# INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE DIFINIÇÕES E TEOREMAS: O CASO DA ANÁLISE REAL

Francisco Regis Vieira Alves – Hermínio Borges Neto
fregis@ifce.edu.br – herminio@multimeios.ufc.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE,
Universidade Federal do Ceará - UFC

Modalidad: Comunicacion
Nivel educativo: Universitário
Palabras clave: Interpretação geométrica, Definições e Teoremas, Análise Real, Geogebra.

**Resumo**

*Reconhecidamente, a complexidade e a natureza dos conceitos em Análise Real proporcionam uma mudança de percepção, na transição dos estudos do Cálculo para a Análise Real. Por outro lado, registramos na própria História da Matemática, o esforço de figuras emblemáticas do passado, no sentido de transmitir/significar aos seus contemporâneos suas ideias matemáticas pertinentes às definições, propriedades e teoremas desta teoria. Deste modo, a tecnologia e, notadamente, o software Geogebra, pode proporcionar o entendimento e a descrição geométrico-dinâmica de definições e teoremas importantes, tais como: definição de valor de aderência de uma sequência, definição de imagem limitada/ilimitada, definição de existência de limites, definição de função côncava/convexa, definição de continuidade uniforme, definição de funções lipschitizianas, o teorema de Rolle, do Valor Médio, o teorema de Cauchy, Regra de L´Hopital, etc. Assim, com o arrimo do Geogebra, discutiremos situações e construções geométricas que podem proporcionar o entendimento de ideias fundamentais neste contexto de ensino.*

## 1. Introdução

De modo irrefutável, a complexidade e o crescente formalismo dos conteúdos de *Análise Real* proporcionam, até mesmo para as mentes mais hábeis e talentosas, incompreensões e o choque entre ideias intuitivas, informais, que adquirimos acerca de determinados conceitos, mesmo antes de um treinamento formal, com ideias abstratas, generalizadoras, estruturais e inerentes a determinados conteúdos à teoria subjacente.

Com efeito, registramos na própria História da Matemática, situações em que o conhecimento intuitivo de matemáticos emblemáticos do passado, descrito, num momento inicial, por meio de gráficos e figuras, contrariou, *a posteriori*, o conhecimento formal, o qual, com respeito ao estabelecimento de definições e teoremas, exigiu séculos para sua evolução ao estádio atual do conhecimento matemático.

Assim, neste trabalho, trazemos algumas definições e teoremas relevantes em *Análise Real*, passíveis de interpretação com um aparato computacional. Tal expediente acentua o raciocínio heurístico no entendimento de situações recorrentes no contexto do ensino.

## 2. A interpretação geométrica dos conceitos de Análise ao longo da história

Numa literatura especializada (BURNS, 2004; DAVIDSON & DONSIG, 2010; DUGAC, 2003; EDWARDS, 1979; HAIRER & WANNER, 2008; PEDERSEN, 1980; STAHL, 1999), encontramos com relativa facilidade, no contexto da discussão em História da Matemática - HM, exemplos do esforço de matemáticos eminentes do passado, na tentativa de significar e transmitir suas ideias aos seus contemporâneos por intermédio de gráficos e/ou figuras que detinham importante valor heurístico.

Neste sentido, os autores Hairer & Wanner (2008) fornecem inúmeros exemplos de figuras e diagramas que foram utilizados como veículos para a transmissão e convencimento, por parte de seus conceptores, dos seus pares. Por exemplo, na figura 1, esses autores comentam os desenhos devidos ao Marques de *L´Hospital* (1696), presentes na obra intitulada *Analyse des infiniment petit*.

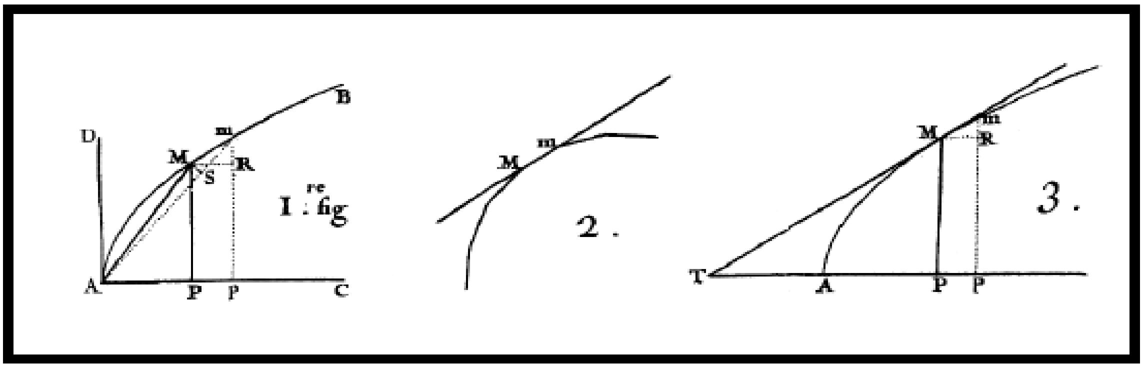


**Figura 1: Hairer & Wanner (2008, p. 83) apresentam figuras (desenhos) produzidos por *L´Hospital***

Hairer & Wanner (2008, p. 83) explicam ainda que “Newton (1665) e Joh. Bernoulli (1691/1692) foram os primeiros a estudar o significado geométrico da segunda derivada.”. Na figura 2, do lado esquerdo, observamos a interpretação de gráficos de funções e o comportamento da segunda derivada. Do lado direito, destacamos um desenho atribuído, conforme Haires & Wanner, ao matemático Joh. Bernoulli.

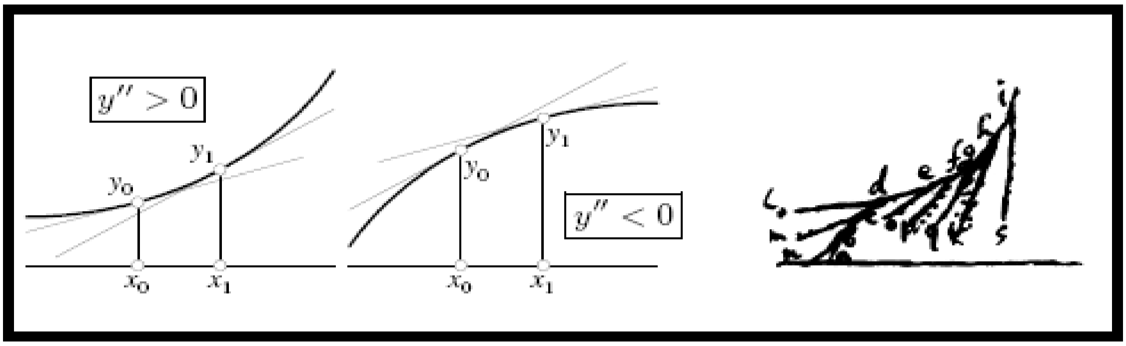


**Figura 2: Hairer & Wanner (2008, p. 91) discutem o diagramas de Bernoulli**

Hodiernamente, reconhecemos um dos apanágios da tecnologia, no sentido de ressignificar e descrever conceitos complexos e intrincados. Deste modo, na próxima seção, exploramos as potencialidades do *software Geogebra*, com a intenção precípua de agregar, a um teorema ou definição formal, sua respectiva significação geométrica.

## 3. Exemplos de Definições matemáticas

Identificamos muitas mudanças (BERGÉ, 2006) pertinentes às exigências conceituais dos conceitos em *Análise Real* com respeito aos do Cálculo. Nesse sentido, registramos o aumento do rigor e da complexidade de definições formais envolvidas. Nossa primeira definição diz respeito à noção de função em uma variável real $f : IR \to IR$ com *imagem limitada*, nas vizinhanças de um ponto. Na figura 1, exibimos o gráfico de duas funções que possuem uma imagem limitada $\left(\left|f(x)\right| \le k \ , \forall x \in \mathrm{IR}\right)(*)$ numa vizinhança (perfurada) da origem, ou seja, escrevemos de modo *standard* que $V_0(\delta) = (-\delta, \delta) - \{0\}$.

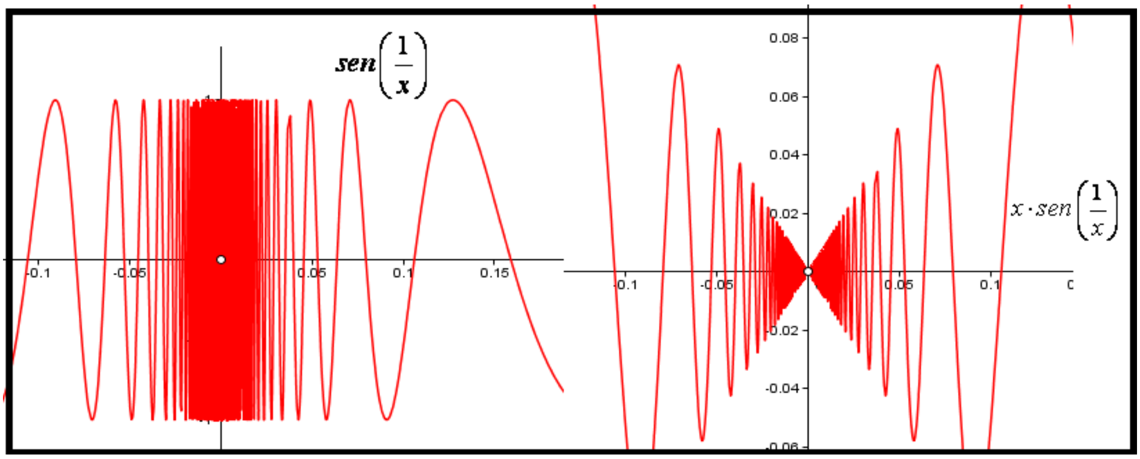


**Figura 3: Imagem limitada de funções nas vizinhanças da origem $V_0$ na reta**

Por outro lado, ao considerarmos a função $\frac{1}{x} \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ que, com o apoio do *Geogebra*, depreendemos possuir uma imagem ilimitada (não satisfaz a condição *), ou seja, não conseguimos nenhuma vizinhança $V_0(\delta)$, para qualquer $\delta > 0$, (um disco ou circunferência no plano) que contenha completamente o gráfico nesse trecho.

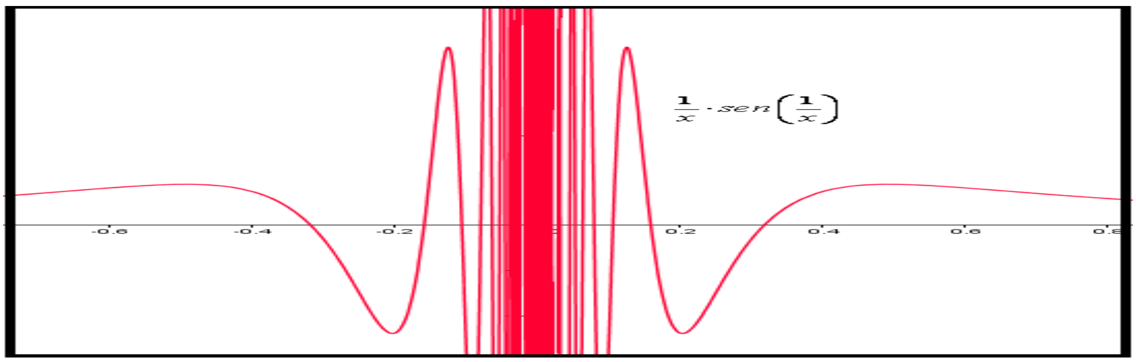


**Figura 4: Descrição da definição de imagem ilimitada de uma função na origem**

Com o recurso do *software*, conseguimos explorar a noção de convergência de uma sequência de números reais $(x_n)_{n\in IN}$ e de suas subseqüências $(x_{n_k})_{n_k\in IN'\subset IN}$. De fato, consideremos a sequência $x_n=(-1)^{n-1}\cdot n/(n^2+1)$, conduzimos o aluno a perceber a existência de duas subseqüências $(x_{n_k})_{n_k\in IN'}$ e $(x_{n_k'})_{n_k'\in IN''}$, que se aproximam para o mesmo *valor de aderência*, que neste caso é 0. Por outro lado, no caso da sequência $y_n=sen(n\cdot\pi/2)$, o aluno deve suspeitar da existência de três *valores de aderência* correspondentes a três subseqüências distintas. Neste caso, os valores de aderência destas subsequências estão no conjunto $\{-1,0,1\}$ que corresponde a tal comportamento.

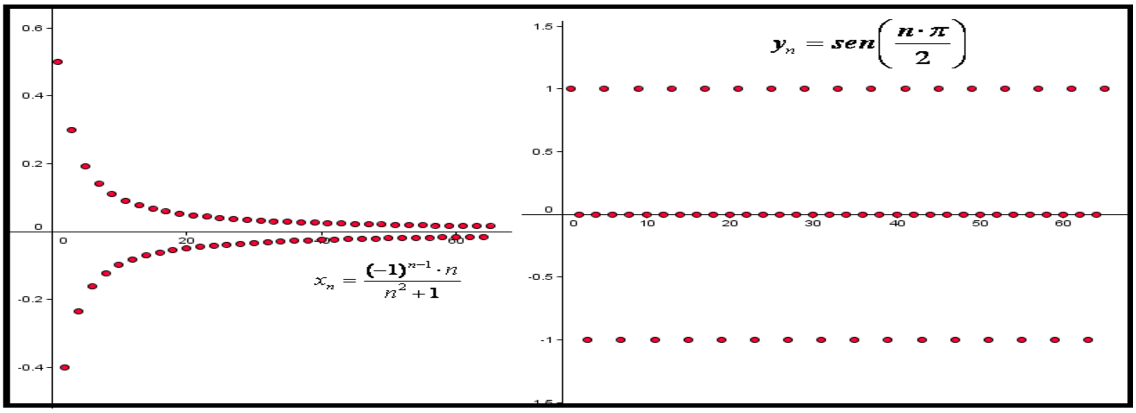


**Figura 5: Descrição de valores de aderência de uma sequência com o *Geogebra***

No contexto de *Análise Real*, desenvolvemos o estudo de *funções côncavas* (para cima ou para baixo) e *estritamente côncavas* (para cima ou para baixo). A definição formal de concavidade de uma função $y=f(x)$, para cima, de modo estrito, pode ser descrito por $f(x)<l(x)$, onde $l(x)$ é uma reta que passa por dois pontos do gráfico de $f$, num intervalo $(a,b)$. Na fig. 6, divisamos a mudança de concavidade segundo a definição.

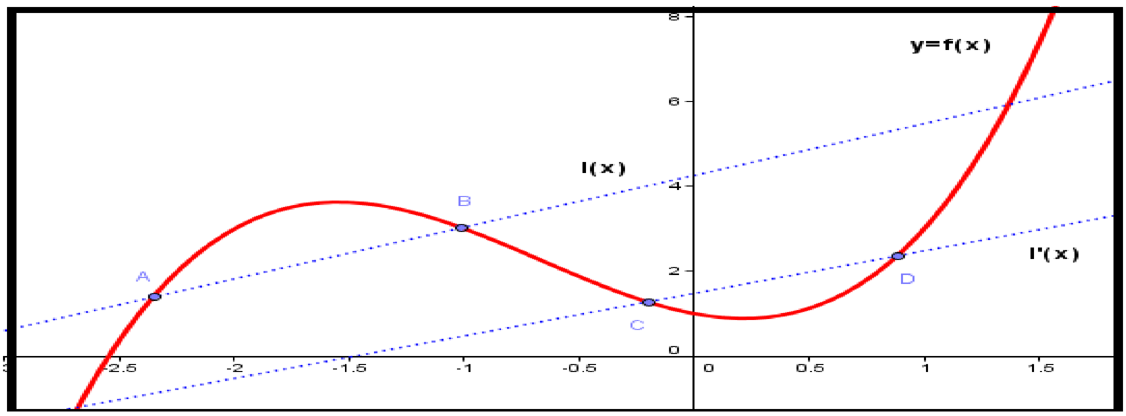


**Figura 6: Descrição da definição de concavidade (estrita) de uma função**

## 4. Exemplos de alguns teoremas em Analise Real

Vamos considerar uma situação extrema da necessidade do cálculo de $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(sen(x)+\cos^3(x))}{(x^2+1)(x-3)}$ ou $\lim_{x\to 0}\frac{x^2(sen(x)+\cos^3(x))}{(x^2+1)(x-3)}$. Vale analisar o gráfico da figura abaixo de modo local e global. Neste sentido, passamos a observar as funções $\frac{2x^2}{(x^2+1)(x-3)}$, $\frac{x^2(sen(x)+\cos^3(x))}{(x^2+1)(x-3)}$ e $\frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-3)}$. Na figura 7, para prever o comportamento do primeiro limite (não existe), necessitamos de uma análise global dos gráficos. Por outro lado, na inspeção do segundo limite (que tende a zero), carecemos, do mesmo modo, de uma análise local, nas vizinhanças da origem $V_0(\delta)=(-\delta,\delta)-\{0\}$.

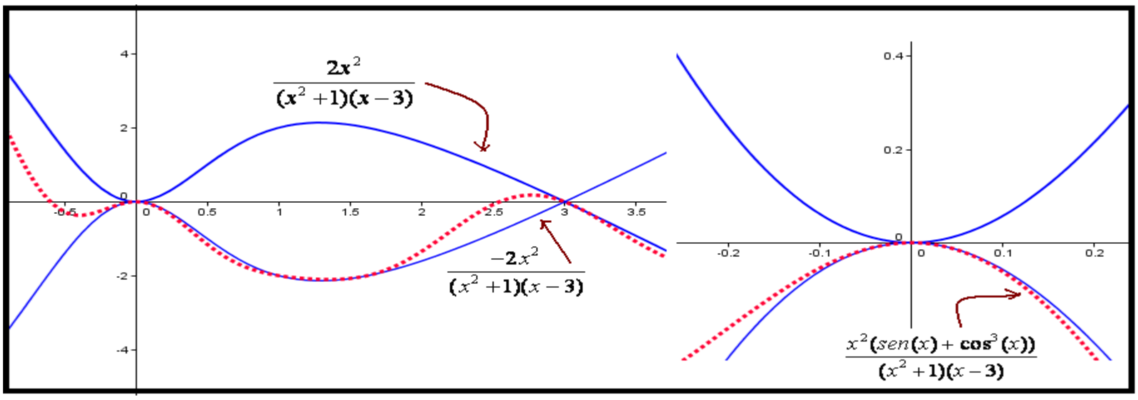


**Figura 7: Descrição geométrica do teorema do sanduíche em Análise Real**

Um teorema recorrentemente aplicado em *Análise Real* possibilita a descrição da existência de um limite, quando buscamos analisar o comportamento (local) do produto de duas funções $f(x)\cdot g(x)$, na condição em que $\exists\lim_{x\to a} f(x)$ e a outra função $g(x)$ cumpre a condição (*). Por exemplo, quando tomamos $f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos(\pi/x)\right| & \text{se } x\neq 0 \\ 0 \text{ se } x=0 \end{cases}$, de imediato, neste caso, concluímos que $\lim_{x\to 0} x^2\left|\cos(\pi/x)\right|=0$.

Este teorema admite inúmeras aplicações. Por exemplo, Bourchtein & Bourchtein (2010, p. 302) consideram a seguinte função $f(x)=\begin{cases} x^2\cos(1/x) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 \text{ se } x=0 \end{cases}$ e que possui como derivada $f'(x)=\begin{cases} 2x\cos(1/x)+\sin(1/x) & \text{se } x\neq 0 \\ 0 \text{ se } x=0 \end{cases}$. Bourchtein & Bourchtein (2010, p. 302-303) discutem um teorema que descreve condições suficientes para a existência de extremos locais. Neste caso, a função há pouco mencionada, admite um ponto crítico em $x=0$ ( $f'(0)=0$ ).

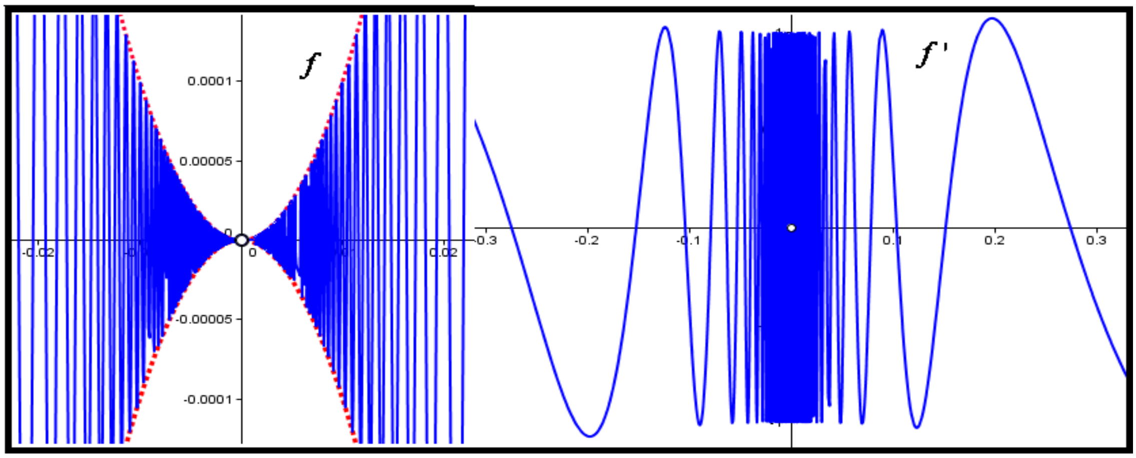


**Figura 8: Função que não admite ponto extremo (máximo ou mínimo) na origem**

Por outro lado, com base no gráfico da função $f\,'$ apresenta valores positivos e negativos nas vizinhanças do ponto $(0,0)$. Bourchtein & Bourchtein (2010, p. 304) mencionam que esta função não preserva seu sinal em qualquer vizinhança unilateral do ponto $x=0$. Deste modo, concluem que $f(x)$ não possui nem máximo e nem mínimo local na origem, pois contamos apenas com condições necessárias para a identificação de pontos extremos. Por fim, consideremos agora $g(x)=\begin{cases} x^2\left(2+\cos\left(1/x\right)\right) \text{ se x} \neq 0 \\ 0 \text{ se x=0} \end{cases}$ e sua derivada descrita por $g(x)=\begin{cases} 4x+2x\cos\left(1/x\right)+\text{sen}\left(1/\text{x}\right) \text{ se x} \neq 0 \\ 0 \text{ se x=0} \end{cases}$. Nesse caso, Bourchtein & Bourchtein (2010, p. 305) comentam este caso que envolve uma função que admite um ponto crítico na origem ($g\,'(0)=0$), sua derivada muda de sinal nas vizinhanças da origem e, por outro lado, $g(x)$ admite mínimo nessa vizinhança. Deparamos aqui um contraexemplo para a identificação de pontos extremantes (fig. 9).

De fato, para divisarmos condições suficientes para tal, exige-se que uma função $f$ seja uma função contínua numa vizinhança $x_0 \in V_{x_0} \subset IR$, onde $x_0$ é ponto crítico e, além disso, $f\,'$ preserva seu sinal nesta vizinhança. Nestas condições, o teorema descreve, então, uma condição suficiente para identificação de um extremo local.

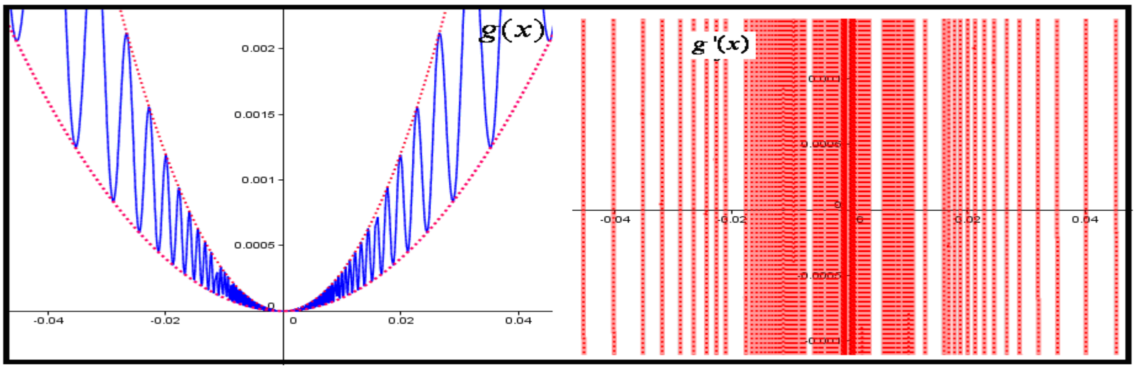


**Figura 9: Um contraexemplo para teorema para identificação de pontos extremos**

## 5. Considerações finais

Reconhecidamente, as dificuldades (BERGÉ, 2006) inerentes ao ensino/aprendizagem em *Análise Real* são relatadas em inúmeros estudos. Em nosso trabalho, evidenciamos a significação proporcionada pela exploração do *software Geogebra*, pertinente às definições e alguns teoremas essenciais nesta teoria, que adquirem um significado que ultrapassa os limites do formalismo e o olhar estrutural dos objetos matemáticos.

Neste sentido, demarcamos, inicialmente, na própria História da Matemática, o esforço dos matemáticos na transmissão de suas ideias apoiadas em diagramas, que detinham importante valor heurístico. Atualmente, registramos o repertório diversificado de possibilidades de exploração didática da tecnologia e, em nosso caso, o *software Geogebra* funciona como elemento impulsionador de uma reessignificação para definições formais e teoremas.

Assim, nesse trabalho, apresentamos alguns exemplos de situações atinentes às definições e teoremas que, com arrimo na tecnologia, admitem rápida descrição geométrica. Deste modo, buscamos estimular um olhar pormenorizado do aprendiz, no sentido de "enxergar" propriedades formais a partir da visualização dos gráficos que exibimos nas figuras ao longo deste texto. Tal abordagem pode proporcionar a evolução do significado conceitual agregado a cada situação, o que pode apoiar um entendimento posterior mais elaborado. Por outro lado, o simples domínio formal de inferências lógicas não garante uma compreensão efetiva dos conceitos aqui discutidos.

## Referencias bibliográficas

Alves, F. R. V. (2012). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, 1. 65-79, Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index. Acessado em: 04 de Abril de 2012.

Bergé, Analia. (2006). Análisis institucional a propósito de la noción de complejidad del conjunto de los números reales. *RELIME*, 9, 31-64. Disponível em: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2096730. Acessado em: 16 de Agosto de 2012.

Bourchtein. Andrei & Bourchtein. Louidmila. (2010). *Análise Real: funções de uma variável real*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna.

Burns. R. P. (2004). *Numbers and functions: steps into analysis*. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Davidson. K. R. & Donsig. A. P. (2010). *Real Analysis and Application: theory and practice*. New York: Springer.

Dugac. Pierre. (2003). *Histoire de L´Analyse: autour de la notion de limite et de ses voisinages*. Paris: Vuibert.

Edwards, C. H. Jr. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer.

Guidorizzi, H. (2010). *Um curso de Cálculo*. v. 1, Rio de Janeiro: Ao Livro técnico.

Lima, E. L. (2010). *Curso de Análise*. v. 1, Rio de Janeiro: Projeto Euclides.

Lima, E. L. (2010). *Curso de Análise na Reta* (2011, 2 de fev.). Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=programa-de-verao-2011-analise-na-reta. Acessado em: 10 de julho de 2012.

Hairer. E. & Wanner. G. (2008). *Analysis by its History*. New York: Springer.

Pedersen, K. M. (1980). Techniques of the Calculus: 1630-1660. In: Grattan-Guinness, I. (Eds.) *From the Calculus to the Set Theory: an introductory history*. Capítulo 1, pp 10-47.

Stahl. Saul. (1999). *Real Analysis: a historical approach*. New York: John and Wiley and Sons.

Zorich. V. A. (2004). *Mathematical Analysis I*. New York: Springer.