LOS APPLETS GEOGEBRA EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

Mercedes Villalba – Adriana López
mercedes.villalba3@gmail.com – lopezadriana36@gmail.com
Instituto Profesores Artigas e Institutos Normales Montevideo - Uruguay

Modalidad: Taller
Nivel educativo: Primaria (6 a 11 años)
Palabras clave: probabilidad, simuladores, frecuencia, incertidumbre

Resumen

Este taller propone trabajar el enfoque frecuencial de la probabilidad y para ello utilizamos GeoGebra como una herramienta con la que los aprendices pueden experimentar matemáticamente. Para entender el comportamiento de "los grandes números" es necesario apreciar qué sucede con los fenómenos aleatorios cuando se repiten un número muy grande de veces y, como esto es prácticamente imposible en una clase, los simuladores se constituyen en el recurso didáctico por excelencia: en tanto variable didáctica modifica significativamente los procesos cognitivos asociados al experimento aleatorio.

La selección de applets con que trabajaremos con los participantes del taller permitirá:

- *relacionar el cálculo de la probabilidad a priori con la probabilidad a posteriori de la realización del experimento aleatorio*
- *identificar las características de un experimento aleatorio*
- *determinar el espacio muestral*
- *clasificar los tipos de sucesos*
- *vincular Probabilidad y Estadística*

Utilizamos GeoGebra para la modificación de un applet publicado en el repositorio oficial de construcciones y recursos relacionados con este software: http://www.geogebratube.org/student/m16503, a partir del cual construimos una secuencia de ítems didácticos para que los estudiantes exploren comportamientos aleatorios en la simulación presentada, visualicen relaciones entre objetos, realicen conexiones conceptuales y experimenten con las matemáticas.

Destacamos el valor de la licencia Creative Commons que nos permite utilizar, modificar y poner a disposición la producción intelectual en un ámbito de construcción colaborativa.

Un ítem didáctico está formado por una guía, una serie de cuestiones que invitan a la exploración y dirigen el uso del applet.

Iniciamos con una breve introducción al contexto situacional en que está realizada la propuesta, unas instrucciones de uso y una serie de preguntas previas y posteriores a la simulación.

Al crear un ítem didáctico estamos creando un pequeño "entorno de aprendizaje", a veces llamado "micromundo". Es importante adaptar los ítems didácticos a nuestra realidad educativa, considerando el nivel y experiencias previas de nuestros alumnos.

Item didáctico 1

Simulación de tiro al blanco - 1

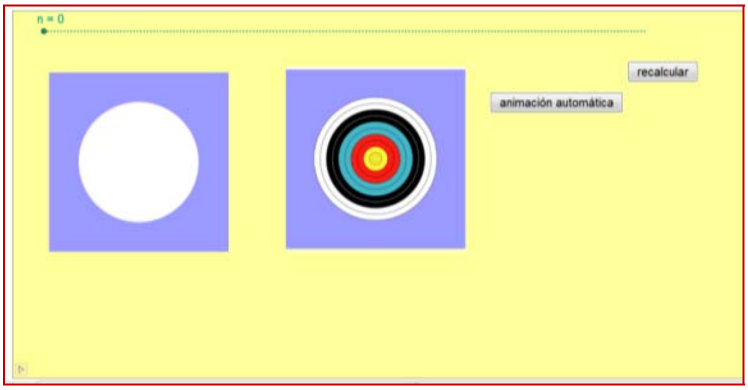
El tiro con arco es actualmente una práctica deportiva en la que se utiliza un arco para disparar flechas. Su origen hay que buscarlo en el uso de esta arma como instrumento de caza y como instrumento bélico. Con la aparición de las armas de fuego quedó obsoleto como instrumento "profesional" de uso general y su utilización quedó relegada a un uso deportivo y de ocio.

En el Tiro con arco olímpico, el objetivo es acertar lo más cerca del centro de la diana para obtener el máximo número de puntos. Los blancos en interiores están a distancias de 18 y 25 m. Los exteriores varían desde 30 hasta 90 m. La competición se divide en finales de 3 y 6 flechas. Los arqueros tienen un tiempo limitado para disparar sus flechas, puntúan cada final sumando los puntos de cada flecha y las que están tocando una línea tienen puntuación mayor.

Abre este enlace en una nueva ventana:

http://vamosticos.terra.co.cr/juegos-olimpicos/londres-2012/videos/watch/oh-hyek-de-corea-se-lleva-el-oro-en-el-tiro-con-arco-412400

¿Por qué crees que estos competidores olímpicos aciertan en el centro de la diana? ¿Qué piensas que pasaría si cualquier persona intentara tirar al blanco?



Inspirados en este deporte, unos chicos empezaron a jugar al tiro de dardos para lo cual diseñaron un objetivo de tiro al blanco con forma de cuadrado de lado 6 y una diana circular de radio 2.
En sus primeras jugadas no tenían ninguna estrategia y pensaron: si un dardo da en el blanco ¿Cuál es la probabilidad que dé en la diana? Anima la simulación y da tu respuesta.

Esta contextualización responde a la corriente conocida internacionalmente como Educación Matemática Realista, fundada por Hans Freudenthal, cuya idea central es que la matemática debe ser conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano. Entre sus principios mencionamos el uso de modelos (materiales, esquemas, diagramas y símbolos) como herramientas para simbolizar y organizar estos contextos y situaciones, la fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática, el papel clave del docente como guía.

Los ítems didácticos hacen primar las competencias generales sobre los conocimientos puntuales ofreciendo una visión más amplia de las conexiones entre los diferentes contenidos que habitualmente vemos estructurados en ramificaciones de temas y apartados. De este modo, conceptos que antes parecían islas independientes, asociados a unidades concretas, aparecen conectados por numerosos puentes.

El abordaje matemático y didáctico de la probabilidad es muy complejo pues se trata de sucesos aleatorios reales que la matemática modeliza para ciertas circunstancias que no siempre pueden ser contempladas o cuya complejidad trasciende su tratamiento a nivel escolar. Sin embargo, el conocimiento social puede aportar a la pertinencia o no de aplicar fórmulas y modelos y qué restricciones considerar. Para el caso de acertar en un círculo no solo importa la longitud de su diámetro sino la frecuentación con el tiro al blanco y el aprendizaje de estrategias y técnicas. De ahí la necesidad de diferenciar las condiciones en que se realiza el experimento.

Es indudable el beneficio que reportan los simuladores para realizar un gran número de experimentos. Se llama simulación a la sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente que permite obtener estimaciones de probabilidades de sucesos asociados al experimento en cuestión. Tiene la ventaja de realizar un número muy importante de experimentos en muy corto tiempo. En nuestro applet, al poner en funcionamiento el simulador, aparece un punto por cada tirada que da en el blanco - dentro y fuera de la diana – y un texto que registra la cantidad correspondiente a cada región, así como la frecuencia relativa.

Item didáctico 2

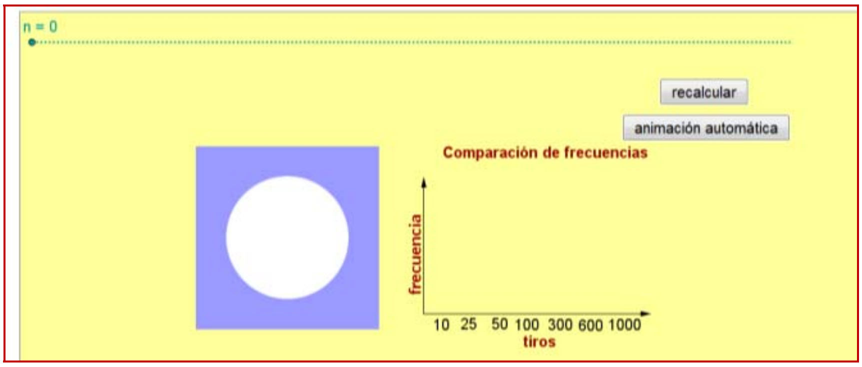
Simulación de tiro al blanco - 2

Relaciona la cantidad de tiros que dan en la diana con los valores representados en el gráfico.

Puedes detener y reiniciar las tiradas con los controles "pausa" y "play": para ayudarte a entender las relaciones numéricas detente en las tiradas 10, 100, 300, 1000 Simula varias veces las 1000 tiradas.

¿Cuál es el comportamiento de la poligonal a medida que aumenta el número de tiradas?

¿Cómo puedes asociar dicho comportamiento con la probabilidad de acertar en la diana?



Para poder contestar correctamente a las preguntas, los alumnos deben poder observar y manipular la construcción en todo momento, de acuerdo a las consignas y preguntas formuladas, por eso construimos la secuencia de ítems de manera que tengan la información suficiente y necesaria y pongan en juego lo elaborado previamente.

A los elementos del applet anterior, agregamos un par de ejes ortogonales en cuyo eje horizontal se ubica el número que representa la cantidad de tiros realizados, de manera que, al poner en funcionamiento el simulador, además de los puntos y el texto, los resultados que se van obteniendo se traducen en la graficación de los puntos correspondientes a las frecuencias relativas de los valores de abscisa.

Incluimos las instrucciones mínimas para indicar el uso de los botones de “play” y pausa, así como el significado de los números del eje de abscisas, para que la manipulación de la construcción sea eficiente.

Es indudable que aquí la forma de organizar los datos obtenidos refiere a la Estadística. Aparece el concepto de frecuencia relativa, que en este caso del tiro al blanco representa la razón entre el número de veces que el tiro dio en la diana y el total de tiradas registradas.

Analicemos algunos datos obtenidos del gráfico, por ejemplo:

Supongamos que en una experiencia aparece 0,4 como valor de la frecuencia relativa habiendo tirado 10 veces. ¿Cuántos tiros dieron en la diana?

Una fracción que representa esa cantidad es 4/10 por lo cual 4 de los 10 tiros dieron en el círculo.

Si, en 25 tiradas la frecuencia relativa es de 0,36 ¿Cuántos tiros dieron en la diana?

36/ 100 equivale a 9/25 por lo cual 9 es el número de los tiros que acertaron.

Aquí vemos que para poder resolver la situación propuesta hay que relacionar la Probabilidad con la Estadística y con las fracciones equivalentes. No se concibe una Matemática que aísle los temas y los trabaje como si fueran piezas de un puzle, sino que se piensa una enseñanza en la cual se establezcan vinculaciones entre los distintos conceptos involucrados.

Otro punto a tener en cuenta es que aparece el número como expresión de una probabilidad y ese número está comprendido entre 0 y 1: 0 asignado a los sucesos imposibles y 1 a los sucesos seguros.

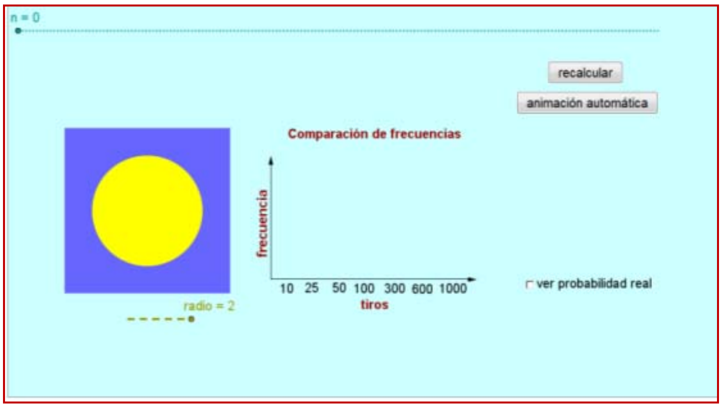
En cualquier experimento aleatorio, en relación con un fenómeno estocástico, es imposible predecir el resultado de una realización del experimento. Si se repite varias veces en condiciones análogas, se obtienen, en general, resultados distintos para los cuales no se aprecia ninguna relación causa-efecto. Sin embargo, la repetición del experimento un número grande de veces produce una estabilización de las frecuencias relativas de los distintos resultados en torno de ciertos valores. Una ley que intenta explicar la aparición de tales resultados necesita basarse en el azar o incertidumbre. Esta ley es la Probabilidad.

Por lo tanto la probabilidad es el valor al cual se aproxima la frecuencia de ocurrencia del suceso estudiado cuando el número de experimentos es muy grande y los mismos se realizan siempre en iguales condiciones e independientemente de la historia previa. Esta es la *interpretación frecuencial de la probabilidad.*

Item didáctico 3

Simulación de tiro al blanco - 3

1- Tilda la opción "ver probabilidad real" e interpreta lo que aparece en el gráfico cuando simulas las tiradas.
2- Saca tus conclusiones a partir de la experiencia realizada.



3- Ahora anticipa cómo varía la probabilidad de "dar en la diana" si el radio del círculo mide la mitad (1 u)
4- En el caso de una competencia este nuevo círculo representa la región central de la diana a la que se adjudica mayor puntaje ¿por qué?
5- Después de dar tu respuesta puedes verificarla modificando el radio (usa el deslizador correspondiente al radio) y simulando las tiradas nuevamente.
6- ¿Cómo justificas la relación entre los radios y entre las probabilidades de acierto en cada diana?

Los puntos 1 y 2 permiten constatar la imprevisibilidad de los resultados obtenidos en cada tirada, la variabilidad de las pequeñas muestras y la convergencia gradual de esta probabilidad- que surge de la experimentación- con la probabilidad teórica.

Ley fundamental del azar: al repetir muchas veces un experimento aleatorio la frecuencia relativa de cada suceso tiende a su probabilidad. Es la *ley de los grandes números.*

En el tiro al blanco, si analizamos qué sucede con los dos gráficos - el que surge de la experimentación y el que muestra la probabilidad teórica - después de un número muy grande de tiradas, el primero tiende al segundo. Esto sería difícil de constatar si tuviéramos que hacer la experimentación con los objetos reales, sean dados, ruletas o tiro al blanco. Sin embargo, descubrir la ley de los grandes números utilizando simuladores es posible.

Una forma de calcular la probabilidad es la interpretación clásica (de Laplace) de la probabilidad. Numerosos experimentos aleatorios admiten esta interpretación, que es una buena regla de cálculo de probabilidades de sucesos, cuando el espacio muestral es finito y los sucesos son equiprobables (o sea tienen igual probabilidad de ocurrir): En ese caso la probabilidad de un suceso es el cociente de los casos favorables entre los casos posibles.

La “probabilidad teórica” del suceso “acertar en la diana de 2u de radio es 0,35 y se representa en el gráfico por una semirrecta, al tildar “probabilidad real”. ¿De dónde surge este número?

Aquí tendremos que vincular la Probabilidad con la medida de las superficies que están involucradas. Si calculamos el área del cuadrado, da como resultado 36 u^2, siendo u la unidad de medida que se utiliza. Si calculamos el área de la diana que está representada con un círculo de 2 u de radio, da aproximadamente 12,56 u^2. Aquí aparece involucrado el primer número irracional que ven los escolares - “pi”- por lo cual el área será un número aproximado, ya que se utiliza una aproximación de ese número irracional para calcularla. La razón entre los valores de las dos áreas es aproximadamente 0,35.

En este caso se trabaja con superficies y no con conjuntos finitos por lo cual sería impensable trabajar con Laplace, donde el espacio muestral es finito y los sucesos son equiprobables.

Otro punto interesante es resolver qué ocurre cuando reduzco el radio a la mitad, por lo cual en vez de ser 2, el radio será 1. Es de suponer que, para varios alumnos, la probabilidad del suceso será también la mitad. Primero realizan una conjetura y luego observan los valores en la gráfica y/o calculan la probabilidad y la contrastan con su conjetura. ¿Se cumplió? ¿No se cumplió? ¿Por qué? Lo interesante de esta propuesta es que el alumno se verá forzado a explicar lo que verifica en el simulador al realizar el cambio en la diana. El simulador le dará el número que está buscando, la probabilidad del suceso con las nuevas medidas: él deberá comparar y buscar una explicación a lo que constata. Aquí lo interesante es descubrir que no es una situación de proporcionalidad, por lo cual vincularemos la probabilidad a la proporcionalidad.

Trabajar en Matemática significa que el alumno debe experimentar, realizar conjeturas, tratar de demostrarlas, buscar explicaciones cuando sus conjeturas no son correctas, relacionar los distintos conceptos que están involucrados. En suma, el alumno está "fabricando" Matemática: aunque los conocimientos ya formen parte del saber disciplinar, no forman parte de sus saberes, por lo cual es necesario este desafío intelectual. Esto es lo que debemos tener en cuenta cuando trabajamos utilizando (o no) software educativo.

Referencias bibliográficas

- Batanero, C., Godino, J. (2002). *Estocástica para maestros*. http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf
- Bressan, A., Solkower, B. *Educación Matemática Realista*. *Ideas y experiencias en torno a la capacitación de docentes.* http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/conferencia_salto_uruguay.pdf
- Canavos, G. (1988): *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. México: McGraw-Hill.
- Durá, J., López, J., (1992). *Fundamentos de estadística: Estadística descriptiva y modelos probabilísticos para la inferencia*. España: Ariel.
- Godino, J., Batanero, M., Cañizares, M. (1996). *Azar y probabilidad. Fundamentos teóricos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.
- ITE. Ministerio de Educación España. *Curso GeoGebra en la Educación Primaria*. http://www.geogebra.es/cvg_primaria/index.html