UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA CONSTRUÇÃO DE MODELOS PLANOS PARA A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Karla Aparecida Lovis – Valdeni Soliani Franco
karlalovis@gmail.com – vsfranco@uem.br
Universidade Estadual de Maringá - Brasil

Modalidade: Minicurso
Nível educativo: Terciário
Palavras-chave: Educação Matemática, Geometrias não Euclidianas, Geometria Hiperbólica, Modelos Planos.

Resumo

A Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica diferem não somente em seus conteúdos, mas também no modo em que foram construídas. Enquanto a primeira foi desenvolvida por meio da percepção tátil e visual e posteriormente axiomatizada, a outra foi axiomatizada e posteriormente foram desenvolvidos modelos matemáticos para a percepção tátil e visual dessa geometria. Provavelmente isso fez com que as publicações de Bolyai e Lobachevski (sobre o que hoje denominamos Geometria Hiperbólica), não fossem suficientes para convencer o mundo matemático da possibilidade de existirem outras geometrias diferentes da estabelecida por Euclides. A construção de modelos que satisfizessem os axiomas estabelecidos na Geometria Hiperbólica contribuíram para a aceitação de tal Geometria. Felix Klein construiu um modelo plano e Henry Poincaré mais dois modelos planos. O GeoGebra é uma ferramenta muito eficaz para construção desses modelos. Neste minicurso faremos a construção de ferramentas que possibilitam construir o modelo do disco de Poincaré e outras que permitem explorar vários resultados que são pertinentes à Geometria Hiperbólica.

Introdução

Durante o meados do século XIX encontramos um exemplo de simultaneidade de descobertas relacionadas às Geometrias não Euclidianas; o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856), sem qualquer contato mútuo e sem prévio conhecimento dos trabalhos de Saccheri, desenvolveram, independentemente, um novo tipo de Geometria (LOVIS, 2009).

Lobachevsky foi um dos matemáticos que mais contribuiu na construção das Geometrias não Euclidianas. Durante sua vida acadêmica elaborou vários trabalhos relacionados à Geometria. Em um desses trabalhos "On the Principles of Geometry", publicado em 1829, Lobachevsky marcou oficialmente o nascimento da Geometria não Euclidiana.

Matemáticos do fim do século XIX chegaram a resultados importantes sobre à consistência da Geometria de Lobachevsky. Eles descobriram que as Geometrias não Euclidianas devem ser consistentes caso seja consistente a Geometria Euclidiana. Lobachevsky rejeitou somente o quinto postulado de Euclides, mas conservou os demais postulados e os axiomas da Geometria Euclidiana. O que faltava era construir um modelo matemático para a Geometria de Lobachevsky.

O matemático Felix Klein (1849-1925) criou um modelo para a Geometria Hiperbólica, que está de acordo com os postulados dessa Geometria. O matemático Henri Poincaré (1864-1912) criou outros dois modelos para a Geometria Hiperbólica. A seguir vamos descrever um desses modelos, o modelo do disco de Poincaré.

O modelo do Disco de Poincaré

O francês Henri Poincaré (1864-1912) criou dois modelos para a Geometria Hiperbólica. Neste minicurso, será trabalhado o "Modelo do Disco de Poincaré" que, no decorrer deste texto, chamaremos simplesmente de modelo de Poincaré. Neste texto, descreveremos algumas características deste modelo[1].

Poincaré criou o seu modelo baseado na Geometria Euclidiana. Os pontos desse modelo são pontos no sentido habitual que estão em um plano. O plano é, por definição, o interior de um círculo euclidiano, ou seja, se O é o centro de uma circunferência euclidiana qualquer e OR um de seus raios, o plano no modelo hiperbólico é constituído por todos os pontos P tais que $\overline{OP} < \overline{OR}$. A circunferência (que por definição não faz parte do plano) é chamada de horizonte.

As retas neste modelo são cordas abertas que passam pelo centro O (ou seja, os diâmetros abertos), e arcos de circunferências abertos ortogonais[2] ao horizonte. No decorrer do texto chamaremos estas retas de retas hiperbólicas, ou simplesmente de h-retas. Um exemplo de h-retas e horizonte estão na figura 1.

[1] As características serão apresentadas segundo Greenberg (1980) e Lovis (2009).

[2] Duas circunferências secantes são ortogonais se em cada ponto de intersecção os raios são perpendiculares.

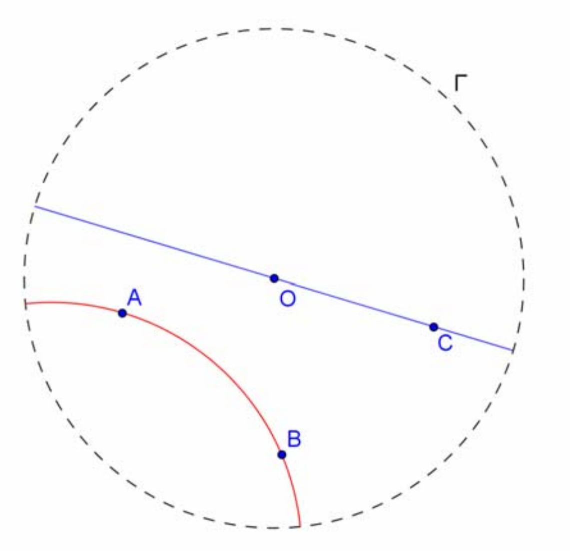

Figura 1 – h-retas AB e OC, e horizonte Γ

Para construção de h-retas, necessitamos saber, como construir circunferências ortogonais. Para isso é necessário conhecer o que significa o inverso de um ponto em relação à uma circunferência qualquer.

Em um plano euclidiano π, construímos um círculo com raio r e centro O (chamado centro de inversão), e definimos uma aplicação de π em π, cuja imagem de um ponto qualquer A em π é definida como sendo o ponto A' contido na semi-reta OA, tal que $\overline{OA}.\overline{OA'} = r^2$. Sendo assim, os pontos A e A' são chamados de pontos inversos com relação à circunferência. Se A' é o inverso de A, então A é o inverso de A'.

Mas afinal, qual a relação que tem o conceito de inverso de um ponto em relação a uma circunferência, com a definição de h-reta? Esta relação está descrita pelo teorema a seguir.

Teorema: Sejam C uma circunferência e A um ponto qualquer do plano que contém C. Uma circunferência C' que passa por A é ortogonal a C se, e somente se, o centro de C' está localizado na mediatriz de A e o seu inverso A' em relação a C.

Este teorema garante que a mediatriz de um ponto A e o seu inverso A' em relação a uma circunferência C, é o Lugar Geométrico dos centros das circunferências ortogonais a C que passam pelo ponto A. No minicurso, utilizaremos o GeoGebra e o teorema anterior para construir h-retas que passam por um ponto do plano hiperbólico.

No modelo do disco de Poincaré, se duas h-retas se interceptam em um ponto P, elas vão determinar um ângulo. A medida do ângulo formado por elas é, por definição, a medida do menor ângulo formado pelas semirretas euclidianas que são tangentes aos arcos (retas hiperbólicas) no ponto em que estes se interceptam. Portanto, para calcular a medida de ângulo nesse modelo é preciso encontrar as retas euclidianas tangentes aos arcos para depois calcular a medida do ângulo formado por essas duas retas, como ilustra a figura 2.

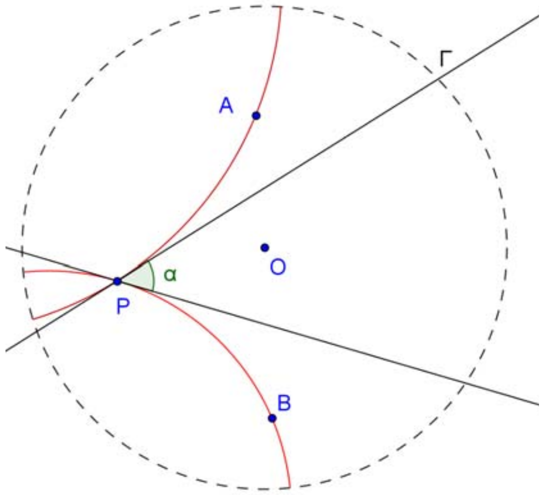

Figura 2 – Ângulo α entre as h-retas AP **e** BP.

A distância entre dois pontos neste modelo é dada pela seguinte definição:

$$d(\mathrm{A,B}) = \left| \ln \frac{\overline{\mathrm{AU}} * \overline{\mathrm{BV}}}{\overline{\mathrm{AV}} * \overline{\mathrm{BU}}} \right|$$

onde U e V são pontos ideais[3] da h-reta AB. A operação definida por $*$ é a multiplicação usual de números reais, e as medidas dos segmentos $\overline{\mathrm{AU}}$, $\overline{\mathrm{BV}}$, $\overline{\mathrm{AV}}$ e $\overline{\mathrm{BU}}$ são euclidianas. O esboço encontra-se na figura 3.

3 Os pontos do horizonte são chamados de pontos ideais.

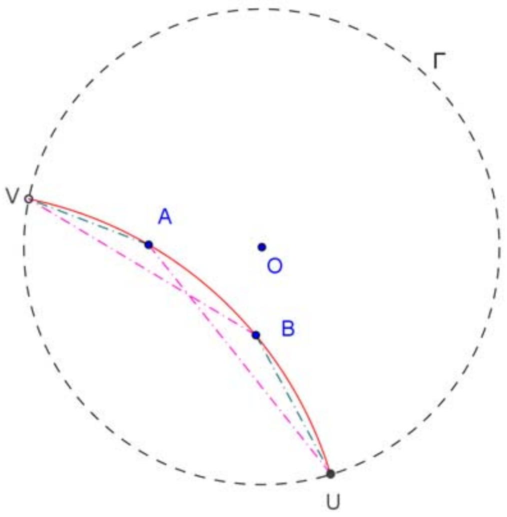

Figura 3 – Distância entre os pontos A e B.

Poincaré usou esta métrica para construir um espaço ilimitado (plano hiperbólico), em um espaço limitado com a métrica euclidiana (circunferência euclidiana). A métrica desenvolvida por Poincaré permite que quando os pontos A e B se aproximam dos pontos ideais o valor das medidas $\overline{AV}$ e $\overline{BU}$ diminuem, consequentemente o logaritmando aumenta e, assim, depois da aplicação da função logarítmica a função distância tende ao infinito. Ao aproximar os pontos A e B o valor das medidas $\overline{AU}$ e $\overline{BV}$ diminuem, o que ocasiona, depois da aplicação da função logarítmica uma distância que tende a zero.

Ao utilizarmos a métrica desenvolvida por Poincaré, obtemos que a distância entre dois pontos quaisquer, quando estes estiveram próximos do horizonte, tenderá ao infinito. Isso acontece porque as h-retas, assim como a reta euclidiana, devem ser infinitas, para satisfazer o segundo postulado de Euclides.

Retas paralelas neste modelo são retas que, assim como na Geometria Euclidiana, não possuem nenhum ponto em comum. Neste modelo, dado um ponto P e uma h-reta AB é possível traçar, por P, infinitas h-retas paralelas a h-reta AB.

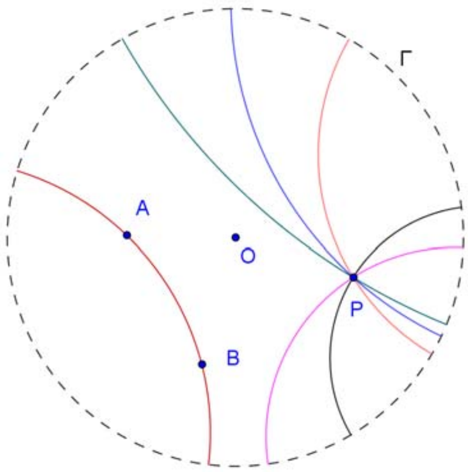

Figura 5 – h-retas passando por P paralelas à h-reta AB

Dada duas h-retas CU e AB, a h-reta CU, é chamada de h-reta paralela limite da h-reta AB, se ela tiver um ponto ideal em comum com a h-reta AB. A figura 6, ilustra duas retas que são paralelas limites.

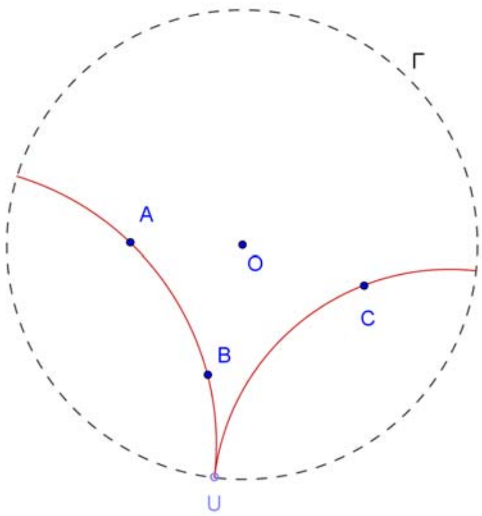

Figura 6 – H-retas paralelas limites

Alguns resultados da Geometria Hiperbólica, deverão ser explorados durante o minicurso, como por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede menos do que 180º. Na figura 7, desenhamos um triângulo hiperbólico, no modelo do disco de Poincaré, em que se mostra a soma dos seus ângulos internos.

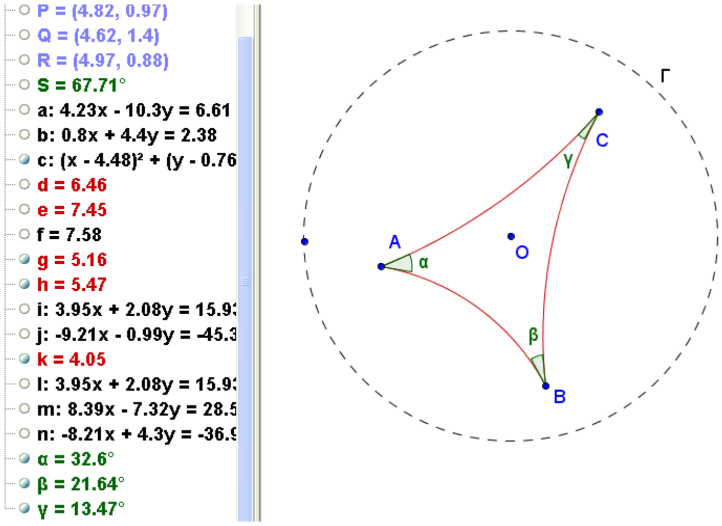

Figura 7 – Soma S dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico

Referências Bibliográficas

- Euclides. (2009). *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp.

- Franco, V. S.; Gerônimo, J. R.; Barros, R. M. O.; (2010). *Geometria Euclidiana Plana: um estudo com o software GeoGebra*. Maringá: EDUEM.

- Greenberg, M. J. (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company.

- Lovis, K. A. (2009). *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores*. (Tese inédita de mestre). Universidade Estadual de Maringá, Maringá/PR.