# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA EN GEOGEBRA EMPLEANDO LUGARES GEOMÉTRICOS Y ALGO MÁS

Julián Andrés Caicedo López
jcaicedo14@hotmail.com
Colegio Colsubsidio Chicalá - Colombia

Modalidad: Taller
Nivel educativo: Medio
Palabras clave: Problemas de construcción geométrica, lugar geométrico, heurística.

**Resumen**

*Este taller consiste en estudiar en primera instancia, como la noción de lugar geométrico permite abordar la resolución de algunos problemas de construcción geométrica desde un punto de vista instrumental, en el sentido que dicha noción entra a jugar un papel crucial como herramienta mediadora en la implementación de una estrategia heurística específica; y en segunda instancia, se plantea una variante didáctica a los problemas propuestos, al pedir la recreación de los lugares geométricos involucrados por medio de transformaciones, es decir, que la herramienta de lugar geométrico ofrecida por el programa Geogebra, sólo sea usada en la fase exploratoria del problema pero no en la presentación final de la resolución del mismo.*

## Introducción

La visualización de los lugares geométricos y los movimientos de figuras en el plano, son piedras angulares en la enseñanza de la Geometría elemental a nivel de la educación secundaria; los sistemas de geometría dinámica como Geogebra, se constituyen en una herramienta clave para lograr ese tipo de visualizaciones y movimientos, que los estudiantes aprecian de manera evidente.

Tradicionalmente el lugar geométrico se define como el conjunto de todos los puntos, y sólo aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones dadas (Hemmerling, 2002), pero en los distintos programas de geometría dinámica, comoGeogebra , la noción de lugar geométrico, se percibe desde una perspectiva másdinámica (se llama lugar geométrico de un punto M al variar otro punto Q sobre unobjeto, como el conjunto de posiciones que toma M al mover Q sobre ese objeto) ypermite abordar problemas de construcción geométrica desde un punto de vistainstrumental, en el sentido que dicha noción entra a jugar un papel comoherramienta mediadora en algunas estrategias en el enfoque de la resolución deproblemas. Se ilustrará el uso de una estrategia en particular, la cual entérminos generales consiste en el "relajamiento" de las condiciones iniciales, esdecir, tratar de satisfacer algunas de las condiciones iniciales que plantea el problema.

**Los lugares geométricos vistos a través de la dialéctica herramienta–objeto enGeogebra.**

De acuerdo con Douady (1995), los objetos matemáticos se pueden presentar desdedos aspectos, como herramientas y como objetos de estudio, a tal enfoque, lodenomina la dialéctica herramienta-objeto. La dificultad de materializar la graficacióna partir de la descripción sintética del lugar geométrico correspondiente, hace que nose haya aprovechado la oportunidad de articular dicha descripción sintética con surepresentación visual; una forma de aprovechar el dinamismo para enseñargeometría es a partir de la construcción de curvas como lugares geométricos enGeogebra.

En Geogebra, la herramienta "lugar geométrico", produce un conjunto de puntos L,tal que cada elemento es definido en función de un elemento del conjunto E: L ={f(P), P  E}, y aparecerá sobre la pantalla como un dibujo (una representación) delconjunto L para un número finito de f(P).

Para definir tal lugar geométrico es necesario seleccionar un punto P' para el cual ellugar es deseado y luego seleccionar el punto P sobre el cual P' dependa (dondeuna relación funcional existe entre P y P'). El punto P es un punto "variable" quepertenece a un conjunto particular de puntos del plano (una recta, unacircunferencia, un segmento de recta, etc.) y el punto P' está relacionado a P pormedio de una construcción geométrica.

**Metodología**

Existen diversas estrategias de resolución de problemas (dibujar una figura,enriquecer la figura, particularizar el problema, descomponer y recomponer elproblema, aritmetizar el problema, ver el problema resuelto y trabajar hacia atrás,etc.) y algunas de esas estrategias cuando se trabajan con el uso de latecnología, pueden adquirir una dimensión notable en el proceso de solución otratamiento de situaciones-problema.

Con el fin de ilustrar la estrategia heurística que es objeto de estudio, *"relajamiento "de las condiciones iniciales del problema"*, se parte de un ejemplo concretoplanteado por el matemático George Polya (1965. p. 41-42), donde se presenta unproblema de construcción geométrica, cuya solución se va desarrollando a manerade un dialogo socrático entre el maestro que propone el problema y el estudiantequien debe resolverlo, dicha solución puede ser recreada en el ambiente deGeogebra:

Inscribir un cuadrado en un triángulo dado (acutángulo), tal que dos vértices delcuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices delcuadrado sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo respectivamente.

• ¿Cuál es la incógnita?
Un cuadrado.
• ¿Cuáles son los datos?
Un triángulo dado, nada más.
•¿Cuál es la condición del problema?
Los cuatro vértices del cuadrado deben hallarse sobre el perímetro deltriángulo, dos sobre la base y los otros dos sobre cada uno de los otros doslados respectivamente.
•¿Es posible satisfacer la condición?
Creo que sí, pero no estoy seguro.
•No parece que el problema le resulte muy fácil. Si no puede resolverlo, trateprimero de resolver algún problema relacionado ¿Puede usted satisfacer algunaparte de la condición?
•¿Qué quiere decir por una parte de la condición?
•Veamos; la condición concierne a todos los vértices del cuadrado. ¿De cuántosvértices se trata?
De cuatro
•Una parte de la condición se aplicaría a menos de cuatro vértices. Tome sólouna parte de la condición, deje la otra parte. ¿Qué parte de la condición es fácilde satisfacer?
Es fácil trazar un cuadrado con dos de sus vértices sobre el perímetro deltriángulo, incluso un cuadrado con tres de sus vértices sobre el perímetro deltriángulo.

•Dibuje la figura

El alumno dibuja la figura 1.

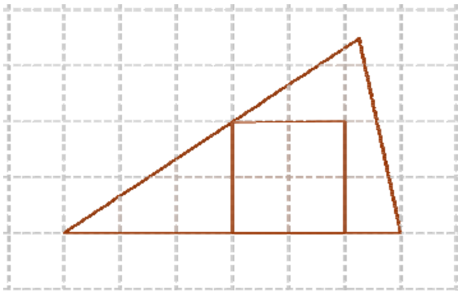

Fig. 1. Cuadrado con tres vértices sobre un triángulo

•Usted no ha considerado más que una parte de la condición, abandonando la otra.

¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada?

El cuadrado no está determinado si sólo tiene tres de sus vértices sobre elperímetro del triángulo.

•Bien. Dibuje otra figura.

El alumno dibuja la figura 2.

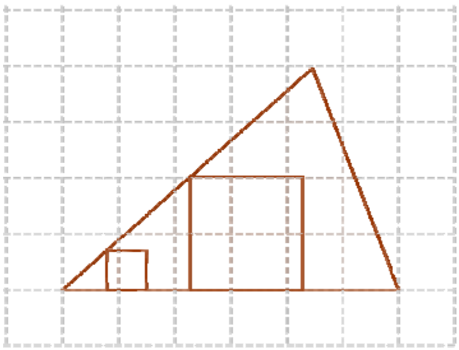

Fig. 2. Dos cuadrados, cada uno con tres vértices sobre un triángulo

•Tres de los vértices de su cuadrado están en el perímetro del triángulo, pero elcuarto no está donde debería estar. Como usted lo ha dicho, el cuadrado no estádeterminado, puede variar; resulta lo mismo para su cuarto vértice. ¿Cómo puedevariar?

•Trátelo experimentalmente si lo desea. Trace otros cuadrados, tres de cuyosvértices se hallen sobre el perímetro del mismo modo que los dos cuadrados yadibujados en la figura.

•Dibújelos pequeños y grandes. ¿Cuál le parece ser el lugar geométrico delcuarto vértice? ¿Cómo puede variar?

El profesor ha llevado al alumno muy cerca de la idea de la solución. Agrega Polya,que si el alumno es capaz de adivinar que el lugar geométrico del cuarto vértice esuna recta, habrá resuelto el problema.

Primera Situación-problema.

A manera de ejemplo, se plantea el problema de construir un triángulo equilátero inscrito en un cuadrado dado, de tal forma que tengan un vértice en común.

Empleando la estrategia estudiada anteriormente, se construye el cuadrado AMPQ y después un triángulo equilátero ABC, debilitando las condiciones iniciales del problema, es decir, se construye de tal forma que el vértice A sea común al cuadrado dado, además que el vértice B esté sobre un lado del cuadrado pero que el vértice C no pertenezca a él; por lo tanto al desplazar el vértice B sobre el perímetro del cuadrado se debe determinar el lugar geométrico descrito por el vértice C (ver figura 3).

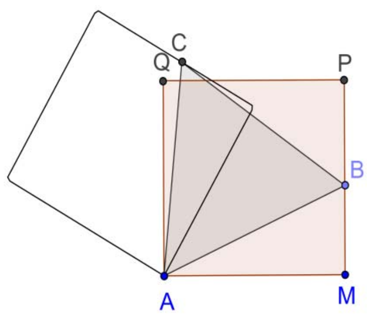


Fig. 3. Lugar geométrico del punto C con respecto al punto B

Si Geogebra reconociera el punto de intersección del lugar geométrico y el lado $\overline{QP}$ del cuadrado y lo nombramos como C’, entonces los puntos A y C´ como vértices, se podría construir el triángulo equilátero AB’C’ (B’ ∈ $\overline{PM}$), solucionando así el problema propuesto (ver figura 4):

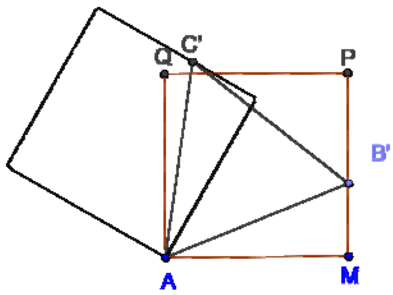


Fig. 4. TriánguloAB'C' inscrito en el cuadrado AMPQ

Atendiendo a las directrices planteadas en los objetivos del taller, debe caracterizarse dicho lugar geométrico y luego este debe ser reconstruido; después de algunas conjeturas y mediciones pertinentes, se "descubre" cuál es la transformación involucrada en la resolución del problema; esta corresponde a una rotación del cuadrado AMPQ con centro en A y ángulo de rotación 60°.

Segunda situación-problema

Se plantea el problema de construir un triángulo equilátero a partir de tres circunferencias concéntricas dadas, de tal forma que cada vértice del triángulo este sobre una de las circunferencias.

Tercera situación-problema

Para un punto A de una circunferencia y un punto exterior B, sea P el punto de intersección de la recta tangente a la circunferencia por el punto A y de la recta perpendicular a la tangente anterior trazada por el punto B.

a) Hallar el lugar geométrico del punto P cuando A recorre la circunferencia.

b) Determinar el lugar geométrico que resultará cuando B sea un punto situado en la circunferencia, o cuando sea el centro de la circunferencia.

## Referencias bibliográficas


- Agustín, C. y Inmaculada L, (2009). Trazados de lugares geométricos, Geogebra mucho más que geometría dinámica, Capítulo 3, pp. 71-84. México: Alfaomega.

- Hermmerling, E. (2002). Lugares geométricos, En: *Geometría elemental*. Ciudad de México, México: Limusa, Noriega Editores.

- Ministerio De Educación Nacional, (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Santafé de Bogotá. Colombia: Enlace Editores.

- Polya, G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad de México: Editorial Trillas.