PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA TRABAJAR EN SECUNDARIA: ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA.

Teresita Carrión – Daniela Pagés
pitacar@gmail.com – danielapages@gmail.com
Consejo de Formación en Educación, Uruguay

Modalidad: T
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Palabras clave: Geometría dinámica, didáctica, aprendizaje.

Resumen

El programa GeoGebra es una herramienta que permite la elaboración de conjeturas, la visualización dinámica y la construcción de modelos, por parte de los estudiantes. En este taller proponemos, a partir de la presentación de dos enfoques didácticos distintos del mismo tema (ángulos en la circunferencia), crear un espacio de reflexión, discutiendo qué potencialidades del programa permiten a los estudiantes obtener aprendizajes más significativos. La concepción que tienen los estudiantes del "hacer matemático" depende en gran medida del tipo de actividades que se les planteen en el aula. Si bien la visualización dinámica es muy importante y aporta a la búsqueda de conjeturas, nos preguntamos si reducir las actividades a la visualización, no reafirma la creencia del estudiante en lo que le resulta evidente, desestimando la necesidad de su demostración.

Ya nadie duda de la importancia de la computadora en la enseñanza, sobre todo en la actualidad, con el desarrollo de software especialmente creado para su uso en la clase.

"Los softwares educativos tienen la capacidad de realzar el componente visual de la matemática atribuyendo un papel importante a la visualización en la educación matemática, pues ella alcanza una nueva dimensión si fuera considerado el ambiente de aprendizaje con computadoras como un particular colectivo pensante (Lévy, 1993), donde profesores, alumnos, medios y contenidos matemáticos residen juntos y, más que eso, piensan juntos. En este colectivo el medio adquiere otro status, es decir, va más allá de mostrar una imagen. Más específicamente, es posible decir que el software se torna actor en el proceso de hacer matemática. Algunas particularidades del proceso visual, en educación matemática, proporcionadas por las tecnologías computacionales pueden ser destacadas:

La visualización constituye un medio alternativo de acceso al conocimiento matemático.

La comprensión de conceptos matemáticos requiere de múltiples representaciones, y las representaciones visuales pueden transformar su comprensión.

La visualización es parte de la actividad matemática, y una forma de resolver problemas.

Las tecnologías con poderosas interfaces visuales están presentes en las escuelas, y su utilización para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática exige la comprensión de los procesos visuales.

Si el contenido de matemática puede cambiar debido a las computadores (…) es claro en este punto que las matemáticas en las escuelas pasarán por al menos algún tipo de cambio (…) (Borba y Villarreal, p96)". (Borba 2010).

De Villiers (2007) plantea que, aunque las nuevas tecnologías volverán inevitablemente obsoletas algunas prácticas (operatorias, por ejemplo), también requieren el desarrollo de nuevas habilidades. Al mismo tiempo, el autor plantea que las nuevas tecnologías requieren que nos cuidemos de nuevas trampas, que ellas traen consigo. En particular en cuanto al software de geometría dinámica, el autor señala que muchos docentes lo utilizan como un pizarrón glorificado. "… Muchos profesores tienden a utilizar el software de geometría dinámica como una extensión de la geometría del lápiz y el papel. (…) usada de esta forma la nueva tecnología no es tan buena como la antigua tecnología. Para continuar usando la nueva tecnología para hacer matemática tenemos que aprender a usarla de modo que transforme la actividad matemática, permitiéndonos hacer cosas que antes no hubieran sido posibles." (Sutherland,)

Otra trampa que señala De Villiers es la de pensar que solo presentar o permitir investigar un problema o teorema con ayuda de la geometría dinámica, automáticamente torna el aprendizaje de la geometría más fácil y menos doloroso. Plantea el autor que la geometría dinámica, como cualquier tecnología, no ofrece una mágica panacea para aprender geometría, por el solo movimiento en la pantalla. Salvo que el estudiante analice críticamente o sea guiado a observar y examinar lo que ocurre en la pantalla, tendrá lugar muy poco aprendizaje.

La tercera trampa que señala el autor es la de creer que la visualización hace todo más fácil. Plantea que esta puede ayudar muchísimo como herramienta a un estudiante avanzado, pero que a un novato puede incluso distraerlo del aprendizaje matemático.

Finalmente De Villiers afirma que para comenzar usando geometría dinámica es necesario repensar críticamente el contenido, los objetivos, y el enfoque didáctico que se utiliza. Además, la implementación de este enfoque debe ser constantemente evaluada y revisada. Dice que, por ejemplo, una de las principales ventajas de la geometría dinámica es su exactitud, inmediata retroalimentación visual y la posibilidad de chequear muchos casos en poco tiempo. Sin embargo, los estudiantes son proclives a convencerse fácilmente de la validez de un resultado, e inmediatamente plantean: ¿Por qué todavía necesito una prueba deductiva para estar seguro?

Durante la década pasada, las computadoras y el software usado en los cursos de geometría han sido cada vez más poderosos.

Según Dreyfus y Hadas (1995), los ambientes dinámicos de aprendizaje animan a los estudiantes a medir e investigar empíricamente situaciones geométricas; permiten dinamizar los cambios de algunos datos mientras se mantienen otros constantes para observar qué se mantiene invariante y qué es lo más probable y qué no. Sostienen estos autores que el énfasis que se pone en ese software en el lado empírico de la geometría, claramente hace aumentar en los estudiantes la voluntad y la habilidad de investigar, generalizar y conjeturar. Si bien esta actividad tiene un importante rol en el curriculum de geometría, no necesariamente fortalece el entendimiento de los estudiantes sobre el rol de la demostración. Señalan a Laborde (1993), quien ha llevado adelante un análisis teórico de los objetos que los estudiantes manejan mientras mientras aprenden en un ambiente de geometría dinámica y ha advertido que el mal uso de computadoras puede llevar fácilmente al triunfo del inductivismo. También mencionan a Schwartz (citado en Chazan, 1993) quien ha sugerido que los estudiantes que en los cursos de geometría utilizan evidencia empírica presentan dificultades para distinguir entre esta y la demostración.

A partir de lo anterior nos preguntamos qué tipo de actividades utilizando GeoGebra, permitirán a los estudiantes conjeturar, visualizar, y a la vez plantearse la necesidad de la justificación, en lugar de tomar como verdadero aquello que "ven".

En este taller trabajaremos con dos enfoques distintos para abordar la propiedad que vincula el ángulo central y los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco.

El primero de los enfoques se basa en una figura dinámica que permite conjeturar en forma dirigida las propiedades en cuestión. El segundo enfoque consiste en una secuencia de actividades extraídas de Itzcovich, H (Iniciación al estudio didáctico de la Geometría) adaptadas para ser trabajadas en GeoGebra, donde se pide que se realicen algunas construcciones. Unas se pueden construir de inmediato y otras son imposibles de construir, con la intención de provocar un conflicto que se pueda resolver al descubrir la propiedad.

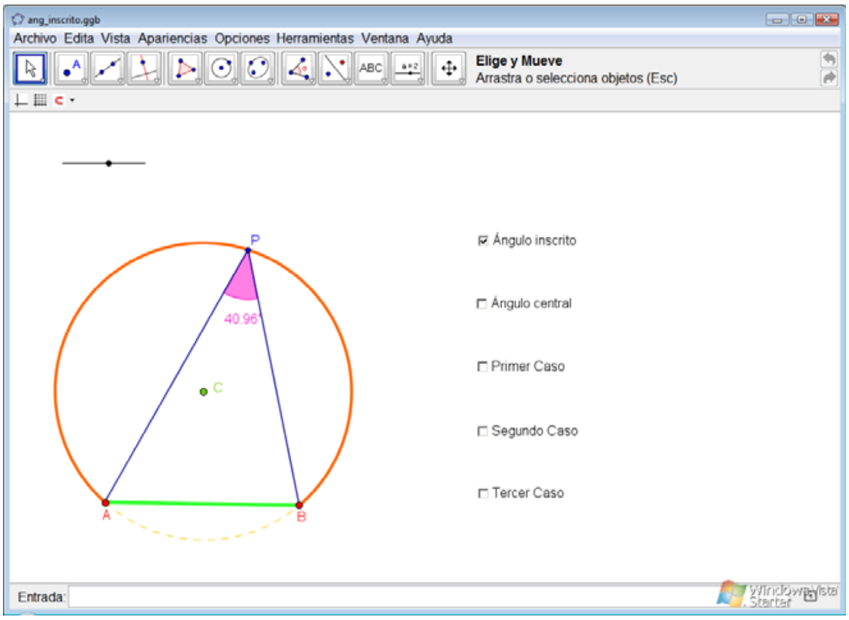
En cualquiera de las dos presentaciones, se parte de que el estudiante ya conoce y sabe utilizar: los criterios de congruencia de triángulos, la clasificación de triángulos y las propiedades generales y particulares de los mismos, la definición de circunferencia.

Las actividades del taller:

Analice las siguientes propuestas, indicando qué resoluciones y conclusiones son esperables de alumnos de primer año de bachillerato, ante cada una de ellas.

Propuesta I:

Los alumnos acceden al archivo de GeoGebra que presenta la siguiente vista:



La figura se acompaña de la siguiente ficha de trabajo:

Se llama ángulo inscrito en una circunferencia, a cualquier ángulo cuyo vértice pertenece a la circunferencia y sus lados son secantes a la misma.

Se llama ángulo central a cualquier ángulo cuyo vértice sea el centro de la circunferencia.

Consideramos dos puntos fijos A y B de una circunferencia de centro C.

P es un punto de la circunferencia. Mueve el deslizador y P se moverá en el arco mayor AB. ¿Observas algo?

Activa la casilla de control “Ángulo Central” y verás el ángulo ACB que es el ángulo central que abarca el mismo arco que los inscritos anteriores.

Si mueves el punto C, cambia la circunferencia y también el ángulo central ¿Puedes realizar alguna conjetura con lo que observas?

¿Será casualidad o una propiedad geométrica que podremos demostrar?

A continuación se orienta la demostración de la propiedad en los tres casos en que se hace usualmente, utilizando casillas de control para visualizar cada uno. Se dirige el razonamiento de los estudiantes a través de preguntas.

Propuesta II:

a) Construye una circunferencia de centro O y radio 3. Traza un diámetro y llama A y B a sus extremos. Determina un punto P perteneciente a la circunferencia, distinto de A y de B, de modo que el ángulo PAO mida 30º y el ángulo POB mida 60º.

b) Construye una circunferencia de centro T y radio 3. Traza un diámetro y llama C y D a sus extremos. Determina un punto Q en la circunferencia, distinto de C y de D, tal que el ángulo QCT mida 40º y el ángulo QTD mida 100º.

¿Cuántas soluciones encontraste en cada caso? Compara lo que hiciste con lo que hizo el compañero al lado tuyo. Extraigan conclusiones sobre el trabajo realizado.

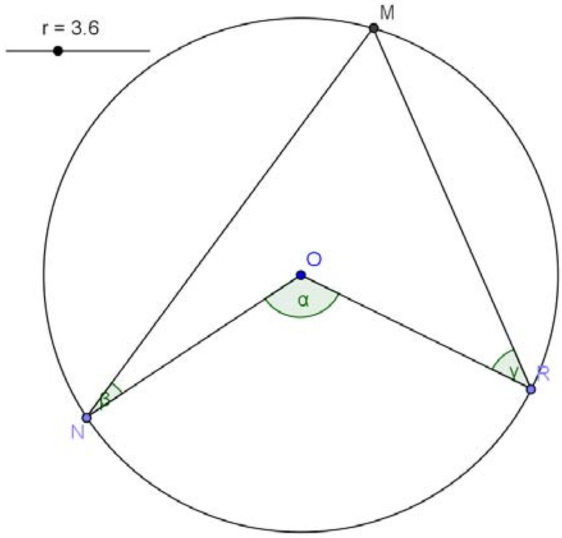
2) Construye una circunferencia de centro O y radio r (usa un deslizador para r, variando entre 0 y 10, con incremento 0.1). Marca tres puntos A, B y C en la circunferencia, tales que el ángulo ABC sea de 45º.

A partir de las informaciones anteriores, ¿es posible conocer las medidas de otros ángulos? ¿De cuáles? ¿Es posible conocer la medida del ángulo AOC?

3) Retoma el problema anterior y piensa en una figura "parecida" pero con otros valores para el ángulo CBA. Puede ser útil definir un deslizador ángulo, y luego definir el ángulo con esa medida variable.

Analiza qué del razonamiento del problema 2, depende de la medida del ángulo dado, y qué es independiente del mismo. A partir de ahí formula alguna conjetura.

4) En la siguiente figura, O es el centro de la circunferencia, y r es el radio. Determina, sin medir con herramientas del programa, la medida del ángulo ORM, sabiendo que la medida del ángulo NOR es 120º, y el ángulo MNO mide 20º.



Ayuda: utiliza las propiedades que ya conoces, de los ángulos interiores de un triángulo, y las que dedujimos a partir de los problemas anteriores.

Otras actividades

A continuación se presentan otras actividades que se discutirán si el tiempo del taller lo permite.

1) Dado el triángulo MRP, ubica un punto S de manera que el triángulo MSP sea rectángulo en S y el área de MSP sea la mitad del área de MRP.
¿El problema siempre tiene solución? Justifica la respuesta.

2) En un triángulo rectángulo ABC la hipotenusa AB mide 8 cm. La altura correspondiente a la hipotenusa mide 3 cm. Determinar un punto P de manera que el triángulo ABP sea rectángulo en P y el área de ABP sea el doble que el área de ABC.

3) Dado un cuadrilátero ABCD, encuentra qué condición debe cumplirse para que las mediatrices de los cuatro lados se intersequen en un punto.

Referencias bibliográficas

Borba, M. (2010). Softwares e internet na sala de aula de matemática.- X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA.-
En http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF
Consultado 20/10/2012.

Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la geometría.- Buenos Aires: Libros del zorzal.

de Villiers, M. (2007). Some pitfalls of dynamic geometry software. From Teaching & Learning Mathematics, No. 4, Feb 2007, pp. 46-52, a journal of the Association of Mathematics Education (AMESA). http://academic.sun.ac.za/mathed/AMESA/

Dreyfus, T. y Hadas, N. (1995). Proof as Answer to the Question Why. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 95/5, 1-5

Gil Pérez, D. y de Guzmán Ozámiz, M. (1993). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones. Organización de Estados Iberoamericanos para la educación, la ciencia y la cultura. Edición pdf: Joaquín Asenjo y Oscar Macías.
En http://www.oei.es/oeivirt/ciencias.pdf (Consultado 20/10/2010).

Mariotti, M. A. (2002). Influence of Technologies advances on students' math learning.- Lawrence Erbaum Associates.
En http://www.itd.cnr.it/telma/docs/Siena/Mariotti-Handbook.pdf (Consultado el 20/10/2010).