UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA CONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE UM MODELO PLANO PARA A GEOMETRIA ELÍPTICA

Valdeni Soliani Franco – Luana Paula Goulart de Menezes
vsfranco@uem.br – ra61976@uem.br
Universidade Estadual de Maringá - Brasil

Modalidade: Minicurso.
Nivel educativo: Terciario
Palavras chave: Educação Matemática, Geometrias não Euclidianas, Geometria Elíptica, Modelos Planos.

Resumo

A Geometria Euclidiana e a Geometria Elíptica diferem não somente em seus conteúdos, mas também do modo em que foram construídas. Enquanto a primeira foi desenvolvida a partir da percepção tátil e visual e posteriormente axiomatizada, a outra foi desenvolvida a partir da axiomatização e somente posteriormente é que foram desenvolvidos modelos matemáticos para a percepção tátil e visual dessa geometria. Após a construção da Geometria Hiperbólica, desenvolvida principalmente por Bolyai e Lobachevsk, Riemann, com a finalidade de obter habilitação para ser professor na Universidade de Göttingen, desenvolveu a Geometria Esférica. Uma vez que na Superfície Esférica cada ponto determina um único ponto antípoda, e cada figura é assim duplicada nos antípodas, Felix Klein percebeu que seria possível, abstratamente, a identificação de cada par de pontos antípodas, isto é, construir um modelo com um novo conceito de ponto, de reta e de plano, após esta identificação. Dessa forma Klein construiu o que denominamos de Geometria Elíptica. Klein construiu também um modelo plano para tal geometria. Neste minicurso, será feita a construção de ferramentas que possibilitam construir esse modelo e explorar vários resultados que são pertinentes à Geometria Elíptica.

Introdução

Os trabalhos de Saccheri (1667-1733) e Lambert (1728-1777), de origem puramente lógica, indicavam a possibilidade de uma geometria alternativa à Geometria Euclidiana, mas pela forte influência de filósofos e pensadores de suas épocas, não levaram adiante os seus estudos.

Problemas práticos, tais como a determinação de geodésicas de superfícies suaves, levaram Gauss (1777-1855) a estabelecer novos conceitos, como a curvatura de uma superfície em um de seus pontos, que ao serem estudados levantavam também a possibilidade de comportamentos distintos dos Euclidianos. Apesar dessas evidências, Gauss nada publicou sobre essa possibilidade.

Alguns matemáticos, contemporâneos de Gauss, desenvolveram uma teoria similar à Geometria Euclidiana, trocando o Postulado das Paralelas por uma de suas negações. Podemos negá-lo escrevendo “Existem uma reta r e um ponto P não pertencente a r, tal que por P passam duas retas paralelas a r” ou “Existe uma reta r e um ponto P, tal que por P não passa reta paralela a r”. A primeira forma descrita deu origem à Geometria Hiperbólica, creditada a Lobachevski (1793-1856) e Bolyai (1802-1860), e a segunda forma descrita, juntamente com a substituição de outros postulados de Euclides deu origem a Geometria Esférica desenvolvida inicialmente por Riemann (1826-1866) e que proporcionou a construção por Klein (1849-1925) da Geometria Elíptica.

O objetivo central do minicurso será a construção de um modelo plano para a Geometria Elíptica, por intermédio da utilização do software livre, geométrico e dinâmico GeoGebra, com a finalidade de explorar alguns dos seus conceitos e resultados.

Fundamentação Teórica

O estudo da Geometria Elíptica foi baseado em COXETER (1968) e GREENBERG (1974). A análise das figuras construídas por meio do GeoGebra levaram a descoberta de resultados bastante interessantes e não encontrados na literatura pesquisada.

Resultados

Neste artigo, serão evidenciados os resultados que envolvem a Geometria Esférica e principalmente a Geometria Elíptica, já que esta última foi o foco central do estudo. Para isso é necessário descrever o início da Geometria Esférica.

Na Geometria Euclidiana, dado um ponto *P* que não está em uma reta *r*, existe exatamente uma reta paralela a reta *r* que contém o ponto *P*, sendo isso, uma das versões do conhecido postulado das paralelas. Na Geometria Hiperbólica, existe mais de uma reta paralela a *r* passando pelo ponto *P*. Em algumas geometrias, assume-se que não existe reta paralela a *r* que contém o ponto *P*. Uma dessas geometrias é a Geometria Esférica, que foi desenvolvida por Riemann (1826-1866), sendo a segunda Geometria não Euclidiana reconhecida como tal.

Riemann supôs que a hipótese de Saccheri do ângulo obtuso era válida, e alterou outros postulados dos Elementos de Euclides, a saber:

1- Quaisquer dois pontos determina ao menos uma reta;
2- Uma reta é ilimitada;

3- Quaisquer duas retas em um plano se encontra. COXETER (1968, p.11).

Essa tese de Riemann foi fruto de um trabalho de trinta meses, cuja finalidade era obter habilitação para ser professor na Universidade de Göttingen. A prova consistia de um trabalho de pesquisa inédito e de três conferências, uma das quais era escolhida pelo corpo docente, permitindo ao candidato indicar suas linhas de estudo na Instituição.

Se Gauss fosse acusado por ter retardado o surgimento da Geometria Hiperbólica, isso ficaria superado por ter sido dele (como chefe de departamento) o pedido para Riemann discorrer sobre o último tema.

No trabalho apresentado por Riemman, as retas seriam as geodésicas de uma superfície esférica, que no caso seria o plano dessa geometria. Como a reta é ilimitada, mas tem comprimento finito, ela pode ser representada como uma circunferência. As circunferências máximas, interpretadas como retas, nos fornecem um modelo para as retas finitas no plano finito – a Superfície Esférica.

Para se ter uma noção básica da superfície esférica descreve-se a seguir o modelo estudado para essa geometria.

Definição 1: Quando um plano π passa pelo centro de uma superfície esférica S^2 (superfície esférica de raio unitário), ele é denominado *plano diametral* e a circunferência $C = \pi \cap S^2$ é denominada *circunferência máxima.*

Definição 2: *Eixos* são retas euclidianas que passam pelo centro da esfera. *Eixo polar* é uma reta euclidiana que contém o centro da esfera e é perpendicular ao plano que determina uma reta *n* de S^2.

Definição 3: *Pontos antípodas* são os pontos de interseção do plano esférico com um eixo.

Observe na figura 1, que o que se denomina reta em S^2 é uma circunferência máxima.

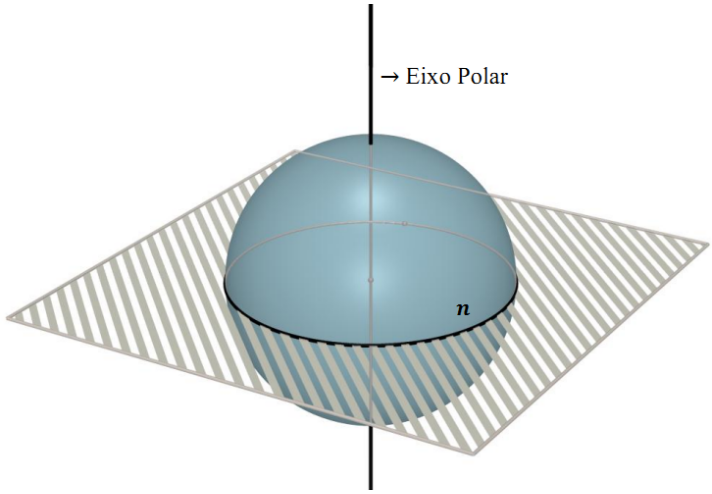

Figura 1

Fonte: autores

Esta é uma diferença básica entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica, pois a representação de uma reta nesta geometria é bastante diferente da representação de uma reta que se está acostumado, e que é basicamente da Geometria Euclidiana.

A partir desse ponto é necessário reformular os postulados dos Elementos de Euclides, pois, por exemplo, para se dividir uma reta não basta apenas um ponto (no modelo da Figura 1, fica claro isso), mas sim dois pontos.

Na Superfície Esférica a cada ponto corresponde um único ponto antípoda, e cada figura é assim, duplicada por meio desses pontos antípodas. Klein percebeu que seria possível, abstratamente, a identificação de cada par de pontos antípodas, isto é, construir um modelo com um novo conceito de ponto. Nesse modelo "ponto" seria um par de pontos antípodas na esfera. Com essa identificação, a reta nesse modelo, não seria mais a circunferência máxima, mas sim, a curva obtida por meio de uma circunferência máxima com os pontos antípodas identificados.

Ao fazer essas identificações descobriu-se uma surpreendente propriedade: uma reta já não divide o plano em dois lados, pois você pode "pular" de uma circunferência máxima, passando por um ponto dado que agora é igual ao ponto antípoda que costumava ser do outro lado, na superfície esférica. Se cortarmos uma tira a partir deste plano, será parecido com uma faixa de Möbius, que tem apenas um lado (Figura 2).

Figura 2
Fonte: GREENBERG (1974)

Já o “plano”, é a superfície obtida mediante a identificação dos pontos antípodas da superfície da esfera, cada um, com um único ponto.

Note, portanto, que nesse modelo construído por Klein, quaisquer dois pontos determina uma única reta, e assim, temos o primeiro postulado de Euclides re-estabelecido. Quanto ao segundo postulado de Euclides, ele não é verdadeiro, mesmo nesse novo modelo, pois apesar da reta continuar a ser ilimitada, ela tem comprimento finito, na verdade, metade do comprimento da circunferência máxima.

Foi a essa modificação feita na Geometria da Superfície Esférica que Klein deu o nome de Geometria Elíptica. Como se poderia esperar partir deste modelo é um teorema na Geometria Elíptica que as retas têm tamanho finito. Além disso, todas as retas perpendiculares a uma reta *r* não são paralelas umas às outras, mas são concorrentes.

Os axiomas da Geometria Elíptica de incidência, congruência e continuidade, consistem nos mesmos axiomas da Geometria Euclidiana, sem o quinto postulado (com as novas definições do segmento, triângulo etc.).

Um modelo em Geometria Plana Elíptica (devido a Klein) lembra o modelo de Poincaré para Geometria Hiperbólica. Neste modelo o plano é um círculo unitário (só que aqui estão incluídos os pontos da circunferência), os “pontos” são os pontos euclidianos dentro do círculo unitário, bem como os pares de pontos antípodas no círculo que são identificados e as “retas” são ou diâmetros do círculo unitário ou arcos das circunferências euclidianas que interceptam a circunferência do círculo unitário nas extremidades de um diâmetro, conforme Figura 3.

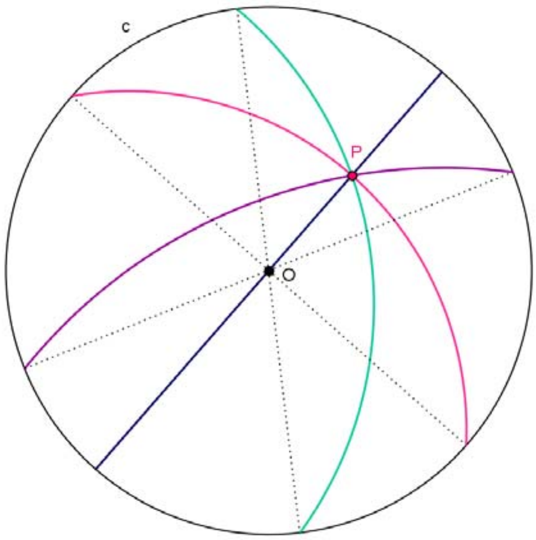

Figura 3

Fonte: autores

Para a construção desse modelo no GeoGebra foi necessário elaborar um teorema e demonstrá-lo.

O principal resultado obtido foi o teorema descrito a seguir:

Teorema 1: Seja C uma circunferência qualquer de centro O e P um ponto no seu interior. O lugar geométrico dos centros das circunferências que passa pelo ponto P e determina em C um diâmetro é a reta r obtida como segue:

"Trace a reta s determinada por P e O e a reta m perpendicular a s pelo ponto O, cuja interseção com C são os pontos A e B. A mediatriz do segmento AP determina em s um ponto P'. A reta r é a única reta perpendicular a s que contêm o ponto P'."

A aplicação desse resultado foi fundamental na construção do modelo de Klein para a Geometria Elíptica, descrito acima.

Para a demonstração deste teorema, foi necessário a demonstração de outro resultado, que também é bastante interessante, e por não ter encontrado similar nas pesquisas realizadas, enunciamos na sequência.

Lema: Dados um triângulo qualquer PP'D e um triângulo OP'D, tais que O é um ponto entre P e P', o lado PP' é menor que DP e o lado OP' menor que o lado OD. Além disso, se a seguinte igualdade é verificada:

$$\overline{DP}^2 - \overline{PP'}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OP'}^2 \qquad (1)$$

Então, os triângulos PP’D e OP’D (ver figura 4) são retângulos em P’.

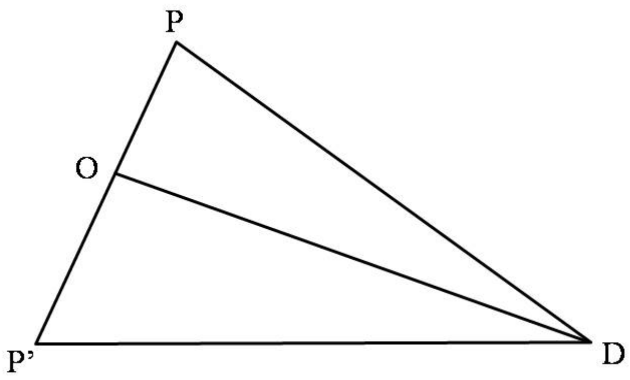

Figura 4

Apenas para deixar mais claro, o tipo de estudo que foi feito após a construção do modelo plano de Klein, para a Geometria Elíptica, enunciamos um dos teoremas estudados utilizando o modelo.

Teorema 2: Dados P e Q pontos distintos. Então existe uma única reta contendo P e Q.

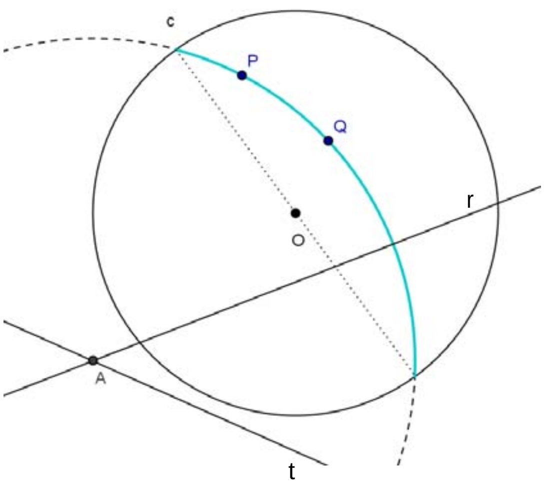

Figura 5

Fonte: autores

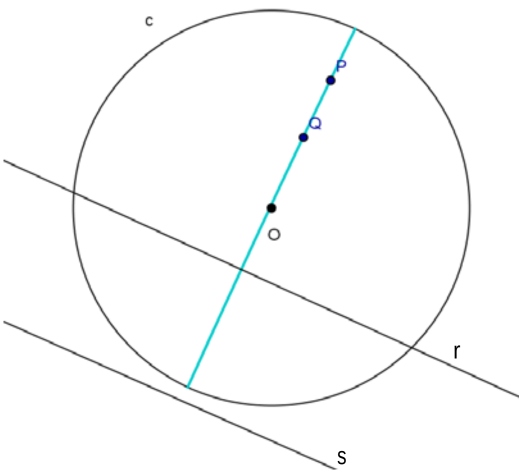

Figura 6

Fonte: autores

É evidente que todos estes resultados foram demonstrados por meio do método hipotético dedutivo, mas não foram apresentados aqui, pelo espaço necessário para essas demonstrações.

Conclusões

O ponto central do minicurso é o estudo do modelo plano sugerido por Félix Klein para a Geometria Elíptica.

Durante a realização do minicurso, será feito a construção desse modelo plano, por meio do software livre GeoGebra. Não foi encontrado na literatura pesquisada o Teorema 1, enunciado acima, mas ele é o principal resultado que auxilia a construção desse modelo no GeoGebra. Após essa construção, é possível verificar a validade de diversos axiomas da Geometria Elíptica em tal modelo, além de observar alguns dos principais resultados válidos nessa geometria.

Referencias bibliográficas

Coxeter, H. S. M. (1968). *Non-Euclidean Geometry*. 5ª ed. Toronto: University of Toronto Press.

Greenberg, M. J. (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. 2ª ed. New York: W. H. Freeman and Company.