CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO DE LOS PROFESORES Y RESOLUCIÓN DE TAREAS DE CONSTRUCCIÓN DE PARALELOGRAMOS CON GEOGEBRA

Leonela M. Rubio – Juan L. Prieto G.
leonela1193@hotmail.com– juanl.prietog@gmail.com
Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

Modalidad: CB.
Nivel Educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Conocimiento geométrico, profesores, paralelogramos, GeoGebra.

Resumen

Frecuentemente se cree que la capacidad que tienen los profesores de memorizar una definición matemática, que luego será verbalizada durante la instrucción, garantiza que éstos sean competentes para ejercer la práctica docente. Nuestra experiencia en la formación de profesores de Matemática nos dice que el conocimiento memorístico es insuficiente para resolver algunos problemas geométricos, especialmente aquellos ubicados en un entorno dinámico como el ofrecido por GeoGebra, colocando a los profesores en desventaja frente a las exigencias que supone analizar el potencial de las tareas matemáticas que se proponen a los alumnos. En este trabajo se describen dos casos de profesores que participaron en un taller de formación ofrecido por el Grupo TEM en 2012, donde debían resolver tareas de construcción de paralelogramos con GeoGebra, usando su conocimiento sobre los elementos y propiedades esenciales de los objetos geométricos involucrados y decidiendo la manera de vincular las primitivas geométricas del programa para obtener dibujos acordes con lo exigido. La secuencia de pasos definida por cada profesor revela la influencia del conocimiento que éstos tienen del objeto representado al momento de construir el dibujo, y cómo este saber obstaculiza el logro de una imagen consistente con los datos iniciales y la teoría geométrica.

INTRODUCCIÓN

Es curioso y también preocupante ver que un profesor de Matemática, capaz de mencionar sin complicaciones algunas características propias de un objeto geométrico (p.e., de un rectángulo),presenta dificultades para construir un dibujo alusivo al objeto en cuestión, dadas unas condiciones iniciales y haciendo uso de recursos tecnológicos. Para algunos, la capacidad que tienen los profesores de caracterizar con precisión los objetos geométricos según una teoría es suficiente para enseñar tales contenidos.

Sin embargo, nuestra experiencia en la formación del profesorado nos dice que éstos, al enfrentar tareas de construcción de figuras planascon GeoGebra, elaboran secuencias de construcción que no siempre les conducen a una solución correcta de lo propuesto, muy a pesar del conocimiento conceptual que tienen sobre los objetos representados.Bajo estas condiciones, las soluciones incorrectas de los profesores se caracterizan por ser algunas veces“inconsistentes”, cuando el dibujo elaborado no representa al objeto geométrico evocado, otras veces “incompletas”, si el profesor se da por vencido en el trabajo o, en el peor de los casos, “ausentes”, ya que los obstáculos imposibilitan la construcción.

En todos estos casos, el uso del GeoGebra pone de manifiestolas dificultades que tienen los profesores para explicar y predecir el comportamiento dinámico de los dibujos geométricos que ellos mismos elaboran, a la luz de la teoría vinculada a los objetos representados (Laborde, 1997). Consideramos que una manera de ayudar a superar estas dificultades es mediante el diseño, puesta en práctica y mejora progresiva de propuestas de formación permanente, apoyados en el uso del GeoGebra, que permitan a los profesores de Matemática aprender a establecer relaciones necesarias entre el conocimiento teórico y los dibujos que evocan a los objetos geométricos escolares, colocándoles en mejores condiciones para llevar a cabo la enseñanza. Sin embargo, las acciones emprendidasrequieren de la comprensión de las formas de aprender a vincular lo visual y lo teórico en un entorno de GeoGebra por parte de los profesores, incluyendo las dificultades que se les presentan.

En atención a esto último, el presente trabajo describe las dificultades que tienen dos profesores de Matemática para elaborar una secuencia de pasos de construcción de paralelogramos con GeoGebra que conduzcan a dibujos consistentes con unos datos iniciales, a partir del análisis de las relaciones el conocimiento de los profesores referido a los cuadriláteros y las representaciones mentales asociadas. Esta información se considera relevante en tanto aportan información para el diseño de las propuestas formativas en pro del desarrollo de conocimiento, destrezas y métodos de enseñanza de contenidos geométricos en entornos de GeoGebra.

OBJETIVO

Explicar la influencia del conocimiento geométrico que tienen los profesores sobre los paralelogramos en los procesos de construcción de dibujos alusivos a estas figurasutilizando el GeoGebra.

MARCO TEÓRICO

Según Vinner (citado por Gutiérrez y Jaime, 1996), aprender correctamente un objeto geométrico determinado supone identificar: (i) el concepto matemático asociado, (ii) la imagen del concepto que la persona crea en su mente, y (iii) la definición del concepto que se maneja. Por lo general, cuando pensamos en un objeto geométrico nuestra mente evoca su imagen, es decir,el conjunto de dibujos que asociamos con el objeto y que nos ayudan a recordar la definición del mismo, sus características y propiedades. Si una persona cuenta con una gran variedad de imágenes mentales que reflejan las cualidades más importantes del objeto que representan, entonces se dice que tiene una imagen del concepto completa, lo cual le permite una amplia comprensión del contenido y la capacita para realizar construcciones consistentes. Por tanto, el elemento que causa más impacto en el sujeto es la imagen mental que posea del concepto, llegando a utilizarla de apoyo al momento de resolver tareas referidas al objeto sin atender necesariamente a la definición formal del mismo.

Por otra ladoFischbein (1993) distingue sólo categorías determinadas por la naturaleza, tanto conceptual como figural, de los objetos geométricos, así se introduce la idea de "concepto figural". Desde esta manera, un objeto geométrico visto desde la parte conceptual se considera una entidad totalmente abstracta, semejante a la definición del concepto que distingue Vinner. Visto desde la parte figural, el objeto muestra propiedades espacialesque se rigen siempre por las limitantes establecidas en la componente conceptual. Al momento de realizar alguna tarea geométrica, normalmente la parte conceptual es dejada a un lado, predominando las características espaciales asociadas al concepto, pero esto no es lo apropiado para tener una buena comprensión del mismo. Lo ideal es que el aprendiz sea capaz de integrar lo conceptual y lo espacial, con predominio de lo primero, así se desarrollaría el concepto figural derivado de vincular la definición formal con las características espaciales de un objeto.

Estos referentes teóricos permiten identificar las causas por las cuales los profesores de Matemática realizan construcciones inconsistentes de dibujos alusivos a los cuadriláteros en un entorno de GeoGebra. Dado que la construcción de un dibujo con GeoGebra requiere del establecimiento de una secuencia de acciones manifestadas en el uso de primitivas del programa, consideramos la inconsistencia de un dibujo como una consecuencia del predominio de la componente figural del objeto representado sobre la componente conceptual en la conformación del concepto tratado por parte del aprendiz.

METODOLOGÍA

En esta investigación participaron 15 profesores de Matemática activos y 12 estudiantes para profesores de Matemática, organizados en dos grupos heterogéneos que cursaron separadamente un taller de formación en la enseñanza de la Geometría utilizando GeoGebra, ofrecido por el Grupo TEM en el primer semestre de 2012. El taller tuvo el propósito de mejorar la comprensión de los participantes en cuanto a las características, propiedades y relaciones de los triángulos y cuadriláteros. Durante el desarrollo del taller los participantes debían utilizar el GeoGebra para resolver un conjunto de tareas de construcción referidas a los contenidos mencionados (ver Figura 1).

II PARTE. TAREAS REFERIDAS A CUADRILÁTEROS

Tareas de Construcción

12. Construya un rectángulo cuyas diagonales midan 6 cm y un lado 3 cm. Describe el proceso que has seguido para su construcción.
13. Dibuja un paralelogramo cualquiera y explica el procedimiento que has seguido para realizar la construcción.

Figura 1. Ejemplo de tareas de construcción de paralelogramos GeoGebra

Resolver una tarea de construcción como los mostrados en la figura 1 suponía que los participantes explicaran al resto del grupo la secuencia de pasos elaborada con el GeoGebra para realizar un dibujo que cumpliera con las condiciones iniciales. Las explicaciones dadas por los participantes al respecto fueron grabadas en video con la intención de capturar el desarrollo del momento. Los datos de la investigación proceden de las respuestas de los participantes al momento de las explicaciones. Consideramos que una respuesta del profesor está compuesta del archivo GeoGebra (extensión. ggb) con el dibujo elaborado y de la explicación correspondiente a su construcción. Específicamente se analizaron las respuestas de dos profesores, uno de cada grupo, que generaron dibujos inconsistentes. Para conservar el anonimato de los participantes seleccionados, nos referiremos a ellos como Pedro y Julia.

El procedimiento de análisis de los datos se realizó en dos fases. En la primera fase se analizaron las construcciones mostradas en los archivos GeoGebra con el propósito de (i) determinar el número de pasos de la secuencia, las primitivas de construcción utilizadas y las relaciones entre estas primitivas para la construcción, e (ii) identificar aquellos pasos donde se aprecian decisiones incorrectas del profesor que añaden al dibujo características espaciales impropias en relación a la teoría geométrica.En la segunda fase se analizaron las explicaciones de los profesores, centrando la atención en las razones de los pasos incorrectos detectados en la fase anterior, con el fin de identificar el atributo espacial añadido al objeto geométrico que no corresponde con éste y determinar las implicaciones del conocimiento del profesor sobre la construcción.

RESULTADOS

El caso de Pedro

En el primer caso, Pedro se dispuso a construir un rectángulo con GeoGebra cuyas diagonales tuvieran una longitud de 6 cm y lo lados más cortos midieran 3 cm. En su construcción, Pedro procede de siguiente manera (ver Cuadro 1):

Cuadro 1: Secuencia de pasos asociada a la tarea propuesta a Pedro

Paso N°	Primitiva del GeoGebra usada	Descripción del uso
1	Segmento de Longitud Fija	Dibuja el segmento $\overline{AB}$ de 3 cm de longitud.
2	Ángulo dada su Amplitud	Dibuja un ángulo de 45°, con vértice en *A* y lado $\overline{AB}$.
3	Semirrecta que pasa por Dos Puntos	Dibuja el lado $\overline{AB'}$ del ángulo anterior.
4	Circunferencia dados su Centro y Radio	Dibuja una circunferencia centrada en *A* y de radio igual a 6 cm.
5	Intersección de Dos Objetos	Determina el punto *C* de intersección de la semirrecta $\overline{AB}$ y la circunferencia.
6	Recta que pasa por Dos Puntos	Traza la semirrecta $\overline{BC}$.
7	Recta Paralela	Traza la recta paralela al segmento $\overline{AB}$ que pasa por *C*.
8	Recta Paralela	Traza la recta paralela a la semirrecta $\overline{BC}$ que pase por *A*.
9	Intersección de Dos Objetos	Determina el punto *D* de intersección de las rectas paralelas.
10	Polígono	Dibuja el cuadrilátero *ABCD*.

Para Pedro, este procedimiento le condujo aun dibujo representativo de un rectángulo con las condiciones dadas (ver Figura 2). Sin embargo, al someter el dibujo a la prueba del arrastre, éstese deformó de tal manera que su apariencia resulto en un cuadrilátero evidente no rectángulo, mostrándose así la inconsistencia de la construcción. El análisis de la secuencia permitió identificar una decisión de construcción incorrecta de Pedro, situada en el paso 2.

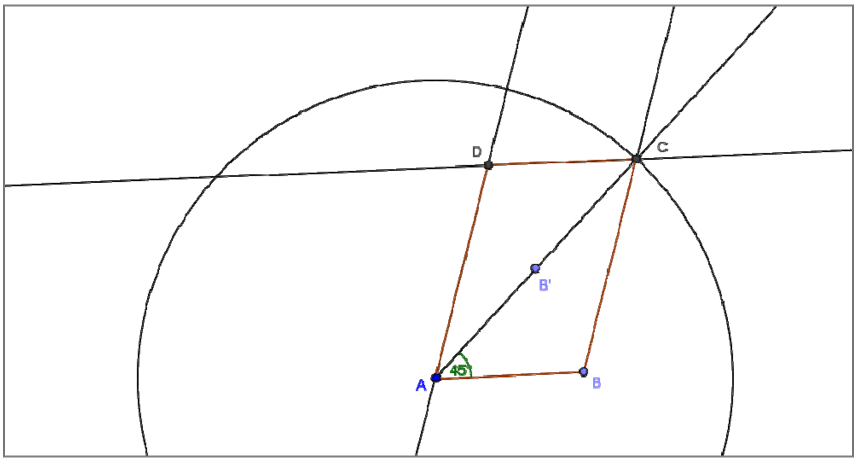

Figura 2. Dibujo de un rectángulo elaborado por Pedro

La explicación dada por éste al respecto permite inferir que el profesor basó su construcción en la idea de que las diagonales del rectángulo bisecan a los ángulos interiores, idea que tiene validez sólo para un tipo de rectángulo especial: el cuadrado. Específicamente, Pedro sostuvo que “en los rectángulos, las diagonales tienen una inclinación de 45° con respecto a cualquiera de los lados contiguos”.

El caso de Julia

En el segundo caso se pedía construir un paralelogramo con cualesquiera medidas posibles para sus lados utilizando el GeoGebra. En su intento, Julia produjo la siguiente secuencia de pasos de construcción (ver Cuadro 2):

Cuadro 2: Secuencia de pasos asociada a la tarea propuesta a Julia

Paso N°	Primitiva del GeoGebra usada	Descripción del uso
1	Recta que pasa por Dos Puntos	Traza la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
2	Nuevo Punto	Determina un punto *C* fuera de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
3	Recta Paralela	Construye la recta que pasa por *C*, paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

Al observar tanto el dibujo (ver Figura 3) como la secuencia de pasos se evidenció que Julia había producido una construcción incompleta,puesto queésta no concluyó conel paralelogramo esperado. La figura 3 muestraúnicamente dos rectas paralelas que evocan la idea de Julia de “lados paralelos”, característica de todo paralelogramo.

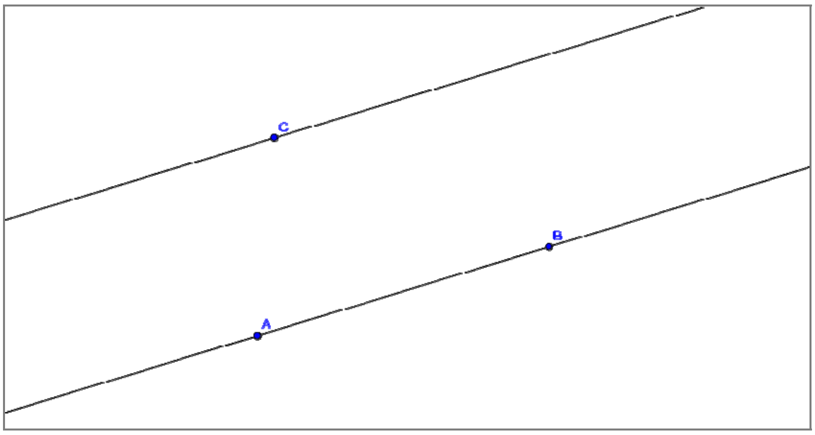

Figura 3. Construcción incompleta de un paralelogramo elaborada por Julia

Sin embargo, esta profesora se declara incapaz de terminar la construcción y desiste de su empeño. En su explicación, Juliareconoce la relación entre las dos rectas paralelas trazadas y un par de lados opuestos del cuadrilátero: “las rectas paralelas contienen a dos de los lados del paralelogramo”. A su vez, ella afirma desconocer cómo continuar su construcción, esto es, seleccionar primitivas del programa que le permitan determinar el par de lados restantes.

DISCUSIÓN

En ambos casos, los profesores ponen de manifiesto el uso de su conocimiento sobre los rectángulos (caso de Pedro) y los paralelogramos (caso de Julia) al momento de establecer la secuencia de pasos de construcción con GeoGebra. Tal conocimiento se muestra vinculado a las imágenes mentales de los profesores sobre los objetos evocados, imágenes que a su vez parecen estar soportados más por las cualidades espaciales de los dibujos asociados que por las propiedades geométricas que le son inherentes. En el caso de Pedro, se evidencia una comprensión errada de las características de las diagonales de todo rectángulo. Esto pudo ser debido a que todas las imágenes mentales que venían a la mente de Pedro cuando éste pensaba en un rectángulo con sus diagonales trazadas pertenecían al tipo de rectángulo denominado "cuadrado". Vale destacar que las diagonales de un cuadrado están contenidas en las bisectrices de los ángulos rectos que lo componen. La sola interacción con esta clase de dibujos prototípicos pudo llevar a Pedroa considerarla característica de "bisección" de los ángulos opuestos que poseen las diagonales de un cuadrado como propia de todorectángulo. Esto concuerda con los resultados obtenidos por Gutiérrez y Jaime. (1996) y Moriena y Scaglia (2003), quienes concluyeron que estudiantes para maestros y alumnos de educación media poseen imágenes mentales de los objetos basadas sólo en algunos dibujos prototípicos.

En el segundo caso ocurre algo muy parecido, ya que Julia cuenta con una imagen mental del objeto "paralelogramo" con pocas características relevantes como para ser consideradas en su construcción. Al respecto, Julia parece no haber asociado al dibujo la característica del paralelismo de los lados opuestos del cuadrilátero independientemente de la posición que éstas ocupen en el plano. Esta dependencia a las características espaciales del dibujo y la poca capacidad de establecer relaciones entre varios objetos geométricos es reflejada también por Carreño y Climent(2010),en su investigación con estudiantes para profesores de Matemática. Las autoras concluyen en su trabajo que el conocimiento geométrico de los estudiantes es limitado conceptualmente, por lo tanto no poseen redes matemáticas complejas. En ellos la apariencia de las figuras predomina sobre la definición, semejante a lo ocurrido con Julia.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A través de ésta investigación pudimos concluir que el éxito de un proceso de construcción con GeoGebra yace en el hecho de poseer una imagen mental completa del objeto geométrico que se trate. En este sentido, no basta sólo con la memorización de una definición formal del objeto, sino además se necesita transferir esa información a un contexto más "visual" y transformarla en una herramienta útil para tomar decisiones sobre la secuencia de pasos que permitan elaborar una construcción consistente con los datos iniciales. Lamentablemente, muchos de los profesores que participan en nuestros talleres llegan con imágenes del concepto muy precarias que le imposibilitan la tarea de realizar construcciones en GeoGebra que soporten la prueba del arrastre.

Sería recomendable entoncesinsistir en una mayor interacción con las posibles imágenes de los objetos geométricos que deben ser enseñados, en la que se pueda reconocer las características y propiedades verdaderamente pertinentes para el estudio que se realice, y con el propósito de enriquecer cada vez más las imágenes mentales que se tengan. Esto supone que los profesores sean sometidos a experiencias formativas en las cuales deban reflexionar sobre las características esenciales de los objetos geométricos escolares, como una forma de ampliar su comprensión de estos objetos y garantizar una enseñanza mucho más eficaz con sus alumnos. Éste es uno de los aspectos donde la tecnología aventaja considerablemente al clásico entorno de regla y compás, puesto que con sólo arrastrar alguna construcción por uno de sus puntos es posible, no sólo estudiar la consistencia del dibujo obtenido con la teoría geométrica, sino también mostrar al aprendiz cientos de dibujos del objeto en un corto tiempo y de una manera muy sencilla. Quizás de esto se derive la idea de que mientras más representaciones poseamos de un objeto geométrico, más conocemos al objeto en sí.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Carreño, E. y Climent, N. (2010). Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemática. *PNA*, 5(1), pp. 11-23.
- Fishbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), pp. 139-162.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de magisterio. En J. Giménez y otros (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria*, pp.143-170. Granada: Comares.
- Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática*, pp. 33-48. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Moriena, S. y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15, pp. 5-19.