

## UNA EXPERIENCIA EN LA FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA ACERCA DEL TEMA “FUNCIONES”

Silvina Cafferata Ferri – Dolores Bosch – Federico Gómez – Daniela Rodríguez Brot  
scafferata@fibertel.com.ar – dolobosch@fibertel.com.ar – fedetipito@gmail.com –  
danielarbrot@gmail.com

Instituto de Enseñanza Superior N°1 “Dra. Alicia Moreau de Justo” – Argentina

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Funciones – Secuencias didácticas – Formación docente – Actualización docente.

### Resumen

*La presente comunicación tiene como objetivo exponer el resumen y las conclusiones de un trabajo desarrollado en un Instituto de Formación Docente de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina.*

*Se diseñó e implementó durante el año 2011, repitiéndose en la actualidad, un curso de actualización docente destinado a profesores de Matemática en ejercicio en el Nivel Medio, con el objeto de analizar la posible inclusión de un programa como GeoGebra en sus clases, referidas al desarrollo del contenido Funciones y la multiplicidad de aspectos que este contenido incluye.*

*Participaron además de la elaboración, desarrollo e implementación de este curso alumnos avanzados del profesorado de Matemática del Instituto, lo que permite también reflexionar acerca de la inclusión y utilización de un programa como GeoGebra como herramienta didáctica para la clase de Matemática en la formación docente y el tipo de actividades que se pueden elaborar.*

*Podremos compartir esta experiencia a través de una puesta en común, tanto de las actividades diseñadas para el curso de actualización, como así también las secuencias didácticas que los docentes asistentes han elaborado como producto final del curso realizado, destinadas a alumnos de escuela media en relación al contenido antes mencionado.*

### Introducción

Los avances tecnológicos, especialmente computacionales, plantean grandes desafíos tanto para los docentes como para los investigadores. Asimismo, afecta a los distintos niveles de decisión educativa en cuanto a la incorporación de recursos informáticos al proceso de enseñanza y aprendizaje.

La incorporación de la computadora en la escuela, mediada por un software educativo, impacta en forma directa sobre los docentes, su formación, el currículum en Matemática, el proceso de enseñanza y aprendizaje, entre otros.

Por ello, la capacitación del docente es primordial, ya que tiene a su cargo la responsabilidad de diseñar situaciones didácticas que permitan aprovechar al máximo las potencialidades de la tecnología de acuerdo con el nivel evolutivo del estudiante.

A su vez, es indispensable que los docentes asimilen esta tecnología, ya que, de lo contrario, se correría el riesgo de llevar a cabo una práctica de escasa o nula significación.

Esta competencia de generar situaciones de aprendizaje adecuadas no requiere solamente del conocimiento de la herramienta informática sino que además deberá contemplar la selección de contenidos que se abordarán con ella, a través de cuáles programas y de qué forma se llevará adelante el proceso de enseñanza.

Esto dará lugar a una nueva mirada acerca de algunos contenidos matemáticos, resultantes de los avances en el campo tecnológico, que posibiliten el tratamiento de problemas y situaciones que sin ellos no serían accesibles, y abran, a la vez, la posibilidad de adoptar un enfoque experimental de la Matemática que cambie la naturaleza de su aprendizaje.

Podemos plantearnos entonces *¿cuáles son los contenidos que integran el currículum en el área de Matemática, que resultan susceptibles de ser abordados en ambientes informáticos aprovechando así sus características diferenciales?*

El contenido *Funciones* es considerado uno de los temas de mayor importancia en la Matemática, no sólo por su riqueza desde el punto de vista de la disciplina, sino por su aplicación a distintos aspectos de la realidad como es la modelización. Esta importancia también se refleja, por ejemplo, en que el mismo concepto es abordado con distintos niveles de profundidad y desde distintos aspectos durante todos los años de la Escuela Media. Por lo cual, hemos fijado nuestro punto de interés en torno a este bloque de contenidos.

### **Propuesta de actualización docente**

De acuerdo con lo descripto en la introducción, se planteó el interés por diseñar encuentros de capacitación o actualización docente, destinados a Profesores de Matemática de Escuelas de Nivel Medio (13-17 años) o a estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática.

El proyecto surge y se desarrolla en un Instituto de Formación Docente: Instituto de Enseñanza Superior N° 1 “Dra. Alicia Moreau de Justo”, de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina.

El grupo de trabajo que se conforma para ello está integrado por una docente del instituto, a cargo de las asignaturas Cálculo I y Cálculo II de la carrera de Profesorado en Matemática, junto a tres estudiantes avanzados de la misma.

La elección del software GeoGebra<sup>1</sup> para el diseño de actividades de aula está fundamentada desde distintos aspectos.

Por un lado, considerando los contenidos a trabajar, resulta muy favorable la capacidad gráfica del programa, que permite presentar situaciones, ilustrar y visualizar conceptos y resultados, experimentar ejemplos, verificar soluciones, etc.

Sin disponer de un dominio completo del programa, en las primeras sesiones de trabajo es posible obtener la solución a una gran cantidad de problemas de la Matemática y de sus aplicaciones a través de la construcción de gráficos y utilizando su potencial para el cálculo numérico y simbólico.

Por otro lado, es un programa creado, diseñado y destinado a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, con las ventajas que esto significa para esta disciplina.

Se consideraron, además, todos los aspectos positivos que se pueden enunciar acerca de los software libres, de descarga e instalación gratuitas.

Esto ha resultado de sumo interés en el último tiempo ya que actualmente nos encontramos en nuestro país en un proceso de distribución de netbooks gratuitas para todos los alumnos de escuelas públicas. En lo que a Nivel Medio se refiere, el Ministerio de Educación del Gobierno Nacional es el encargado de esta distribución, a través del Programa Conectar Igualdad<sup>2</sup>, que comenzó hace aproximadamente dos años y que se sigue realizando por etapas.

Las computadoras que ya han sido distribuidas cuentan con algunos programas instalados, y la posibilidad de instalación de otros, por lo que un software como GeoGebra ha tomado una difusión muy relevante en el último tiempo y ha despertado sumo interés por parte de los docentes acerca de su utilización y su implementación en el aula.

De acuerdo con todo lo expuesto, hoy en día, resulta fundamental que los docentes reflexionen acerca de la posibilidad de diseñar y poner en práctica diferentes situaciones problemáticas que requieran la utilización de la computadora como herramienta para su resolución. Sin embargo, al mismo tiempo deben permitir un aprendizaje significativo de los contenidos a desarrollar, de modo que no resulte una mera herramienta de cálculo apenas algo más sofisticada que otras.

---

<sup>1</sup> Proporcionado por: <http://www.geogebra.org/>

<sup>2</sup> Página del Programa: <http://www.conectarigualdad.gob.ar/>

### **Acerca del curso implementado**

Tal como se ha comentado, el curso está destinado a profesores de Matemática de Escuela Media o a estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática. Se desarrolla en el mencionado instituto, durante 6 encuentros, de 2 horas reloj de duración cada uno.

Los objetivos del curso son:

- Brindar un conocimiento y una clara visualización del potencial del software.
- Potenciar en los docentes la utilización racional de la computadora como herramienta didáctica en su clase.
- Complementar con otros recursos la formación didáctico-matemática con que cuentan.
- Idear y analizar actividades de aplicación de los conocimientos teóricos y prácticos adquiridos, que se puedan implementar en la clase de Matemática en la Escuela Media.
- Incentivar a los docentes para la generación de nuevas ideas propias con el uso del software.

Los ejes temáticos en los que nos centramos son:

- Introducción a la utilización del programa: menú, ventanas, sintaxis de las sentencias, funciones incluidas en el software, utilización de las herramientas, configuración de opciones y propiedades, ejemplos de aplicación.
- Concepto de función. Representaciones gráficas. Desarrollo de algunos de los aspectos y características particulares de cada una de las funciones que se incluyen en la Escuela Media. Derivabilidad de funciones. Integrales indefinidas y definidas.
- Actividades y situaciones problemáticas cuya resolución conllevan la implementación de estos contenidos mediante la modelización a través de funciones. Aplicaciones de las mismas a distintas áreas del conocimiento, como por ejemplo Ciencias Naturales.

Durante los encuentros, los docentes y estudiantes desarrollan y resuelven distintas actividades diseñadas a trabajar con cada uno de los contenidos incluidos en los ejes mencionados. Conjuntamente, se plantean preguntas con el objetivo de reflexionar sobre la importancia e innovación de la aplicación del software, y se debate sobre las ventajas y desventajas que tiene el uso del mismo.

El último encuentro está destinado a que cada uno de los participantes presenten una propuesta personal de secuencia didáctica de actividades respecto de alguno de los

contenidos desarrollados en el curso, que permitan utilizar el software como herramienta para su resolución, que se pueda implementar en alguno de los cursos en que ellos trabajen.


Al igual que a lo largo de todo el curso, con las propuestas realizadas por cada participante, se elabora un material conjunto para ser distribuido y compartido entre todos los profesores y estudiantes que asisten al curso.

### **Algunos ejemplos de actividades desarrolladas en los encuentros**

En el primer encuentro se les distribuye a los docentes un material con las actividades a desarrollar, que comienza con una breve descripción del programa, las partes de la pantalla y sus elementos principales, las funciones incluidas en el menú que se utilizan más frecuentemente, las opciones que se despliegan de cada ícono de la barra de herramientas, y se inicia el trabajo con funciones.

A partir de la definición de un ejemplo de una función, se analizan las opciones de configuración del gráfico: su visualización, opciones de configuración de los ejes, cuadrícula, etc. Del mismo modo, se analizan las opciones de configuración de los objetos, que en este caso, resulta la función definida. Se puede ver así la posibilidad de mostrar u ocultar el objeto, renombrarlo, visualizar un rótulo, eliminarlo, modificar su color o su estilo, etc.

La posibilidad de definir un punto, perteneciente o no a la gráfica de la función, permite trabajar con la forma en que se visualizan los objetos en la Vista Algebraica, según se trate de objetos dependientes o libres. Del mismo modo, se analiza la posibilidad de que el programa defina los puntos como intersección de objetos, como puede ser en este caso, entre dos funciones.

Para poder graficar otros ejemplos y conocer otras opciones del programa, se analizan las funciones incluidas, que pueden visualizarse en el botón  como así también las modificaciones y desplazamientos de los gráficos a partir de la definición de otros ejemplos.

A partir del segundo encuentro y en los sucesivos se incorporan otros objetos y otras funciones: comienzan a utilizarse los deslizadores, con su correspondiente configuración y opciones. Esto permite que los docentes elaboren gráficos donde se visualice la influencia de ciertos parámetros en la definición de una función, como por ejemplo:  $f(x) = a(x - b)^2 + c$  ó  $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx - c) + d$

Pueden también definirse puntos de la forma  $A = (a, f(a))$  a partir de un deslizador “a” definido, como por ejemplo  $A = (a, \ln(a))$  o  $A = (a, \cos(a))$  para trabajar con los asistentes otras opciones de configuración, como por ejemplo animación automática, activar rastro, limpiar rastro, etc.

Otras actividades incluyen también la posibilidad de trabajar con funciones definidas en un intervalo y funciones definidas por ramas, lo que permite incorporar sentencias como Función[Función, Número a, Número b] o Si[<Condición>, <Entonces>, <Si no>]

Se plantean también otras situaciones más abiertas en cuanto a la resolución y construcción con el programa, como por ejemplo:

- *Así como en las funciones lineales analizamos y calculamos proporciones, insertemos una circunferencia con centro en el Origen de coordenadas. ¿Cómo podemos mostrar o permitir que se visualicen las proporciones trigonométricas para distintos ángulos y para distintos radios de la circunferencia?*

- *Consideremos la circunferencia trigonométrica de radio 1 y las proporciones trigonométricas antes calculadas. Puede definirse un punto cuyas coordenadas sean: el valor del ángulo, y el valor de una de esas proporciones calculadas. Visualizar el rastro que deja este nuevo punto y la gráfica que describe a medida que se mueve el punto sobre la circunferencia.*

Otros tipos de secuencias que se les plantea a los asistentes permiten no sólo trabajar en relación a las construcciones con el programa sino también la posibilidad de reflexionar en conjunto en relación a su aplicación con los alumnos de escuela media:

*Al trabajar con la función afín la ecuación explícita de la recta es  $y = a \cdot x + b$ , donde*

*“a” es la pendiente y, tal como se ha estudiado, puede calcularse como  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . En*

*GeoGebra las construcciones de las rectas con deslizadores se podrían hacer en función de “a” o de “ $\Delta x$  y  $\Delta y$ ” ¿Cuáles son las ventajas de trabajar con deslizadores para  $\Delta x$  y  $\Delta y$  en lugar de uno para “a”? ¿Y las desventajas?”*

En cada encuentro se dejan algunas actividades o problemas para que los asistentes puedan pensar y resolver para el encuentro siguiente, al igual que la posibilidad de su implementación en el aula. Por ejemplo:

*Un campesino cuenta con 240 m de cerca y desea encerrar un campo rectangular que bordea un río recto. En la rivera no se necesita cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que ocupa el área máxima?*

*¿Cómo puede resolverse esta actividad utilizando GeoGebra? ¿Qué contenidos pueden desarrollarse a partir de ella?*

Otras actividades que se incluyen a lo largo de los encuentros permiten rever conceptos relativos a otras funciones, como es el caso de otras funciones polinómicas, homográficas, exponenciales, logarítmicas, etc.

El desarrollo de ellos abarca también el concepto de derivabilidad en un punto, a través de las variaciones de los incrementos, su extensión al concepto de función derivada y derivadas sucesivas, ecuaciones de las rectas tangente y normal, aplicaciones de las derivadas al estudio de funciones, etc. Desde el punto de vista del programa, se trabaja nuevamente con deslizadores y distintos tipos de puntos, se incorporan las sentencias Derivada[Función], Derivada[Función,Número],  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ , el ícono asociado al gráfico de rectas tangentes, comandos Raíz, Desarrolla, Extremo, Mínimo, Máximo, etc. Otros ejemplos de actividades relativas al análisis de funciones incluyen el trabajo con el software, relativos a integrales indefinidas, definidas, el área entre una función y el eje X, el área entre funciones, etc. incorporando así comandos como Integral[Función], Integral[Función, a, b], Integral[Función f, Función g, a, b].

Entre cada encuentro, además de dejar planteados algunos problemas *para pensar*, se les facilita a los participantes algunos ejemplos de archivos diseñados en GeoGebra, tal como puede visualizarse en el Anexo a modo de ejemplo. Las construcciones de estos archivos en GeoGebra no son sencillas para alguien que esté comenzando a conocer el programa, pero creemos que proporcionarles estas construcciones a los docentes y alumnos asistentes sirve para desplegar la posibilidad de utilizar materiales didácticos contruidos por otros, aún si se desconocen detalles técnicos acerca de cómo fueron realizados. Algunos de estos ejemplos son generados por el grupo de trabajo encargado del dictado del curso, y otros obtenidos de la web, particularmente de la página de GeoGebra hecha para compartir estos archivos<sup>3</sup>.

A modo de introducirse en lo referido a programación, los asistentes llegan a crear un ejemplo de applet, que combina el trabajo con números aleatorios, casillas de entradas de datos, botones, y nuevos comandos. Un ejemplo de ello también se incluye en el Anexo.

---

<sup>3</sup> <http://www.geogebraTube.org/>

## Consideraciones finales

Tal como se planteó al comienzo del presente trabajo, resulta de interés analizar con los Profesores de Matemática que actualmente ejercen en la Escuela Media, y con los estudiantes avanzados de la carrera como futuros docentes, *¿cuáles son los contenidos que integran el currículum en el área de Matemática, que resultan susceptibles de ser abordados en ambientes informáticos aprovechando así sus características diferenciales?*

El bloque referido a Funciones y todos los conceptos que a partir de ello se desprenden presentan una disposición particular respecto de ser desarrollados con el aporte de una herramienta didáctica como GeoGebra.

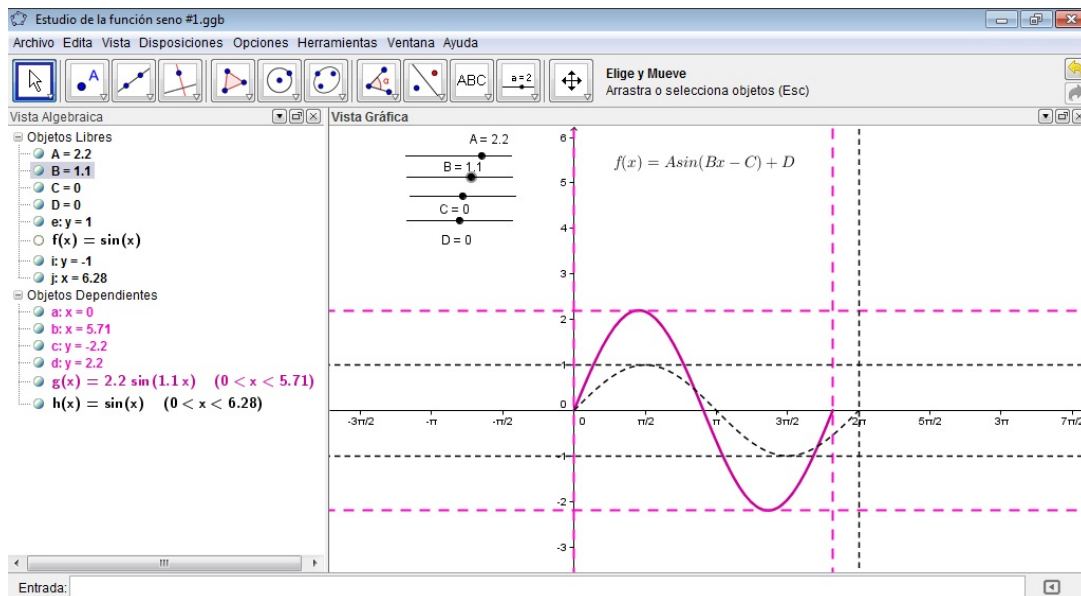
De acuerdo con la breve descripción que realizamos acerca de los encuentros, es nuestro objetivo que los asistentes puedan introducirse a la utilización del programa, sus objetos y sus comandos, y experimenten los primeros ejemplos de construcciones propias, como así también la utilización de archivos diseñados por otros. En todos los casos, destacamos el análisis que de esas actividades ellos pueden realizar respecto de la utilización en sus clases como así también el diseño de sus propias secuencias didácticas para su implementación.

## Referencias bibliográficas

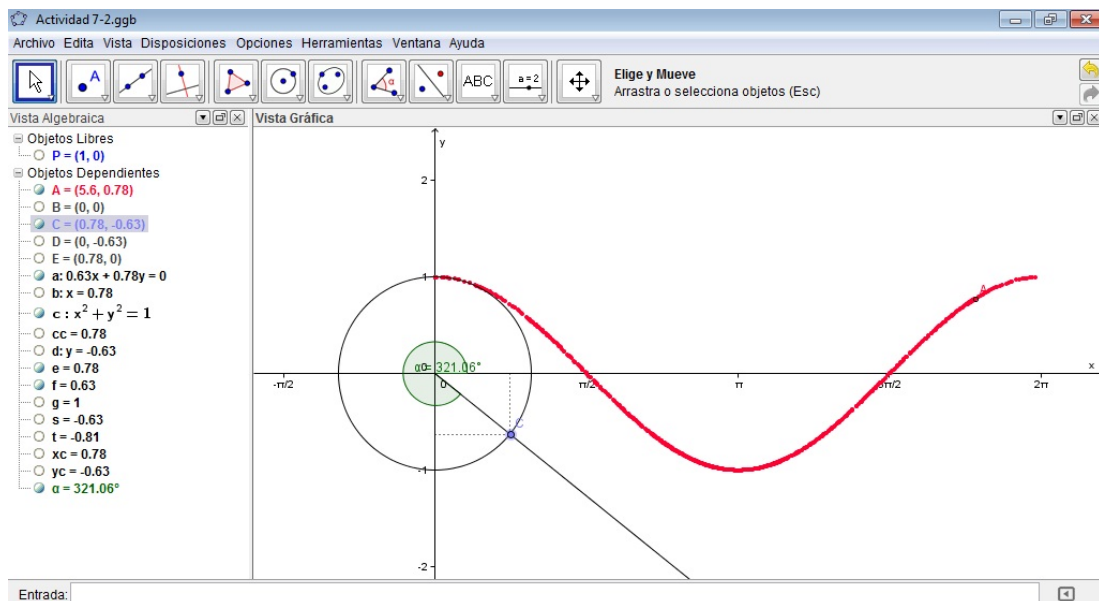
- Borbón, A: *Manual para Geogebra*. Revista Digital Matemática, Educación e Internet. Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica. [http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/Secciones/Temas\\_de\\_Geometria/ABorbon\\_ManualGeogebraV11N1\\_2010/2\\_ABorbon\\_ManualGeogebra.pdf](http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/Secciones/Temas_de_Geometria/ABorbon_ManualGeogebraV11N1_2010/2_ABorbon_ManualGeogebra.pdf). Consultado el 12/10/2012.
- Carrillo, A; Llamas, I. (2010). *Geogebra: mucho más que geometría dinámica*. México: Alfaomega Ra-Ma Editores.
- Corte Ramos, B. (2008): *Apuntes sobre Geogebra... con unos toques de mates*. Centro del Profesorado y de Recursos de Gijón. Gobierno del Principado de Asturias. <http://web.educastur.princast.es/cpr/gijon/recursos/mates/ManualGeogebra.pdf> Consultado el 12/10/2012
- Federación de Enseñanza de Andalucía (2010): *¿Qué es Geogebra? Temas para la Educación. Revista Digital para Profesionales de la Enseñanza*. Número 8. ISSN 1989-4023. <http://www2.fe.ccoo.es/andalucia/docu/p5sd7158.pdf>

## Anexo: algunas imágenes sobre las actividades realizadas

*Ejemplo 1:* La incorporación de los deslizadores permite que los asistentes elaboren gráficos donde se visualice la influencia de ciertos parámetros en la definición de una función, como por ejemplo  $f(x) = a \cdot \sin(bx - c) + d$ . La posibilidad de definir una función sólo en un intervalo permite en el caso de las funciones trigonométricas visualizar sólo un período de cada función.



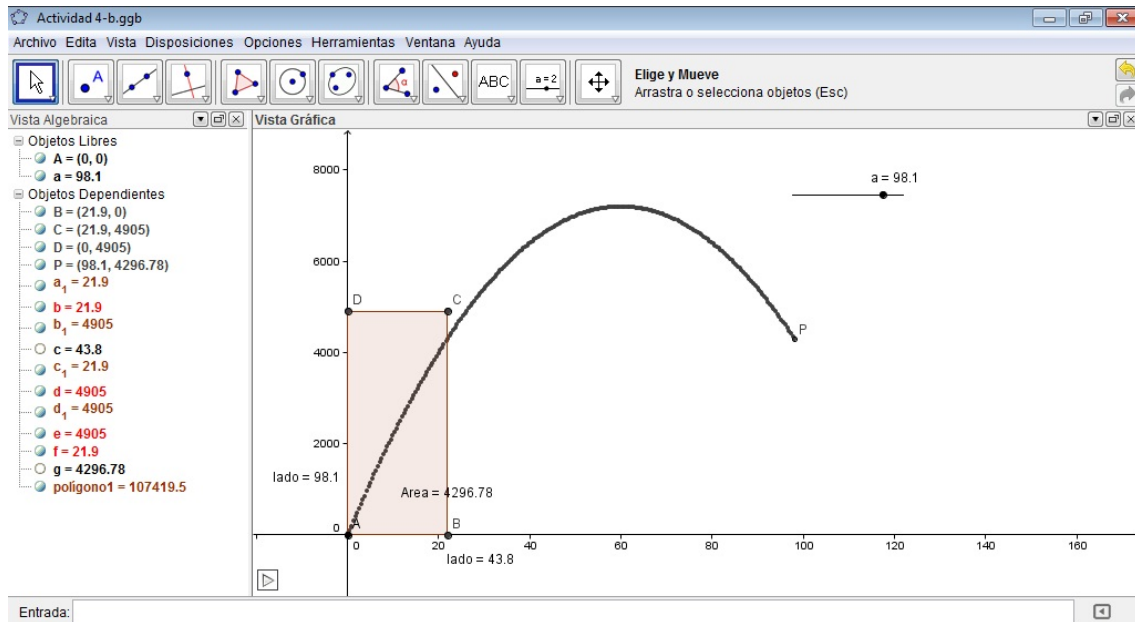
*Ejemplo 2:* Considerando la circunferencia trigonométrica y las proporciones trigonométricas que pueden calcularse, se puede definir un punto, dado el ángulo y una de las proporciones calculadas, para visualizar luego el rastro que deja ese punto a medida que se mueve el que está sobre la circunferencia.



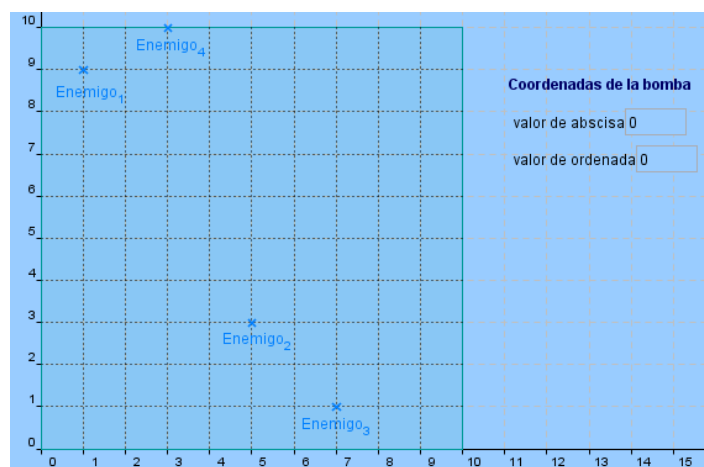
*Ejemplo 3:* Ante un problema como el comentado anteriormente:

*Un campesino cuenta con 240 m de cerca y desea encerrar un campo rectangular que bordea un río recto. En la rívera no se necesita cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que ocupa el área máxima?*

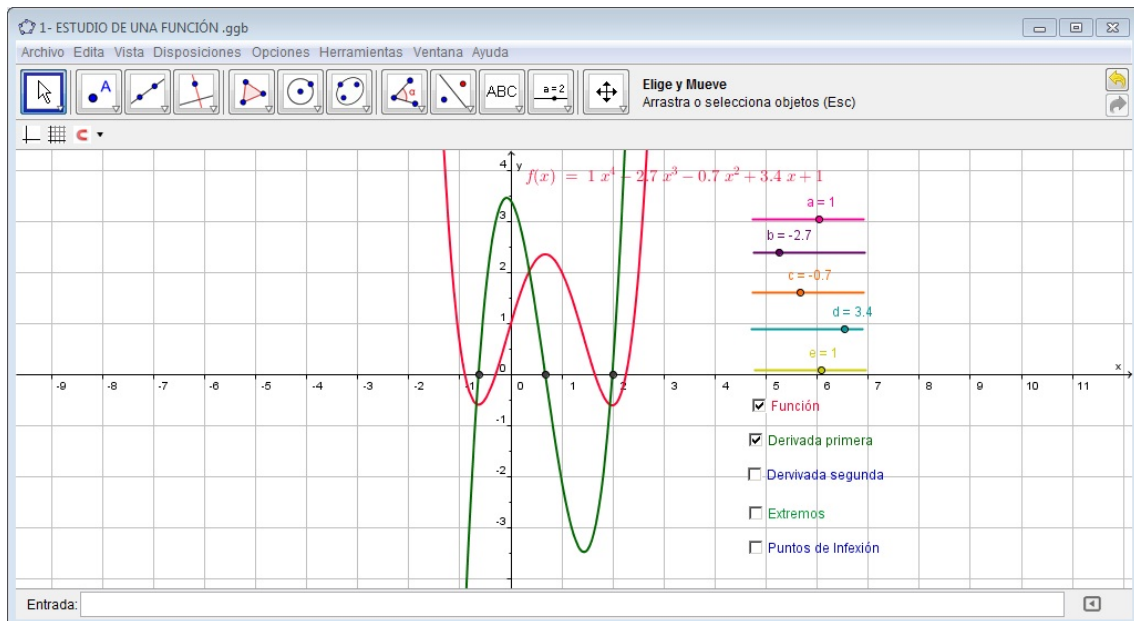
El programa permite visualizar los posibles rectángulos que se pueden construir con las características dadas, y la gráfica correspondiente al área de cada uno de ellos.



*Ejemplo 4:* Uno de los archivos que se les facilita a los participantes es una Batalla Naval. Ellos, a modo de *usuarios* en lugar de diseñadores, leen la consigna planteada, prueban su funcionamiento, experimentan alternativas, analizan contenidos a desarrollar con sus alumnos y plantean actividades que se pueden realizar a partir de su utilización.



*Ejemplo 5:* Mediante la utilización de deslizadores y casillas de control puede visualizarse un ejemplo de actividad que permite realizar el estudio de funciones polinómicas a partir de sus derivadas.



*Ejemplo 6:* Los asistentes crean un applet que genere funciones cuadráticas de manera aleatoria (con la utilización de la generación de números aleatorios). Se ofrecen casillas de entradas de datos para que los usuarios respondan cuáles son las raíces y las coordenadas del vértice. El programa, entonces, debe poder indicar si la respuesta es correcta. Y, en ese caso, habilitar un nuevo botón que permita visualizar el gráfico de la función, adaptando su escala o los límites de visualización de acuerdo con cada caso.

