUNCIÓN CUADRÁTICA UTILIZANDO GEOGEBRA

Rafael E. Gutiérrez A. – Yender J. Araujo M.– Juan L. Prieto G.
rega1993@gmail.com – yjam15@hotmail.com – juanl.prietog@gmail.com
Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

Modalidad: CB.
Nivel Educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Parámetro, función cuadrática, parábola, GeoGebra.

Resumen

Quienes nos dedicamos a la formación de profesores de matemática vemos con preocupación cómo éstos enfrentan dificultades para la comprensión y enseñanza de algunos tópicos matemáticos fundamentales. Con el propósito de apoyarles, el siguiente trabajo describe una secuencia para el análisis de los efectos geométricos provocados por la variación de los parámetros de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ *sobre la parábola. La secuencia se apoya en el uso del GeoGebra, como medio para dar sentido a los efectos de deformación, traslación y reflexión, experimentados por las familias de parábolas concernientes a la expresión antes indicada. Teniendo en cuenta que estos efectos están relacionados con la variación de los parámetros, se describe una secuencia de tres pasos donde se explica cómo utilizar el GeoGebra para visualizar, identificar y/o relacionar los cambios sufridos por las parábolas. La puesta en práctica de esta propuesta puede conducir a mejoras en la calidad del razonamiento matemático de los docentes, colocándoles en condiciones favorables para impartir la enseñanza en la Educación Media. De esta manera, se busca potenciar los métodos de enseñanza de los profesores de matemática en Venezuela a través de la integración de Software Libre en la dinámica escolar.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

En la actualidad, llegar a comprender los efectos geométricos provocados por la variación de los parámetros de una función cualquiera sobre su gráfica se considera un propósito de aprendizaje matemático fundamental hacia el final de la Educación Media (NCTM, 2000). Sin embargo, los estudios dan cuenta de las dificultades que tienen los estudiantes para representar gráficamente una función cuadrática dada su escaza comprensión de los efectos geométricos mencionados anteriormente, producto de una enseñanza basada, en la mayoría de los casos, en el uso de fórmulas (Darmawan & Iwan, 2011). Una forma de trascender esta situación es mediante la elaboración de propuestas formativas que ayuden a los profesores a desarrollar una enseñanza basada en la comprensión de las características de una curva, a partir del valor de los parámetros de la función correspondiente.

Hoy en día, los profesores de matemática cuentan con programas informáticos que facilitan la exploración de esta clase de efectos geométricos sobre distintas familias de curvas. Uno de estos programas es el GeoGebra, un tipo de Software Libre innovador, dinámico y de fácil acceso desde la web, que está siendo utilizado por una comunidad importante de profesores e investigadores alrededor del mundo (Diković, 2009; Hohenwarter, 2006). Usando el GeoGebra para analizar los efectos geométricos que sufren las parábolas tras la variación de los parámetros de $f(x) = ax^2 + bx + c$, durante un conversatorio con profesores de matemática, se obtuvieron resultados interesantes para la práctica docente. La finalidad de este análisis es contribuir con los cambios en la manera de pensar del profesor sobre tales variaciones, a la vez que se busca impactar sobre sus métodos de enseñanza mediante la integración de tecnologías.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS DEL DISEÑO

El diseño de la secuencia instruccional parte de considerar que la variación de los parámetros de $f(x) = ax^2 + bx + c$ produce efectos geométricos sobre la gráfica correspondiente, los cuales pueden visualizarse con GeoGebra. Estos efectos son de tres tipos: *deformación, traslación y reflexión* (Darmawan et al., 2011), los cuales se definen a partir de los cambios de "forma" y "posición" experimentados por una parábola con respecto a la parábola canónica, cuya expresión es $f(x) = x^2$.

El análisis de estos efectos tiene en cuenta los siguientes elementos: (i) *eje de simetría*, recta paralela al *eje y* que divide a la curva en dos porciones simétricas; (ii) *vértice*, punto de intersección de la parábola con su eje de simetría; (iii) *eje de reflexión*, recta que es perpendicular al eje de simetría y que pasa por el vértice, y (iv) *concavidad*, ubicación de los puntos de la parábola con respecto a los semiplanos determinados por el eje de reflexión correspondiente. Dado que la variación de cada parámetro produce algún efecto sobre la parábola, se realiza el análisis de estos efectos de forma separada.

En cuanto al GeoGebra, la secuencia se apoya en el uso de tres deslizadores que se crean para ajustar el valor de los parámetros. Esta construcción garantiza que, al utilizar los deslizadores, se puedan visualizar los efectos geométricos mencionados. A continuación, se inicia el análisis siguiendo un itinerario estructurado en tres apartados.

DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA

La variación del parámetro a y sus efectos sobre la parábola

La variación del parámetro a en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$ produce dos efectos sobre la parábola canónica: *deformación y reflexión*. La *deformación* se relaciona con

los cambios de posición experimentados por las ramas de la parábola, ya sea que éstas se alejen o acerquen a su eje de simetría. Cuando la distancia entre las ramas y el eje de simetría "aumenta", con respecto a la parábola canónica, se dice que la primera se ha transformado a causa de una "deformación" de tipo *dilatación* y, en el caso contrario, la deformación provocada sobre la curva es una *contracción.* La *reflexión*, por su parte, se refiere al cambio en la concavidad que sufre la parábola canónica o cualquiera otra que se tenga. Es importante destacar que, dependiendo del intervalo establecido para el deslizador correspondiente, ambos efectos sobre la parábola pueden visualizarse de manera separada o simultánea.

Deformación

Para visualizar el efecto de deformación experimentado por la parábola canónica, sin que intervenga el efecto de reflexión, basta con hacer variar el parámetro a en un intervalo comprendido en $(0, +\infty)$. Un valor notable en este intervalo es 1 ya que, cuando a toma este valor, la función correspondiente coincide con la canónica y, por tanto, no se percibe deformación alguna. Esta consideración conlleva a dividir el estudio de la deformación en dos casos:

Caso 1: Cuando a varía entre 0 y 1

Aquí es necesario ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador correspondiente en 0 y 1, respectivamente. Luego de activar la "Animación automática" al deslizador, se observa que ocurre una deformación de tipo *dilatación* en la parábola. Esta dilatación se hace más notable cuando el valor del parámetro se aproxima al mínimo del intervalo, es decir, las ramas de la parábola se encuentran cada vez más alejadas del eje de simetría. De forma análoga, en la medida que el valor de a se aproxima al máximo del intervalo, la dilatación tiende a ser menos notable con respecto a $f(x) = x^2$. Vale destacar que, por más cerca que a esté de 0 y 1, las ramas de la parábola no coinciden con el eje de reflexión ni con la parábola canónica (ver Figura 1a).

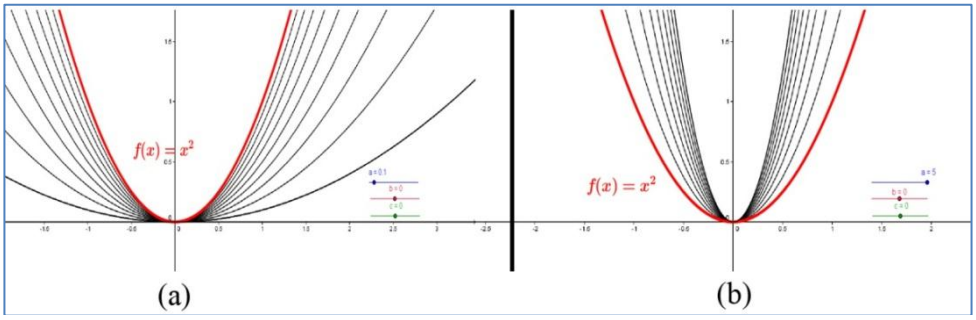


Figura 1. Efectos de deformación tipo dilatación y contracción sobre $f(x) = x^2$

Caso 2: Cuando a varía entre 1 y $+\infty$

En este caso, los valores mínimo y máximo del deslizador deben ajustarse en 1 y cualquier otro número mayor que éste. Una vez realizadas varias exploraciones con distintos valores para el máximo del deslizador, se observa que la parábola canónica sufre una deformación de tipo *contracción* y que ésta es más evidente en la medida que el máximo del intervalo tienda al infinito (ver Figura 1b). Sin embargo, las ramas de la parábola nunca llegan a tocar al eje de simetría debido a que dejaría de ser una función.

Reflexión

Corresponde a esta parte del análisis develar lo que le ocurre a una parábola cuando el parámetro a varía en el intervalo $(-\infty, 0)$. En este intervalo se manifiestan los efectos de deformación y reflexión simultáneamente y, por lo tanto, según la interpretación que se haga, el estudio se puede centrar en uno u otro efecto. Se sabe que la reflexión es el resultado del cambio de concavidad que experimenta la parábola canónica o cualquiera deformación de ésta. Dado que este efecto está presente a lo largo de todo el intervalo $(-\infty, 0)$, en este apartado se explica un procedimiento para su análisis con el GeoGebra. Para comenzar, es necesario ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en -5 y 0, respectivamente, con la intensión de poder apreciar el efecto con mayor detalle. En este intervalo, al colocar el deslizador en -1 es posible observar la curva que es producto de la reflexión de la parábola canónica (ver Figura 2a).

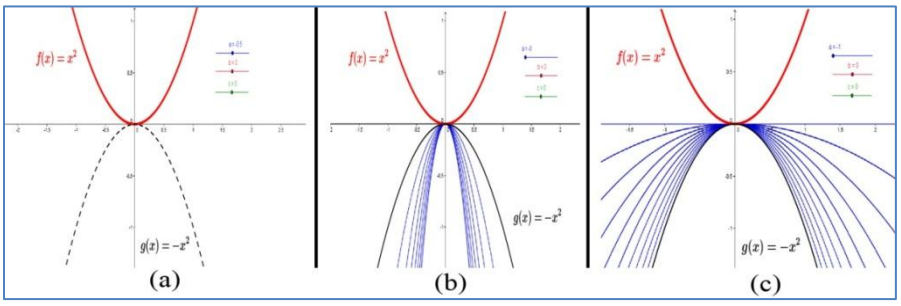


Figura 2. Efecto de reflexión sobre la parábola canónica o cualquiera otra

Por su parte, cuando el parámetro toma un valor distinto de -1 es posible visualizar la reflexión aplicada a alguna deformación de la parábola canónica. Más aún, al mover el deslizador a lo largo del intervalo, es posible reconocer las diferencias entre las parábolas reflejadas, en relación a las deformadas que las producen. Por un lado, si el deslizador se mueve entre el valor mínimo y -1, se visualiza la familia de curvas que son reflexión de alguna parábola contraída de la canónica (ver Figura 2b). Por otro lado, al mover el deslizador entre -1 y el valor máximo, se pueden observar todas las parábolas reflejadas que corresponden a la familia de dilatadas de la canónica (ver Figura 2c).

La variación del parámetro c y sus efectos sobre la parábola

En este apartado se analiza el efecto que experimentan las parábolas antes estudiadas cuando c cambia de valor. Esta variación produce un único efecto sobre las curvas, denominado *traslación*, el cual se caracteriza por el desplazamiento "vertical" de la parábola canónica o cualquiera otra. Este tipo de desplazamiento puede ser observado con cualquier valor posible que tomen los parámetros a y b. Sin embargo, dado que los efectos relacionados con el parámetro a ya fueron estudiados, se considera pertinente hacer el análisis de la variación de c en dos momentos, para los cuales se sugiere mantener el valor de a en un número fijo con el fin de apreciar la traslación manifestada por una misma familia de parábolas cuyo referente es $f(x) = ax^2$.

Caso 1: Variación de c con $b = 0$

El análisis requiere ajustar el deslizador asociado a b en cero y elegir un intervalo "conveniente" para el deslizador de c que permita observar el desplazamiento de una familia de parábolas y las relaciones que se establecen entre éstas y el resto de los elementos de la gráfica (los ejes cartesianos). Por ejemplo, si se quiere analizar el desplazamiento de la familia de parábolas definidas por $f(x) = -2x^2 + c$, basta con seleccionar un intervalo para el deslizador cuyos valores mínimo y máximo estén dentro de la vista gráfica. En consecuencia, se presentan los siguientes momentos:

a) Cuando los valores mínimo y máximo son de igual signo. Al activar la "Animación automática" al deslizador de c con valores mínimo y máximo positivos (o negativos), se puede apreciar sólo la familia de parábolas trasladadas hacia "arriba" (o hacia "abajo") con respecto a la parábola referente $f'(x) = -2x^2$ (ver Figura 3a).

b) *Cuando los valores mínimo y máximo son de distinto signo*. Al activar la "Animación automática" al deslizador de c con valores de signos distintos, por ejemplo -5 y 5, respectivamente, se puede observar las dos familias de parábolas del caso anterior al mismo tiempo, las trasladadas hacia "arriba" y hacia "abajo" con respecto a la parábola referente $f'(x) = -2x^2$ (ver Figura 3b).

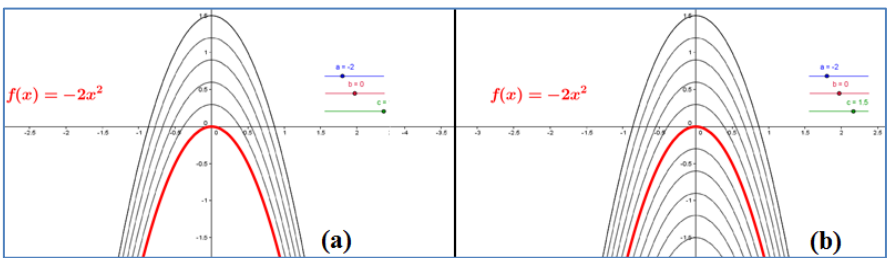


Figura 3. Traslación de la parábola $f'(x) = -2x^2$ *"hacia arriba" y/o "hacia abajo"*

Por tal motivo, es de mayor provecho ajustar el deslizador de c bajo esta condición. Además, se recomienda utilizar la opción "Activar Rastro" sobre la curva mostrada para apreciar mejor la familia de parábolas trasladadas para ambos casos.

Para estudiar las relaciones entre una familia de curvas determinada (p.e, aquellas que conciernen a $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$) y los ejes coordenados, se recomienda analizar los siguientes momentos, en los cuales, el deslizador de c es ajustado tomando las consideraciones anteriores. La exploración de la gráfica conlleva a lo siguiente:

a) *Cuando* $a>0$. Tras activar "Animación automática" al deslizador, se observa que el *eje x* es cortado en dos puntos únicamente por la familia de parábolas trasladadas hacia "abajo" de $f'(x) = 0{,}5x^2$, quién actúa como referente del efecto (ver Figura 4a).

b) *Cuando* $a<0$. Luego de activar "Animación automática" al deslizador, se observa que el *eje x* es cortado en dos puntos únicamente por la familia de parábolas trasladadas hacia "arriba" de la referente $f'^{(x)} = -0{,}5x^2$ (ver figura 4b).

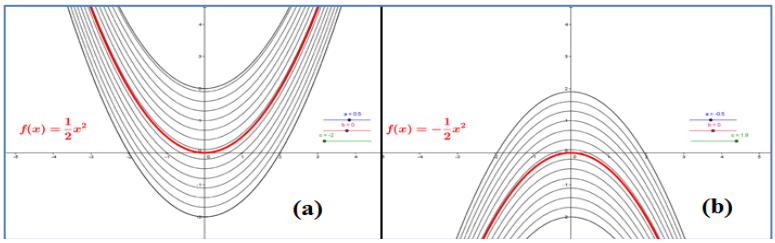


Figura 4. Relaciones entre una familia de curvas y el eje x

Al respecto, se sugiere explorar estos momentos con otras familias de parábolas para corroborar que: (i) el efecto de traslación sufrido por cualquier familia de parábolas tras la variación de c siempre es "vertical", (ii) cuando a y c son positivos o negativos ambos, la parábola correspondiente no corta al *eje x*, y (iii) cuando a es positivo y c es negativo, o viceversa, la parábola asociada siempre corta en dos puntos al *eje x*.

Caso 2: Variación de c con $b \neq 0$

En este caso, la familia de curvas involucradas (p.e., las asociadas a $f(x) = 2x^2 + 3x + c$) sufre el mismo efecto de traslación que en el apartado anterior, con la diferencia que el eje de simetría de la familia es una recta paralela al *eje y*. Además, esta recta pasa por el punto $\left(\frac{b}{2a}, 0\right)$ y, por lo tanto, se puede determinar conocidos a y b (ver Figura 5).

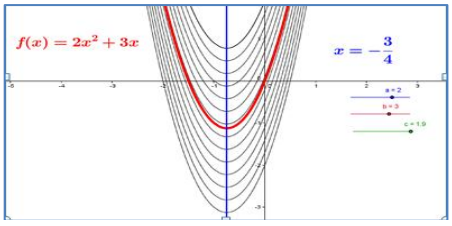


Figura 5. Traslación de una familia de curvas con $b \neq 0$

La variación del parámetro b y sus efectos sobre la parábola

Al igual que en el caso anterior, la variación de b en $f(x) = ax^2 + bx + c$ produce un efecto de *traslación* caracterizado por el desplazamiento de la familia de parábolas en dos direcciones: *horizontal y vertical*, simultáneamente. Para dotar de sentido al desplazamiento es necesario considerar la relación existente entre el par de valores que toman a y c, y el que va tomando b en un momento dado. Esta relación adquiere un sentido de aplicación práctica cuando se estudian los siguientes casos:

Caso 1: Cuando a y c son positivos

Para observar lo que ocurre en este caso, se requiere que b varíe en un intervalo cuyos valores mínimo y máximo sean de distinto signo (p.e., -10 y 10), y que a y c tomen valores fijos y positivos visibles en la ventana gráfica. Luego de esto se procede a activar la opción "Animación automática" al deslizador de b para observar el tipo de traslación que sufren las curvas de la familia. Un primer análisis a lo observado da cuenta de un desplazamiento horizontal de las curvas a la izquierda o a la derecha del *eje y*, según $b>0$ o $b<0$. Esto nos indica que un valor crítico para el análisis es el 0 y, por ende, vale la pena dividir este apartado en dos momentos para comprender mejor el tipo de desplazamiento vertical que se produce a la par del otro desplazamiento:

a) *Cuando b varía entre* $(0, \infty)$. En este intervalo, la familia de parábolas se mantiene a la izquierda del *eje y*. Unido a esto, se puede ver que algunas curvas de esta familia se ubican por encima o por debajo del *eje x*, incluyendo el caso de aquella que posa su vértice sobre este eje. Un ajuste del deslizador para este intervalo (p.e., desde 0 hasta 10) permite apreciar la existencia de un valor crítico de b, a partir del cual es posible identificar los cortes de la parábola con el *eje x* en dos puntos, en uno o ninguno. En el caso de ser $a=3$ y $c= 4$, el valor es 6.93 (ver Figura 6a). Ahora bien, ¿qué relación existe entre este valor y los valores que toman a y c? Este valor viene dado por $b = \sqrt{4ac} = 6.93$, el cual se obtiene de la expresión $b^2 - 4ac = 0$.

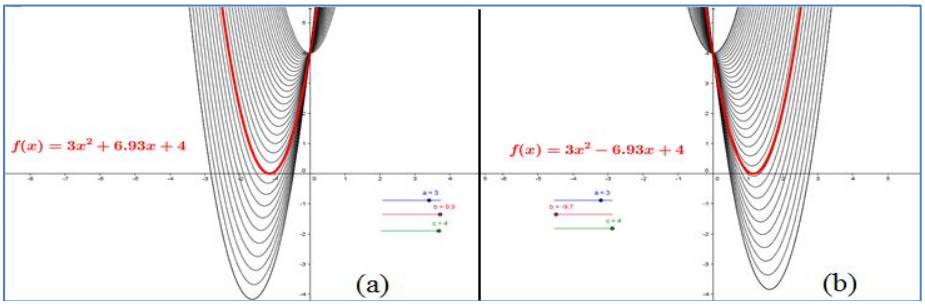


Figura 6.Traslación de las familias de parábolas

b) *Cuando b varía entre* $(-\infty, 0)$. De forma análoga al caso anterior, se puede apreciar la existencia de otro valor crítico de b a partir del cual es posible reconocer los puntos de corte con el *eje x*. La figura 6b muestra el desplazamiento de la familia para los valores mínimo y máximo de -10 y 0, respectivamente.

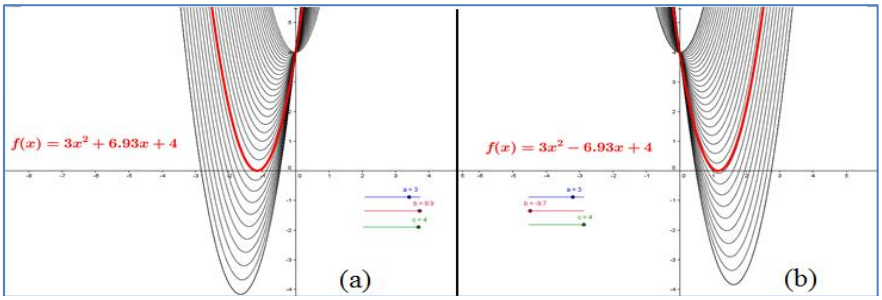


Figura 6.Traslación de las familias de parábolas

Caso 2: Cuando a y c son negativos

Ajustando el deslizador de b en un intervalo que contenga a $(-\sqrt{4ac}, \sqrt{4ac})$, por ejemplo -10 y 10, tras activar la "Animación automática" se observa la traslación de la familia de parábolas determinadas por $f(x) = -2x^2 + bx - 1$. El comportamiento observado en este caso es análogo a la del apartado anterior; por tal motivo, sugerimos su desarrollo por parte del lector.

Caso 3: Cuando a y c son de signos distintos

Dependiendo del signo que tenga a y c, el análisis de la traslación en este último caso se divide en dos momentos:

a) *Cuando* $a > 0$ *y* $c < 0$. Un ejemplo de esto se da para los valores mínimo y máximo del deslizador de b en -4 y 4. Los parámetros a y c toman los valores 1 y -2.5, siendo c visible en la vista gráfica. La "Animación automática" permite observar que la familia de curvas trasladas se mantienen a la izquierda o a la derecha del *eje y* en tanto que $b>0$ o $b<0$, respectivamente. Puede apreciarse que ambas familias tienen en común el hecho de siempre mantenerse por debajo del *eje x* y, en consecuencia, las curvas siempre cortan a este eje en dos puntos, uno negativo y otro positivo (ver Figura 7a).

b) *Cuando* $a < 0$ *y* $c > 0$. Un ejemplo para analizar la traslación es cuando los valores mínimo y máximo del deslizador de b son -2 y 2, respectivamente. Consideremos el caso en que $a = -0{,}2$ y $c = 2$, ubicándose este último sobre la vista gráfica. Tras activar "Animación automática" sobre el deslizador, se observa que las familia de parábolas que sufren la traslación se mantienen a la derecha o a la izquierda del *eje y*

en tanto que $b>0$ o $b<0$, respectivamente. Análogamente al caso anterior, ambas familias tienen en común el hecho de mantenerse en este caso por arriba del *eje x*, y por ende, todas estas curvas cortan en dos puntos a tal eje, igualmente uno negativo y otro positivo (ver Figura 7b).

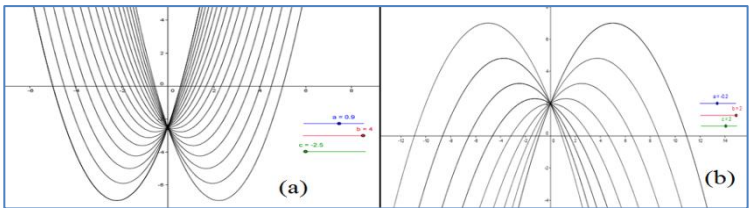


Figura 7. Relaciones entre dos familias de curvas con los ejes

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La integración de esta secuencia en los procesos formativos de los profesores de Matemática no pretende lograr que éstos se conviertan en "enseñantes" de primera línea de este tópico, ni que logren un dominio del GeoGebra como expertos. Consideramos que estas cuestiones pueden ser logradas progresivamente en el tiempo, apoyando las acciones incluso en la reflexión de las propias experiencias. Sin embargo, como formadores deseamos que los profesores amplíen su comprensión de las formas de enseñar funciones con tecnologías, se interesen por encontrar las razones matemáticas de lo observado a través del programa, y aprendan a construir sus propios argumentos y su discurso. El GeoGebra constituye una manera de conectar los objetos geométricos referidos a las funciones con sus representaciones gráficas (Bayazit y Aksoy, 2010; Losada, 2007). En este sentido, la secuencia descrita constituye una manera de poder realizar tales conexiones, colocando al profesor en mejores condiciones para impartir la enseñanza de estos tópicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bayazit, I. y Aksoy, Y. (2010). Connecting representations and mathematical ideas with geogebra. *Geogebra International Journal of Romania*, 1 (1), 93-106.
- Darmawan, D. y Iwan, P. (2011). On the teaching of analyzing the effects of parameter changes on the graph of function. Trabajo presentado en la *Fourth National Conference on Mathematics Education*, Julio, Yogyakarta.
- Diković, L. (2009). Applications geogebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6 (2), 191-203.
- Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using geogebra. Trabajo presentado en el *Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*, Julio, Dresden.
- Losada, R. (2007). Geogebra: La eficiencia de la intuición. *La Gaceta de la RSME*, 10 (1), 223-239.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

USO DE GEOGEBRA PARA POTENCIAR LAS DIFERENTES REPRESENTACIONES EN GEOMETRIA ANALITICA

Ana Elena Gruszycki, Luis Norberto Oteiza, Patricia Mónica Maras,
Liliana Olga Gruszycki, Hugo Alberto Balles
ana@uncaus.edu.ar
Universidad Nacional del Chaco Austral. Argentina.

Modalidad: CB
Nivel educativo: Universitario
Palabras clave: geometría dinámica, registro de representación, aprehensión conceptual

Resumen
La propuesta se encuadra en un Proyecto de Investigación de la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAus) cuyo objetivo general es: diseñar secuencias didácticas utilizando el software dinámico GeoGebra, con el propósito de mejorar la aprehensión conceptual en geometría analítica. Este trabajo se lleva a cabo utilizando las herramientas proporcionadas por la Teoría de las Representaciones Semióticas de Raymond Duval, quien pone en evidencia la necesidad de una diversidad de registros y las dificultades de su coordinación, ya que considera que la utilización de los mismos, es primordial para la actividad matemática. Muchos son los investigadores que enfocan su atención en softwares dinámicos para mejorar el aprendizaje. En este sentido GeoGebra permite trabajar con diferentes registros de representación a través de vistas gráficas, algebraicas y tablas. Con las secuencias didácticas elaboradas se pretende que, los estudiantes que cursan la asignatura Algebra Lineal y Geometría Analítica de la UNCAus, superen los errores y dificultades con que se encuentran al abordar conceptos involucrados en Geometría Analítica y permitan orientarlos en la interpretación y comprensión de estos conceptos.

Introducción

A partir del seguimiento realizado a los alumnos que cursan la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica de la UNCAus, se detectaron problemas que obstaculizan la comprensión de conceptos vinculados a geometría analítica, entre ellos la dificultad de identificación, tratamiento y relación entre distintos registros de representación.

Estos indicadores motivaron la realización del presente trabajo, priorizando el uso de tecnología informática, a través de aplicaciones realizadas con el software GeoGebra. La manipulación de un entorno dinámico como éste, posiblemente ayude al estudiante a lograr relacionar los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático. Es muy probable también, que a través de él, los estudiantes logren asimilar determinados conceptos desde una nueva perspectiva ya que GeoGebra posibilita trabajar integrando álgebra y geometría en forma dinámica mediante un entorno amigable para el alumno.

Por otra parte, la incorporación de las Nuevas Tecnologías de la Comunicación (TIC´s) por parte del gobierno nacional, nos motiva a realizar un esfuerzo aun mayor para lograr la integración real de ellas en el sistema educativo. El National Coucil of Teachers of Mathematics (NCTM), (2000) afirma que "Cuando las herramientas tecnológicas están disponibles, los estudiantes pueden enfocar su atención en procesos de toma de decisiones, reflexión, razonamiento y resolución de problemas".

Marco Teórico

El aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio apropiado para el análisis de actividades cognitivas relacionadas a la conceptualización. Estas actividades requieren diferenciar un objeto de su representación.

"Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida de la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones "inertes" que no sugieren ningún tratamiento productor."(Duval, 2004a, p. 14).

Las representaciones semióticas son necesarias para desarrollar la actividad matemática, son herramientas fundamentales utilizadas con fines de comunicación. Históricamente el conocimiento científico estuvo directamente relacionado a la construcción constante de diferentes sistemas semióticos de representación y la matemática quizás sea una de las disciplinas que más las utilizó.

El manejo de diferentes sistemas de representación y la conversión entre unos y otros no es suficiente para obtener una comprensión integrativa. Es necesario crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre los diferentes registros de representación.

"La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea. Su puesta en juego no resulta automáticamente de los aprendizajes clásicos demasiado directamente centrados en los contenidos de la enseñanza. Lo necesario para favorecer tal coordinación parece ser un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus "traducciones" mutuas".(Duval, 2004a, p. 17)

La realidad marca que actualmente los diferentes niveles de enseñanza no ponen mucho énfasis en la utilización de diferentes sistemas de representación, ni en la coordinación entre ellos, por el contrario, es más usual ver el predominio de algún sistema en particular, reduciendo el aprendizaje del alumno incluso a un mono-registro. Desde esta mirada y considerando que los objetos matemáticos son, por naturaleza, abstractos, accesibles sólo por medio de representaciones y que su conceptualización pasa por la capacidad de identificar un mismo concepto en diferentes perspectivas, surge la necesidad de reconsiderar la forma en que se enseñan estos conceptos.

Por otro lado, según el NCTM, (2000) "Las calculadoras y computadoras son herramientas esenciales para la enseñanza, aprendizaje y desarrollo de las matemáticas. Generan imágenes visuales de las ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos, y realizan cálculos de manera eficiente y precisa".

En este sentido la utilización de herramientas informáticas como apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, da una amplia gama de aportes, no sólo por la forma de trabajo sino porque permite además, acercarse a los conceptos a través de diferentes representaciones de los mismos y como afirma (Duval, 2004a, p. 25), "no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación." y según Santos, (2000) el uso de la tecnología, permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas y que estas pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas.

Metodología

Esta investigación se realiza utilizando el método experimental-puro-cuantitativo teniendo como objetivos e hipótesis de trabajo los siguientes:

Objetivo General

Diseñar secuencias didácticas utilizando el software GeoGebra con el propósito de mejorar la aprehensión conceptual en geometría analítica.

Objetivos Específicos

- ✓ Lograr establecer relaciones entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes.

- ✓ Afianzar la relación entre la percepción y la conceptualización mediante la interacción con la interface de GeoGebra.

Hipótesis

La implementación de secuencias didácticas y el uso del software GeoGebra en la enseñanza de Geometría Analítica, contribuirá a que los alumnos de primer año de las carreras de ingeniería de la UNCAus logren una mejor aprehensión conceptual a través de la coordinación entre los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático.

Resultados esperados

Con las secuencias didácticas elaboradas se pretende que, los estudiantes que cursan la asignatura Algebra Lineal y Geometría Analítica, superen los errores y dificultades con que se encuentran al abordar conceptos involucrados en Geometría Analítica y permitan orientarlos en la interpretación y comprensión de estos conceptos.

Bibliografía:

Duval, R. (2004a). Semiosis y Pensamiento Humano. Traducción de título original: Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. PeterLang. S.A. Santiago de Cali, Colombia. 2ª ed.

Duval, R. (2004b). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Traducción de título original: Les problèmes fondamentaux de l´apprentissage des mathématiques et les formes supérieures du développement cognitif. Cours donné à l´Universidad del Valle, 1999. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Santiago de Cali, Colombia. 1ª ed.

NCTM, (2000). National Coucil of Teachers of Mathematics. Principles and Standards of Mathematics 287-306.

Santos, M. (2000). Students´ approaches to the use of technology in mathematical problem solving. Paper presented at the working group Representation and Mathematics Visualization. PMENA, Tucson Arizona.

USO DEL GEOGEBRA EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN CARRERAS DE DISEÑO

Alicia M. Iturbe. María Elena Ruiz. M.Victoria Pistonesi. Susana G. Fantini
aliciaitu@gmail.com - ruiz.melena@gmail.com-victoriapistonesi@yahoo.com.ar - susanagracielaf@yahoo.com.ar
Universidad Nacional de Río Negro (UNRN). Argentina

Modalidad: Comunicación
Nivel educativo: Terciario- Universitario
Palabras claves: Geometría. GeoGebra. Actividades de enseñanza. Carreras de Diseño.

En este trabajo presentaremos una experiencia didáctica del uso del GeoGebra para la enseñanza de la geometría en la asignatura Matemática de primer año de las carreras de Diseño en la Universidad Nacional de Río Negro, Argentina. Dicha asignatura forma parte del grupo de materias básicas en estas carreras.
En particular para esta ponencia hemos seleccionado algunas situaciones de enseñanza que ilustran diferentes propósitos en el uso del software GeoGebra:
- Para mostrar, es el caso del uso de un Apple sobre los frisos de Escher realizados con GeoGebra.
- Para realizar construcciones geométricas en el plano, que permitan estudiar curvas, polígonos, transformaciones, etc.
- Para relacionar "rectángulos notables" y "razón geométrica".
- Para evaluar en diferentes momentos del aprendizaje, podría ser trabajo práctico final o examen parcial.
Desarrollaremos el análisis didáctico de las actividades seleccionadas, abordando aspectos tales como: relación entre aritmética y geometría, diferencias entre el trabajo que se realiza con lápiz y papel o con GeoGebra para las construcciones geométricas, uso del GeoGebra en instancias de evaluación y caracterización de las intervenciones docentes al llevar este software al aula.
Finalmente una reflexión sobre beneficios del uso de GeoGebra en la enseñanza y cuidados a tener en cuenta.

Al enseñar Geometría en las asignaturas Matemática en primer año de las carreras de Diseño de la UNRN, nos enfrentamos a diferentes problemáticas, tales como: ¿cuáles son los contenidos?, ¿cuál el alcance de los mismos?, ¿de qué manera abordar esos contenidos?, teniendo en cuenta que esta asignatura no es troncal en estas carreras, ¿cómo involucrar a los alumnos de diseño en las actividades propuestas?, ¿cómo plasmar en nuestro proyecto de enseñanza los diferentes vínculos entre el estudio de la matemática y la carrera de diseño?

En relación a los contenidos y al alcance de los contenidos, la geometría que abordamos es una geometría sintética (sin sistemas de referencias), descriptiva, constructiva. Geometría que entendemos no sólo como un conjunto de saberes, sino como un modo de relación con

ciertos problemas, los que hacen intervenir las complejas relaciones entre el espacio físico y el saber geométrico, los distintos registros del saber geométrico, y también distintas formas de validación de los enunciados geométricos.

Es desde aquí, que estamos explorando el uso del GeoGebra, ya que por su carácter dinámico nos brinda la posibilidad de enriquecer el tratamiento de los contenidos que proponemos, como por ejemplo la vinculación entre dibujo y figura, el carácter anticipatorio y de validación que nos ofrece la geometría, la vinculación entre la aritmética y la geometría, etc.

En relación al carácter dinámico, Arcavi y Hadas (2000) plantean que un ambiente dinámico permitiría a los alumnos construir figuras con ciertas propiedades y así poder visualizarlas, pero también les permitiría transformar aquellas construcciones en "tiempo real", lo que contribuiría a la formación del hábito de transformar (mentalmente o por medio de un instrumento) un ejemplo particular para estudiar variaciones; visualmente sugiere invariantes y también proporciona la conformación de las bases intuitivas para justificaciones formales. Podemos agregar en este sentido, lo que plantean Cassina e Iturbe (2000) cuando expresan "el mismo software permite la validación inmediata de los resultados, ya que se puede observar de una manera interactiva si al variar los datos se alteran o no las condiciones establecidas".

En cuanto a cómo abordar los contenidos propuestos en nuestras clases, privilegiamos que los alumnos se enfrenten a prácticas matemáticas, a la resolución de problemas que den lugar a la toma de decisiones y a debates sobre procedimientos, resultados y conclusiones, en un ida y vuelta entre teoría y práctica entre trabajo individual, grupal y colectivo. En estas clases el papel de profesor es acompañar, orientar a los alumnos, animar los debates, evaluar e institucionalizar los contenidos. En ese sentido el GeoGebra da posibilidad de variación de problemas para que el alumno explore en forma autónoma, durante el proceso de solución, permite que aparezca la búsqueda y exploración de relaciones matemáticas, así como visualizar y explorar el significado de esas relaciones. Como dice Santos Trigo (2007), "este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de herramientas" (p. 51).

El alumno que cursa matemática en las carreras de Diseño, se encuentra dando sus primeros pasos en la universidad, lo que implica falta de vocabulario específico, poco conocimiento de obras arquitectónicas en general, escasos conocimientos tecnológicos, etc. Además, debemos considerar que en general, el estudiante de Diseño no tiene una "buena relación" con la matemática, ni tiene una cabal comprensión de la incidencia de ésta, en el desarrollo de su carrera, ni en el ejercicio posterior de la profesión. Creemos, que es posible que el uso de un software podría suavizar esta relación de los alumnos con la matemática.

Con la intención de vincular el estudio de la matemática con el arte y el diseño, apuntamos a aquellas situaciones que den la posibilidad de identificar nociones matemáticas en producciones artísticas, pues permite comprenderlas mejor y también usarlas en nuevas creaciones. Como lo plantea Doberti (2005) "en las creaciones artísticas o de diseño, el componente matemático es un factor más que aparece junto con la luz el color, o el volumen. La forma y el tamaño, su análisis, interpretación y manipulación, no es el único componente del planteamiento artístico, pero si es una de las bases de su estructura".

Es en este sentido, que incorporamos el uso del GeoGebra en nuestra propuesta de enseñanza, tanto su uso como herramienta de resolución de problemas, como el uso de un applet generado por el GeoGebra, del que presentaremos un ejemplo más adelante.

A continuación presentamos las actividades que hemos seleccionado para ilustrar las cuestiones recientemente mencionadas. Nuestro interés es abordar algunas situaciones de enseñanza, que permitan ejemplificar formas de relacionar el uso del GeoGebra con la enseñanza de la geometría, y analizarlas desde un punto de vista didáctico.

Geogebra y "vinculación entre aritmética y geometría"

La actividad que proponemos aquí, forma parte de una secuencia en la que se aborda el estudio de los rectángulos notables y la "proporción geométrica". En particular, la misma se refiere a la razón áurea.

a) Dado un segmento, construye el punto que lo divide en razón áurea, utilizando el GeoGebra y con el programa de construcción descripto a continuación:

Programa de construcción del punto que divide un segmento *AB* en razón áurea
Dibuja el segmento AB y traza la recta que contiene al segmento AB.
Construye una perpendicular a AB que pase por el punto B.
Encuentra el punto medio C del segmento AB.
Determinar D, punto de intersección entre la circunferencia de radio BC y centro B, y la recta perpendicular trazada.
Se traza la recta AD.
Determinar E, punto de intersección entre la circunferencia de radio BD y centro D, y el segmento AD.
Determinar F, punto de intersección entre la circunferencia de radio AE y centro A, y el segmento AB.
El punto F es el punto que divide al segmento AB en razón áurea.

b) Verifica que el punto *F* divide al segmento *AB* en razón áurea.

El propósito de esta actividad es que los alumnos puedan resignificar la noción de razón, ya que la resolución de dicha actividad permitiría distinguir que la razón entre las medidas de los dos segmentos en los que quedó divido el segmento dado, es independiente de la longitud de dicho segmento.

El uso del programa GeoGebra brinda la posibilidad de relacionar la invariancia de la razón geométrica mediante la experimentación, pues permite vincular la vista geométrica con la algebraica y así poder dar respuesta a la "verificación" solicitada en la consigna.

Para verificar que efectivamente el punto *F* divide al segmento *AB* en razón áurea, es necesario dar cuenta que la razón entre las medidas de los segmentos *AF* y *FB* es aproximadamente 1,618 (dependiendo de la configuración del redondeo que se haya dado) y que ésta es independiente de la medida de *AB*. Verificación que con el GeoGebra (ver Fig.1), puedo realizar porque permite dar entrada al cociente entre las medidas de *AF* y *FB* y ver en la pantalla algebraica que este valor no se modifica cuando arrastro el punto *A* y modifico las longitudes de los segmentos. En efecto la variación dinámica y continua permite la pregunta: ¿Qué varía y qué permanece igual? , cuya respuesta apuntaría al objetivo de la actividad que estamos analizando.

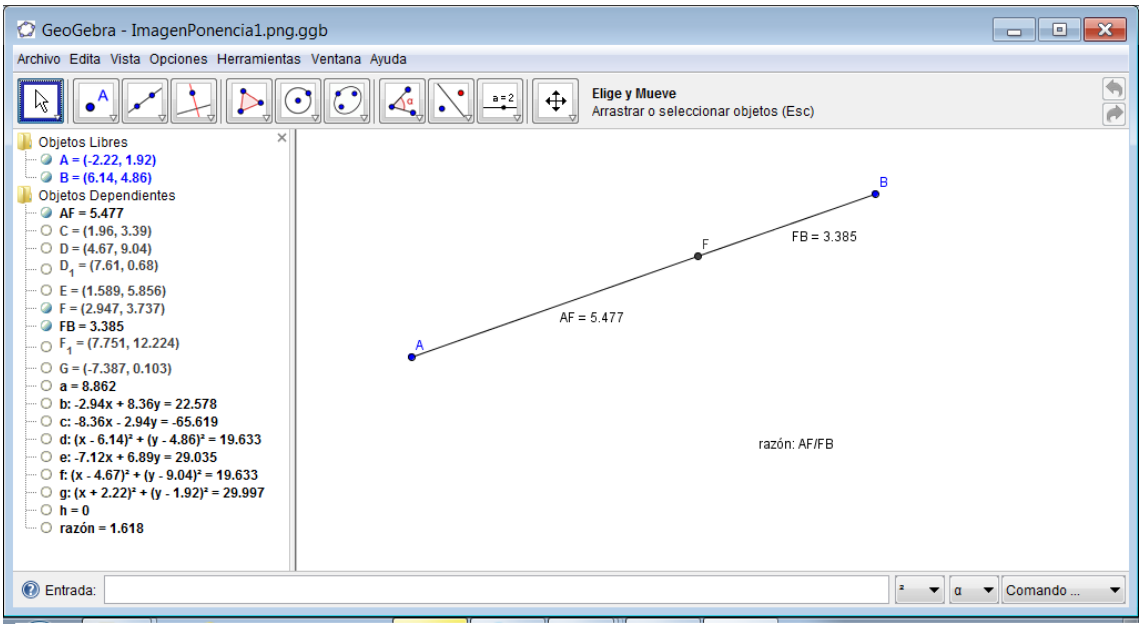


Fig.1

GeoGebra y construcciones geométricas

Esta actividad corresponde a un conjunto de situaciones de construcciones geométricas con las que pretendemos estudiar las transformaciones rígidas y su relación con los polígonos.

Anteriormente se abordó el estudio de los polígonos y sus propiedades a través de construcciones geométricas, en entornos de "lápiz y papel" y con "GeoGebra".

1) Construir un cuadrado a partir de un segmento dado.

Obs.: Se les plantea en la vista gráfica y se han bloqueado de la barra de menú las herramientas: polígono, recta, circunferencia.

Esta actividad fue trabajada anteriormente pero, se la retoma ahora, con la intención de abordar el estudio de las transformaciones rígidas. Usamos el GeoGebra ya que éste nos da la posibilidad de bloquear comandos, en este caso los que corresponden a la columna de "trazado de recta perpendicular", "polígonos" y "circunferencia", para que los alumnos, en la realización de esta construcción, sólo dispongan de los comandos correspondientes a las transformaciones rígidas. En las construcciones geométricas las condiciones y los instrumentos de construcción pueden funcionar como variables didácticas. En este caso, los comandos de los que disponen y la condición de construir a partir de un segmento dado son variables didácticas de esta situación y producen estrategias de resolución que se apoyan en la relación entre las propiedades del cuadrado y las transformaciones rígidas.

GeoGebra y "vinculación entre geometría y arte"

Al abordar el estudio de las transformaciones rígidas aplicadas a un motivo mínimo para cubrir el plano, y apuntando a la vinculación entre la geometría y el arte, incluimos el estudio de los frisos del artista plástico holandés M.C. Escher[i].

En particular utilizamos un applet, construido con GeoGebra, que ejemplifica en forma interactiva, cómo construir las teselaciones del plano con isometrías, de las obras realizadas por Escher. Dicho applet, que se encuentra en el siguiente sitio http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/escher.htm, nos ofrece una imagen viva que permitió por un lado, ilustrar en forma dinámica la vinculación entre las transformaciones rígidas y el proceso de cubrimiento del plano, y por otro lado, completar una secuencia de actividades en la que los alumnos debían utilizar dichas transformaciones para construir frisos.

GeoGebra y evaluación

En las clases de Matemática, como lo hemos descripto recientemente, utilizamos el software GeoGebra para abordar distintas temáticas. Nos preguntamos, entonces, si no deberíamos incluir el uso de este software en las instancias de evaluación. Hemos considerado, así, su inclusión en dos actividades de evaluación: una que forma parte de un Trabajo Práctico Final de la asignatura, y otra que es parte del Examen parcial de las unidades Teoría de las transformaciones y Curvas cónicas.

En relación al Trabajo Práctico, la consigna dada es la que se expone a continuación:

Trabajo Práctico: El Diseño y la Geometría

Este trabajo debe ser realizado en grupos de no más de tres integrantes. Consta de una parte escrita y una parte oral. Es de carácter obligatorio.

Parte escrita:

a) Construir tres diseños:
   i) Con curvas, espirales y/o circunferencias.
   ii) Con polígonos regulares.
   iii) Un friso que se construya utilizando las trasformaciones isométricas.
b) Para cada diseño se debe escribir el procedimiento de construcción (instructivo).
c) Al menos uno de los diseños debe realizarse en Geogebra.

Parte Oral:

Seleccionar uno de los diseños anteriores y el instructivo correspondiente, y armar un afiche o PowerPoint que permita exponerlo ante sus compañeros.

Como podemos observar en dicha consigna, es el alumno el que decide para cuál de los tres diseños solicitados, utiliza el GeoGebra. En la exposición oral, los alumnos justificaron las razones por las cuales eligieron dicho software o por las cuales tuvieron que desistir de usarlo. En general estas razones se debían a que anticipaban el diseño y luego estudiaban la manera de llevarlo a cabo con el GeoGebra, y no siempre encontraban la forma de concretarlo. En la fig. 2, presentamos un ejemplo del trabajo realizado por un grupo de alumnos:

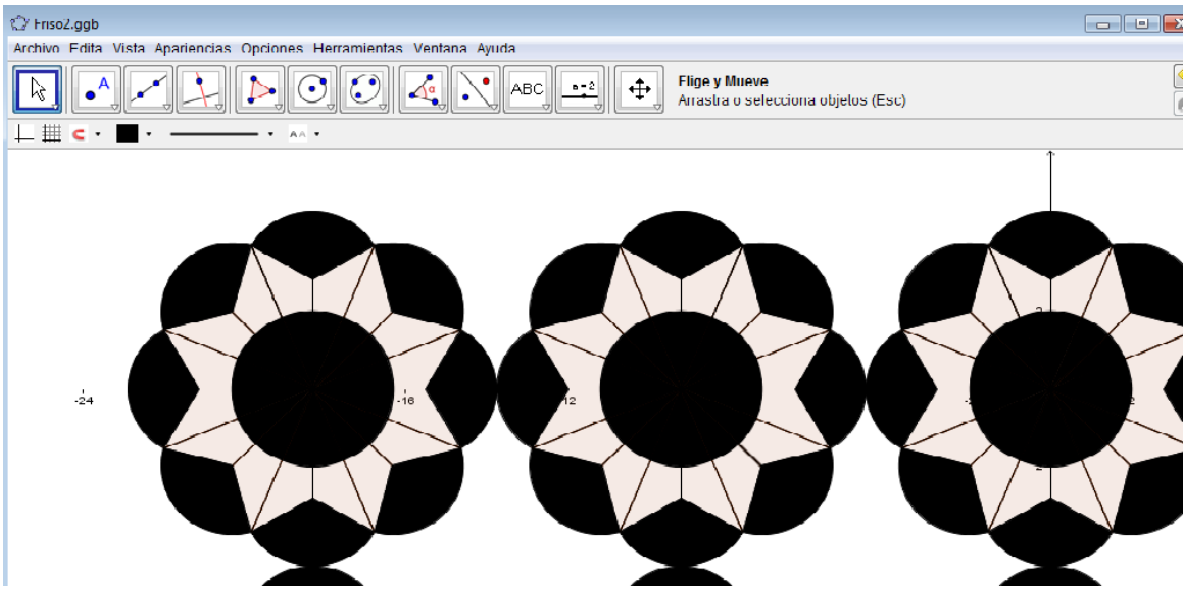


Fig. 2

En relación al Examen parcial, en la asignatura Geometría de Diseño de Interiores, se contempló la evaluación de composición de transformaciones y de curvas cónicas, en particular hipérbola. Este tema es objeto de una presentación que realiza en este mismo congreso, un colega que forma parte del equipo de cátedra de dicha asignatura, por lo que no nos detendremos en el mismo. Sólo puntualizar, al respecto, que la consigna planteada en la evaluación, apuntaba a que los alumnos realizaran previo a la construcción, la anticipación (por escrito) del efecto que producirá sobre las gráficas la modificación de alguno de los parámetros de la ecuación de la hipérbola. Luego, como parte de la evaluación, debían comprobar con el GeoGebra, las anticipaciones realizadas, y en los casos en que no coincide lo representado en la pantalla con lo anticipado, debían justificarlo. Este es un ejemplo donde la validación de una anticipación forma parte de la evaluación, utilizando para validar el GeoGebra.

Algunas consideraciones a tener en cuenta:

En nuestro proyecto de enseñanza, la incorporación del uso del GeoGebra es reciente y ha sido beneficiosa en muchos aspectos, como lo hemos expuesto recientemente. Pero también nos interpela en numerosas cuestiones que nos invita a la reflexión y a la investigación.

Si bien no dudamos de la importancia de incorporar herramientas tecnológicas en nuestras clases, acordamos con Fioriti (en Ferragina, R., 2012) cuando señala al respecto, los posibles riesgos tales como, limitar la enseñanza a "mostrar" lo que se ve en pantalla o vaciar de contenido la enseñanza. En el mismo sentido coincidimos con Arcavi y Hadas (2000) cuando afirman que la incorporación de herramientas tecnológicas, es de poco valor si no se acompaña de situaciones problemáticas que hagan más significativo su uso, y sin la implementación por parte de un docente que proponga preguntas apropiadas en los momentos apropiados, que anime a los estudiantes a tomar postura sobre un problema, a tratar con resultados inesperados, a solicitar justificaciones, a tratar con intuiciones o conocimientos que puedan ser sustentados en una predicción incorrecta, que guíe la discusión, que promueva la coordinación entre diferentes representaciones.

Referencias bibliográficas

Arcavi A., Hadas N. (2002). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 63-85.

Cassina, S., Iturbe, A. (2000) *Construcciones geométricas con un software.* Recuperado de http://www.educ.ar/educar/site/educar/dr.-geo.html

Doberti R. (2005). Construcción de la geometría. Geometría de la construcción. *Journal of Mathematics & Design*, 5(2), pp. 49-66.

Ferragina, R., Amman, S.; Bifano F.; Cicala R.; González C.; Lupinacci L. (2012). *GeoGebra entra al aula de matemática*. (1a.ed.). Argentina: Miño y Davila.

Santos Trigo, L. (2007) La educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Querétaro. México.

[1] M.C. Escher, artista plástico holandés, conocido por sus grabados en madera, xilografías y litografías que tratan sobre figuras imposibles, teselados y mundos imaginarios.

VELHOS CONCEITOS ALIADOS A NOVAS TECNOLOGIAS: GEOGEBRA E O CÁLCULO DA ÁREA DE UM CÍRCULO.

Hamilton Luiz de Souza 1 – Renata Silva Santos 2 – Aguinaldo Robinson de Souza 3
hamilton@fpte.br – re.resilvas@gmail.com – arobinson@fc.unesp.br
1,2 - Centro Universitario de Lins – UNILINS, 3 - Faculdade de Ciências – UNESP, Brasil.

Modalidade: Comunicação Breve
Nível Educativo: Médio (11 a 17 anos)
Palavras Chave: Cálculo da Área, Limite, GeoGebra, Ensino e História da Matemática.

Resumo

O presente artigo descreve uma proposta de atividade computacional com uma vertente na História da Matemática no desenvolvimento de conceitos no cálculo da área de um círculo, sem a utilização da expressão $A = \pi r^2$ *com base no desenvolvimento de Abraham bar Hiyya, aplicando geometria e álgebra, com aprendizado implícito de probabilidades e limites. Foi utilizado o GeoGebra que possibilita em um único ambiente a aplicação e junção de recursos de geometria, álgebra, planilhas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos. Neste software são apresentadas, ao usuário, diferentes representações, que interagem entre si, de forma plural e didática. A proposta alia atividades de recuperação histórica de um método gráfico e a sua representação tecnológica atual, favorecendo a efetiva inter-relação entre a expressão matemática, sua aplicação e construção, enfatizando o conhecimento autônomo do aprendiz, imprescindível para a consolidação do conhecimento, sem apenas memorizar significados postulados, incitando o pesquisador que existe espontâneo dentro de cada interessado na Matemática na busca de outras possibilidades.*

INTRODUÇÃO

No contexto educacional atual são inúmeras as dificuldades tanto por parte dos professores quanto dos alunos no ensino da matemática, refletindo tanto na formação intelectual, como também, na psíquica do educando. Conforme estabelecido nos Parâmetros Curriculares Nacionais, a matemática tem seu papel formativo:

"(...) a matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios." (PCN, Brasil, 1998).

Tão importante para o aprendizado e desenvolvimento do ser humano, há de se dar grande importância e atenção ao ensino da matemática com significação desde as séries

iniciais do ensino fundamental. Faz-se necessário organizar e estimular a construção do conhecimento lógico matemático de forma significativa, com atividades que permitam ao aluno manipular estratégias e soluções para as intermediações já criadas.

De acordo com Freire:

"Transformar a experiência educativa em puro treinamento técnico é mesquinhar o que há de fundamentalmente humano no exercício educativo: o seu caráter formador. Se se respeita a natureza do ser humano, o ensino dos conteúdos não pode dar-se alheio à formação moral do educando. Educar é substantivamente formar." (Freire, 1999, p. 37)

Freire afirma ainda que:

"Educadores e educandos se arquivam na medida em que, nesta distorcida visão da educação, não há criatividade, não há transformação, não há saber. Só existe saber na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem no mundo, com o mundo e com os outros." (Freire, 1975, p.66).

Percebe-se, que hoje a construção do conhecimento não está implícita no ensino da matemática, além de suas fórmulas não integrarem o contexto social do aprendiz, o "por que" deu lugar ao "como", desprezando o atrativo da descoberta como fonte do aprendizado.

Com isso os alunos não conseguem aprender a matemática que lhes é transmitida, muitas vezes perdem o interesse já nas séries iniciais, comprometendo o desenvolvimento essencial da sequência pedagógica da disciplina, ou então, sentem dificuldades em utilizar o conhecimento deficiente adquirido. O professor, consciente do "déficit" de resultados satisfatórios que obtém junto aos seus alunos, tem dificuldades de repensar, planejar e desenvolver o seu fazer pedagógico, acreditando ser incapaz de ser tutor na construção do conhecimento seriado, muitas vezes truncado.

Aprender é construir significados ou conceitos e ensinar é oportunizar essa construção. (MORETTO apud SOUZA, 2002).

A prática pedagógica para o ensino da matemática está estagnada, o processo ensino aprendizado é centralizado na figura do professor, a maioria dos conceitos e práticas é ineficaz e muitas vezes os conteúdos são apresentados sem significação, o aluno é mero ouvinte, receptor passivo do conhecimento sem sentido, memorizado apenas para superar etapas classificatórias.

Cabe ao professor ser mediador do conhecimento, responsável pelo aprimoramento de técnicas e metodologias que ofereçam um ambiente educacional que leve o aluno a ser sujeito do aprendizado. Neste ambiente de construção de aprendizado as atividades

lúdicas são plenamente apropriadas, propiciando dinamismo às aulas, tornando-as atrativas e prazerosas, despertando no aluno o interesse, promovendo assim o ensino aprendizagem significativo.

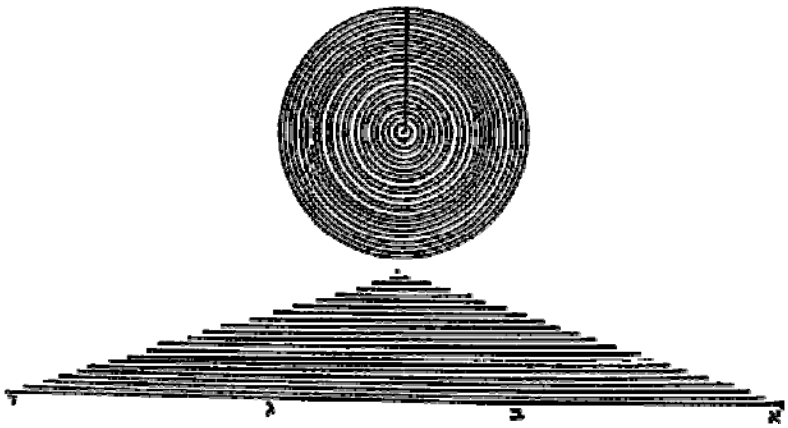
Com a inclusão de novas tecnologias que levem o aluno a ser o sujeito da aprendizagem, respeitando seu contexto, considerando suas motivações, curiosidade e desejo de realizar atividades em grupo, as atividades lúdicas provocam uma mudança de comportamento por parte dos alunos como autoestima, interesse, motivação, criatividade, autonomia, alegria, prazer, entre outros.

Ante essa necessidade de apoio pedagógico para a construção do conhecimento no ensino da matemática com significação, foi elaborada uma proposta para o cálculo da área de um círculo, partindo de uma aplicação pedagógica de Abraham Bar Hiyya, desenvolvida utilizando o aplicativo GeoGebra.

A proposta alia atividades lúdicas, tecnologia e a utilização de diversos recursos matemáticos num mesmo ambiente, em especial álgebra e geometria, com o intuito de promover o processo de ensino-aprendizagem da matemática, levando o aluno a construir o conhecimento, "inter" relacionando as diversas formas e conceitos dos cálculos e fórmulas.

O MÉTODO DE ABRAHAM BAR HIYYA

Abraham Bar Hiyya, um matemático e astrônomo judeu que viveu na Espanha, também conhecido pelo seu nome em latim, Savasorda. É uma figura importante na popularização da equação de segundo grau. Escreveu vários trabalhos nas áreas de astronomia, matemática e filosofia judaica. Seu trabalho mais influente é uma obra de geometria prática, chamada *□ibbūr ha-meshī□ah we-ha-tishboret,* um tratado em hebraico, em álgebra islâmica e prático geometria, que contém a primeira solução completa da equação de segundo grau $x^2 - ax + b = 0$.



Em uma de suas obras de geometria, Abraham apresenta uma solução simples e engenhosa para o cálculo da área de um círculo. Ele propõe que se abra a superfície

de um círculo, encarado como constituído por camadas, que quando cortado e aberto, forme um triângulo, cuja área é igual à do círculo. Sendo a base do triângulo o comprimento da circunferência e a altura o raio do círculo.

ADAPTAÇÃO E APLICAÇÃO NO GEOGEBRA

Neste artigo é proposto o método de Abraham Bar Hiyya para calcular a área do círculo, sem a utilização da tradicional fórmula $A_{circulo} = \pi.R^2$, com aproximação por retângulos, representado no software GeoGebra, podendo ser aplicado como uma ferramenta de aprendizado no ensino fundamental e médio, num processo através de limites.

Neste artigo é proposto aplicação de cálculo da área de um circulo, sem a utilização da tradicional fórmula $A_{circulo} = \pi.R^2$, tendo como base a proposta de Abraham Bar Hiyya, com aproximação por retângulos, representado no software GeoGebra, utilizado como uma ferramenta de aprendizado no ensino fundamental e médio, num processo através de limites.

O método concilia a utilização da tecnologia computacional e o raciocínio lógico dedutivo e intuitivo, através de uma atividade lúdica, na busca do conhecimento autônomo para problemas simples, que na maioria dos casos fazem uso de fórmulas sem conhecer suas origens e soluções.

Em tese propõe dividir o círculo em vários anéis concêntricos, que quando abertos são transformados em retângulos. Quanto maior for o número de anéis, melhor será a precisão do cálculo proposto, chegando ao limite quando o número de anéis tende a infinito, assim o conjunto de retângulos sobrepostos assumem o formato de um triângulo, sendo sua base o comprimento (perímetro) do anel externo.

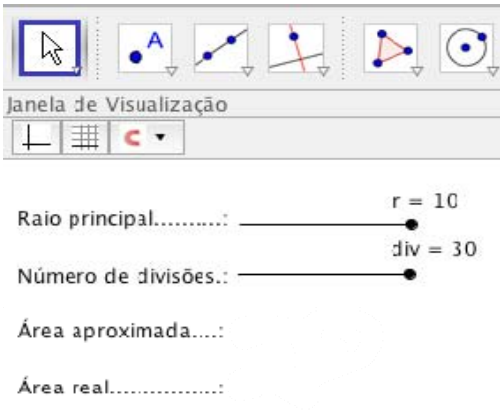


Figura 1: Vista parcial da Janela Gráfica exibindo a região que definirá os dados para desenho e que posteriormente receberão os resultados obtidos

Para o desenvolvimento da solução e de outras teorias implícitas, foi utilizado a ferramenta gráfica GeoGebra, de fácil aplicação que favorece o ensino aprendizado de geometria e álgebra de forma geral e unificada.

Com a implementação espera-se, além de difundir a proposta de Abrahan Bar Hiyya e o cálculo da área de um círculo sem a utilização da fórmula tradicional, estimular a prática do aprendizado autônomo e com ele o conhecimento da matemática e suas derivações.

Utilizando componentes que permitam alterar o tamanho do raio e a quantidade de divisões do círculo, consegue-se liberdade de escolha e observação da precisão dos resultados obtidos.

Para esta implementação foi proposta a seguinte sequência:

1. Na janela gráfica, inserir os seguintes campos (Fig. 1):
   a. Campo Texto, na caixa de diálogo inserir o texto "Raio principal:";
   b. Campo de controles deslizantes que define e controla o tamanho do raio do círculo (r);
   c. Campo Texto, na caixa de diálogo inserir o texto "Número de divisões:";
   d. Campo de controles deslizantes que define e controla a quantidade de divisões (div), e assim a precisão do cálculo;
   e. Campo Texto, na caixa de diálogo inserir o texto "Área aproximada".
2. Na janela da planilha:
   a. Definir a coluna "A" da planilha como sendo aquela que informa a numeração da circunferência. Esta coluna será utilizada na sequência para efeito dos cálculos, devendo ser numerada a partir da célula "A2", com valores iniciando em 0 (zero) até o valor máximo definido no controle deslizante referente à quantidade de divisões desejada. Em nosso caso definimos como sendo o valor máximo 30, enquanto o controle deslizante referente ao raio tem seus valores limitados em 10 unidades métricas;
   b. Na coluna "B" (Fig. 2), a partir da célula "B3", inserir a fórmula "Se[div ≥ A3, (x - 3.14159r)² + (y - 2r - 1)² = (r - r / div (A3 - 1))², 0]". Atendendo o especificado será desenhado na janela gráfica ou algébrica um círculo de raio "r". As células subsequentes da coluna "B" receberão tratamento semelhante,

Planilha

	A	B
1	Div	Circulos Conc.
2	0	
3	1	$(x - 31.42)^2 + (y - 21)^2 = 100$
4	2	$(x - 31.42)^2 + (y - 21)^2 = 93.44$
5	3	$(x - 31.42)^2 + (y - 21)^2 = 87.11$
6	4	$(x - 31.42)^2 + (y - 21)^2 = 81$
7	5	$(x - 31.42)^2 + (y - 21)^2 = 75.11$
8	6	$(x - 31.42)^2 + (y - 21)^2 = 69.44$
9	7	$(x - 31.42)^2 + (y - 21)^2 = 64$

Figura 2: Vista parcial da Planilha com as células utilizadas para o desenho dos anéis do círculo e as respectivas retângulos

alterando apenas a informação de célula, trocando de "A3" para a linha ao qual a fórmula será inserida, assim na linha "4" teremos "A4" no lugar de "A3";

c. Na coluna "C" (Fig. 3), a partir da célula "C3", inserir a fórmula "Se[div ≥ A3, Polígono[(0, r / div (A3 - 1)), (0, r / div A3), (2 (3.14159) (r - r / div (A3 - 1)), r / div A3), (2 (3.14159) (r - r / div (A3 - 1)), 0)], 0]". Atendido o especificado será desenhado um quadrilátero de altura r/div e comprimento igual ao perímetro do círculo correspondente. As células subsequentes da coluna "C" receberão tratamento semelhante, alterando apenas a informação de célula, trocando de "A3" para a linha ao qual a fórmula será inserida, assim na linha "4" teremos "A4" no lugar de "A3";

Figura 3: Visão da janela de diálogo onde é definida a fórmula e condição para o desenho do retângulo para cálculo da área aproximada.

d. a coluna "D" é semelhante à "C". Nesta coluna foi trocado na fórmula o comando de desenho do "POLÍGONO" pelo cálculo da "ÁREA", ficando a fórmula assim elaborada: "Se[div ≥ A3, Área[(0, r / div (A3 - 1)), (0, r / div A3), (2 (3.14159) (r - r / div (A3 - 1)), r / div A3), (2 (3.14159) (r - r / div (A3 - 1)), 0)], 0]". Esta nova formulação é necessária para que na planilha se consiga fazer a somatória das células, obtendo o valor aproximado da área do círculo gerador dos polígonos. As células subsequentes desta coluna receberão tratamento idêntico à esta, alterando apenas a informação de "A3", para a linha ao qual a fórmula será inserida, assim na linha "4" teremos "A4" no lugar de "A3". Nestas células estão sendo calculadas as áreas dos quadriláteros gerados na

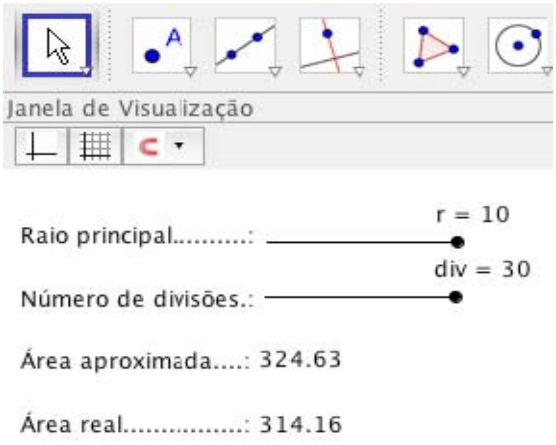


Figura 4: Visão parcial apontando, na Janela Gráfica, a região que contém as informações com os dados e os resultados obtidos.

coluna “C”. Observa-se que quanto maior o número de quadriláteros, maior será a precisão do cálculo da área do círculo, uma vez que ela é resultado da soma das áreas.

3. Na janela gráfica insira (Fig. 4):
   a. um campo texto. Na janela de diálogo, no campo “Editar” insira, através de seleção direta na planilha, a célula D34, transportando assim o resultado da área aproximada para a janela gráfica;
   b. um campo texto. Na janela de diálogo, no campo “Editar” insira, através de seleção direta na planilha, a célula D35, transportando assim o resultado da área calculada para a janela gráfica.

Através do controle deslizante do tamanho do círculo, defina seu raio. Observe que enquanto este controle é acionado o raio vai alterando e como consequência, a imagem na área gráfica também. Uma vez definido o raio do círculo, o próximo passo é a alteração da quantidade de divisões que se pretende no cálculo. Como o processo é por aproximação, o valor exato somente será obtido quando a quantidade de divisões tenderem a infinito, o que não é possível graficamente, mas é perceptível que com o aumento da quantidade de divisões a precisão melhora proporcionalmente.

Uma visão geral da solução pode ser observada na figura abaixo (Fig. 5), para melhor compreensão do contexto.

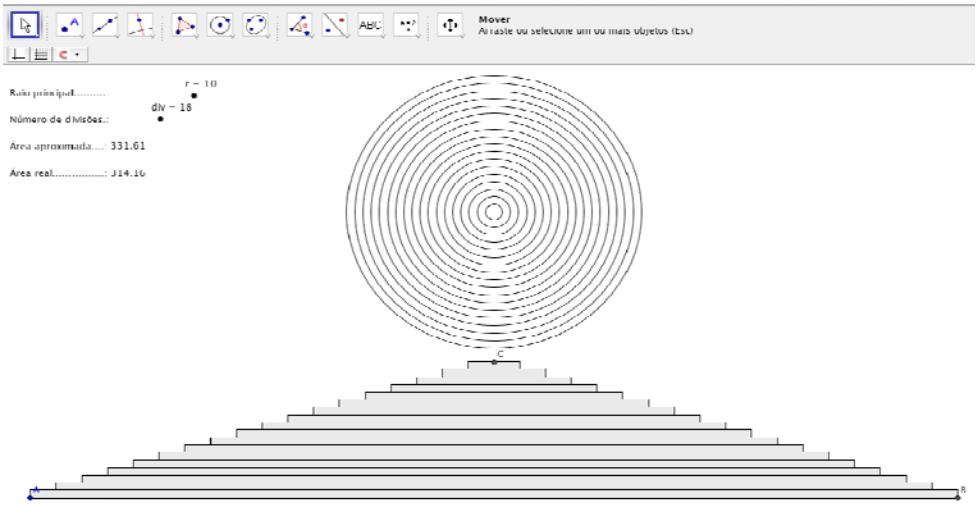


Figura 5: Apresentação final com o círculo que se deseja calcular a área (recortado) e os respectivos retângulos abaixo que vão gerar a área aproximada.

Considerações Finais

A construção gráfica proposta, tendo como base o desenvolvimento de Abraham Bar Hiyya, demonstra que uma boa aproximação, para o cálculo da área de um círculo, pode ser obtida com uma quantidade pequena de divisões. A forma geométrica utilizada para tal aproximação, o retângulo, pode não ser a melhor escolha, mas o objetivo de se introduzir, intuitivamente, o conceito de limite é assim melhor observado. A partir do que foi apresentado pode-se concluir que o software GeoGebra é de fácil aplicação e eficiente na implementação. A possibilidade de utilização de componentes dinâmicos (controle deslizante), permite ao usuário da solução proposta, ter controle e observar os resultados instantaneamente quando alterados o raio e/ou a quantidade de divisões desejadas para o cálculo. Desta forma o usuário (aluno), sentirá atraído para a busca e aprofundamento do conhecimento significativo, saindo desta forma de passivo do aprendizado tradicional para sujeito autônomo do aprendizado interativo, com as possibilidades que a ferramenta permite. Assim sendo, pretende-se salientar que o envolvimento do aluno no processo ensino/aprendizagem é primordial, essencial para o desenvolvimento da cumplicidade e responsabilidade tanto no ensino da matemática como para a formação social do indivíduo.

Referências bibliográficas

Abraham Bar Hiyya. Recuperado de http://en.wikipedia.org/wiki/Abraham_bar_Hiyya. Acesso em 07/08/2012.

Borges, T. M. (2006) *A percepção de futuros professores de matemática quanto ao uso de recursos lúdicos no ensino*. Recuperado de http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12006/TatianadeMouraBorges.pdf Acesso em 19/07/2012.

Brasil. S. E. F. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. S. E. M. T. (2006). *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: M. E.

Freire, P. (1999). *Pedagogia da autonomia*. São Paulo: Paz e Terra.

Freire, P. (1975). *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

GeoGebra. Recuperado de http://www.geogebra.org/cms. Acesso em 17/05/2012.

Meavilla, V. (2012). *Apriendendo Matemáticas com lós grandes Maestros*. Espanha: Editorial Almuzara