

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE DEFINIÇÕES E TEOREMAS: O CASO DA ANÁLISE REAL

Francisco Regis Vieira Alves – Hermínio Borges Neto
fregis@ifce.edu.br – herminio@multimeios.ufc.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE,
Universidade Federal do Ceará - UFC

Modalidad: Comunicacion

Nivel educativo: Universitário

Palabras clave: Interpretação geométrica, Definições e Teoremas, Análise Real, Geogebra.

Resumo

Reconhecidamente, a complexidade e a natureza dos conceitos em Análise Real proporcionam uma mudança de percepção, na transição dos estudos do Cálculo para a Análise Real. Por outro lado, registramos na própria História da Matemática, o esforço de figuras emblemáticas do passado, no sentido de transmitir/significar aos seus contemporâneos suas ideias matemáticas pertinentes às definições, propriedades e teoremas desta teoria. Deste modo, a tecnologia e, notadamente, o software Geogebra, pode proporcionar o entendimento e a descrição geométrico-dinâmica de definições e teoremas importantes, tais como: definição de valor de aderência de uma sequência, definição de imagem limitada/ilimitada, definição de existência de limites, definição de função côncava/convexa, definição de continuidade uniforme, definição de funções lipschitzianas, o teorema de Rolle, do Valor Médio, o teorema de Cauchy, Regra de L'Hopital, etc. Assim, com o arrimo do Geogebra, discutiremos situações e construções geométricas que podem proporcionar o entendimento de ideias fundamentais neste contexto de ensino.

1. Introdução

De modo irrefutável, a complexidade e o crescente formalismo dos conteúdos de *Análise Real* proporcionam, até mesmo para as mentes mais hábeis e talentosas, incompreensões e o choque entre ideias intuitivas, informais, que adquirimos acerca de determinados conceitos, mesmo antes de um treinamento formal, com ideias abstratas, generalizadoras, estruturais e inerentes a determinados conteúdos à teoria subjacente.

Com efeito, registramos na própria História da Matemática, situações em que o conhecimento intuitivo de matemáticos emblemáticos do passado, descrito, num momento inicial, por meio de gráficos e figuras, contrariou, *a posteriori*, o conhecimento formal, o qual, com respeito ao estabelecimento de definições e teoremas, exigiu séculos para sua evolução ao estágio atual do conhecimento matemático.

Assim, neste trabalho, trazemos algumas definições e teoremas relevantes em *Análise Real*, passíveis de interpretação com um aparato computacional. Tal expediente acentua o raciocínio heurístico no entendimento de situações recorrentes no contexto do ensino.

2. A interpretação geométrica dos conceitos de Análise ao longo da história

Numa literatura especializada (BURNS, 2004; DAVIDSON & DONSIG, 2010; DUGAC, 2003; EDWARDS, 1979; HAIRER & WANNER, 2008; PEDERSEN, 1980; STAHL, 1999), encontramos com relativa facilidade, no contexto da discussão em História da Matemática - HM, exemplos do esforço de matemáticos eminentes do passado, na tentativa de significar e transmitir suas ideias aos seus contemporâneos por intermédio de gráficos e/ou figuras que detinham importante valor heurístico.

Neste sentido, os autores Hairer & Wanner (2008) fornecem inúmeros exemplos de figuras e diagramas que foram utilizados como veículos para a transmissão e convencimento, por parte de seus conceptores, dos seus pares. Por exemplo, na figura 1, esses autores comentam os desenhos devidos ao Marques de *L'Hospital* (1696), presentes na obra intitulada *Analyse des infiniment petit*.

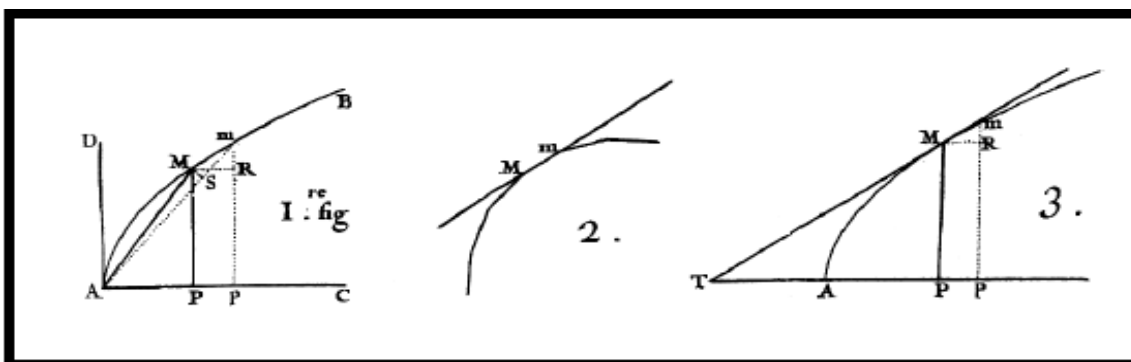


Figura 1: Hairer & Wanner (2008, p. 83) apresentam figuras (desenhos) produzidos por *L'Hospital*. Hairer & Wanner (2008, p. 83) explicam ainda que “Newton (1665) e Joh. Bernoulli (1691/1692) foram os primeiros a estudar o significado geométrico da segunda derivada.”. Na figura 2, do lado esquerdo, observamos a interpretação de gráficos de funções e o comportamento da segunda derivada. Do lado direito, destacamos um desenho atribuído, conforme Hairer & Wanner, ao matemático Joh. Bernoulli.

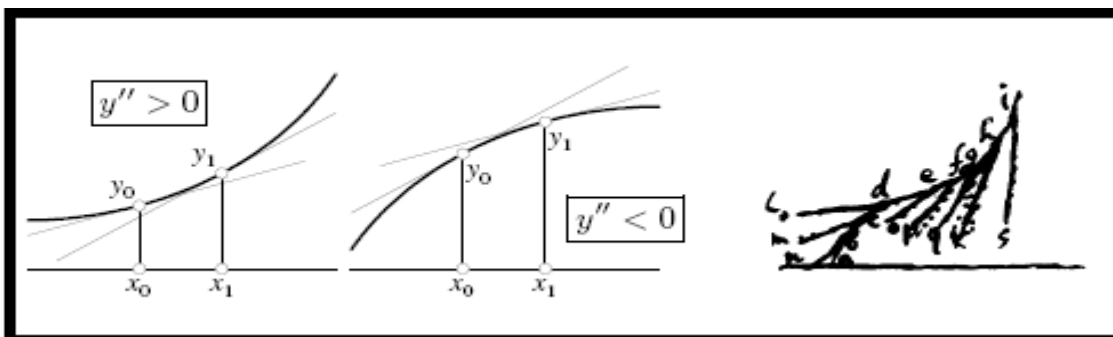


Figura 2: Hairer & Wanner (2008, p. 91) discutem o diagramas de Bernoulli. Hodiernamente, reconhecemos um dos apanágios da tecnologia, no sentido de ressignificar e descrever conceitos complexos e intrincados. Deste modo, na próxima

seção, exploramos as potencialidades do *software Geogebra*, com a intenção precípua de agregar, a um teorema ou definição formal, sua respectiva significação geométrica.

3. Exemplos de Definições matemáticas

Identificamos muitas mudanças (BERGÉ, 2006) pertinentes às exigências conceituais dos conceitos em *Análise Real* com respeito aos do Cálculo. Nesse sentido, registramos o aumento do rigor e da complexidade de definições formais envolvidas. Nossa primeira definição diz respeito à noção de função em uma variável real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com *imagem limitada*, nas vizinhanças de um ponto. Na figura 1, exibimos o gráfico de duas funções que possuem uma imagem limitada ($|f(x)| \leq k, \forall x \in \mathbb{R}$)(*) numa vizinhança (perfurada) da origem, ou seja, escrevemos de modo *standard* que $V_0(\delta) = (-\delta, \delta) - \{0\}$.

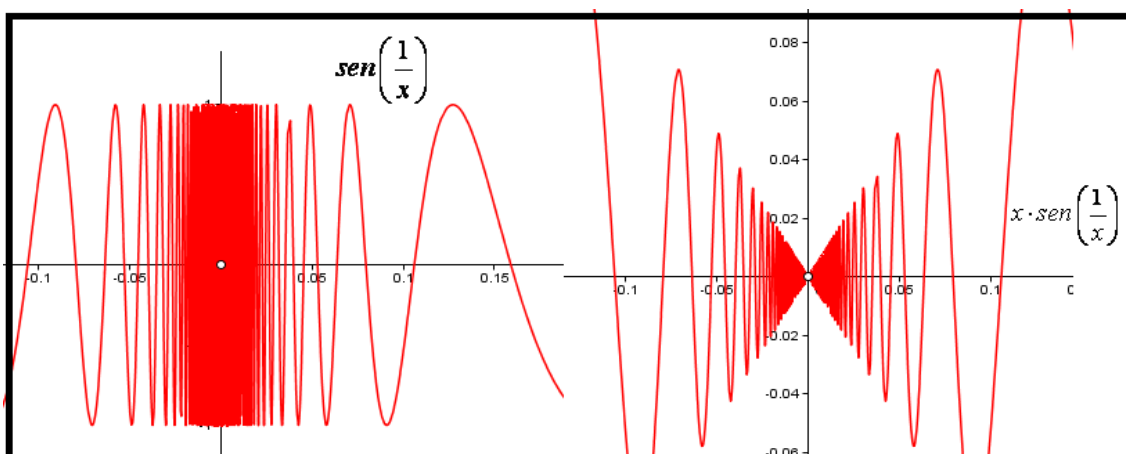


Figura 3: Imagem limitada de funções nas vizinhanças da origem V_0 na reta

Por outro lado, ao considerarmos a função $\frac{1}{x} \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ que, com o apoio do *Geogebra*, depreendemos possuir uma imagem ilimitada (não satisfaz a condição *), ou seja, não conseguimos nenhuma vizinhança $V_0(\delta)$, para qualquer $\delta > 0$, (um disco ou circunferência no plano) que contenha completamente o gráfico nesse trecho.

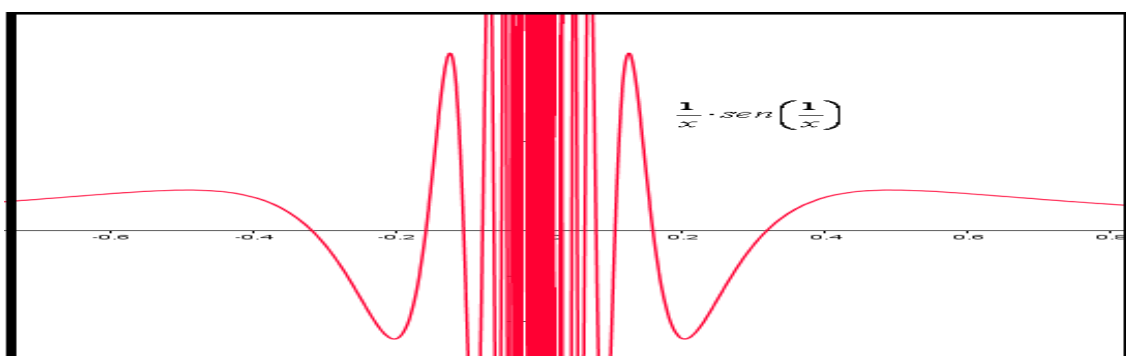


Figura 4: Descrição da definição de imagem ilimitada de uma função na origem

Com o recurso do *software*, conseguimos explorar a noção de convergência de uma sequência de números reais $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e de suas subsequências $(x_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}}$. De fato, consideremos a sequência $x_n = (-1)^{n-1} \cdot n / (n^2 + 1)$, conduzimos o aluno a perceber a existência de duas subsequências $(x_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}'}$ e $(x_{n_k'})_{n_k' \in \mathbb{N}''}$, que se aproximam para o mesmo *valor de aderência*, que neste caso é 0. Por outro lado, no caso da sequência $y_n = \text{sen}(n \cdot \pi / 2)$, o aluno deve suspeitar da existência de três *valores de aderência* correspondentes a três subsequências distintas. Neste caso, os valores de aderência destas subsequências estão no conjunto $\{-1, 0, 1\}$ que corresponde a tal comportamento.

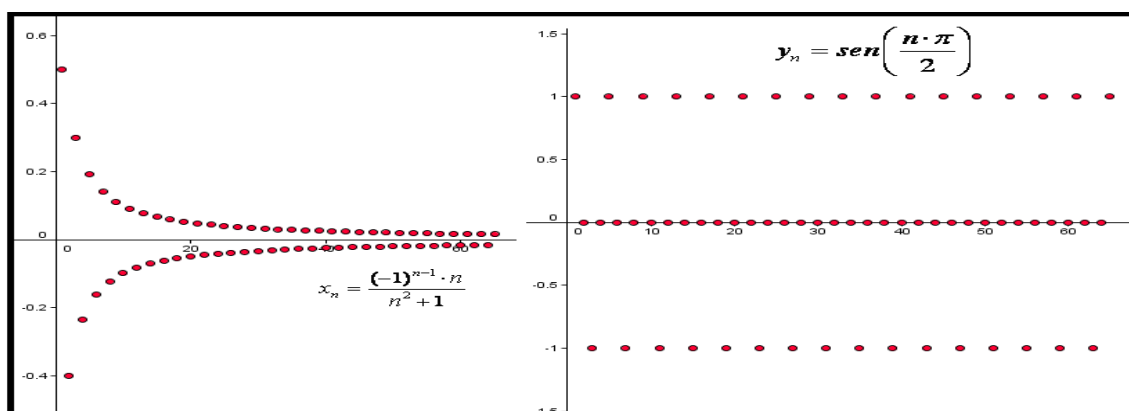


Figura 5: Descrição de valores de aderência de uma sequência com o Geogebra

No contexto de *Análise Real*, desenvolvemos o estudo de *funções côncavas* (para cima ou para baixo) e *estritamente côncavas* (para cima ou para baixo). A definição formal de concavidade de uma função $y = f(x)$, para cima, de modo estrito, pode ser descrito por $f(x) < l(x)$, onde $l(x)$ é uma reta que passa por dois pontos do gráfico de f , num intervalo (a, b) . Na fig. 6, divisamos a mudança de concavidade segundo a definição.

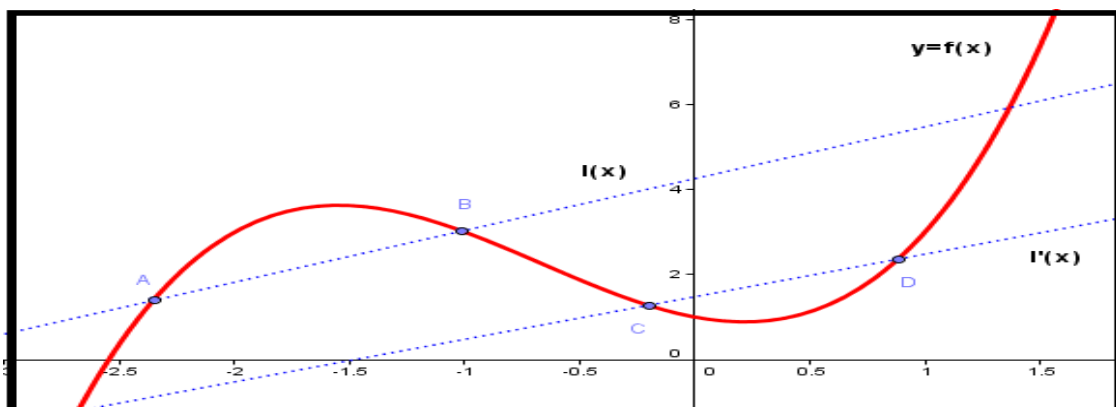


Figura 6: Descrição da definição de concavidade (estrta) de uma função

4. Exemplos de alguns teoremas em Análise Real

Vamos considerar uma situação extrema da necessidade do cálculo de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(\text{sen}(x) + \cos^3(x))}{(x^2 + 1)(x - 3)}$ ou $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\text{sen}(x) + \cos^3(x))}{(x^2 + 1)(x - 3)}$. Vale analisar o gráfico da figura

abaixo de modo local e global. Neste sentido, passamos a observar as funções

$$\frac{2x^2}{(x^2 + 1)(x - 3)}, \quad \frac{x^2(\text{sen}(x) + \cos^3(x))}{(x^2 + 1)(x - 3)} \quad \text{e} \quad \frac{-2x^2}{(x^2 + 1)(x - 3)}.$$

Na figura 7, para prever o comportamento do primeiro limite (não existe), necessitamos de uma análise global dos gráficos. Por outro lado, na inspeção do segundo limite (que tende a zero), carecemos, do mesmo modo, de uma análise local, nas vizinhanças da origem $V_0(\delta) = (-\delta, \delta) - \{0\}$.

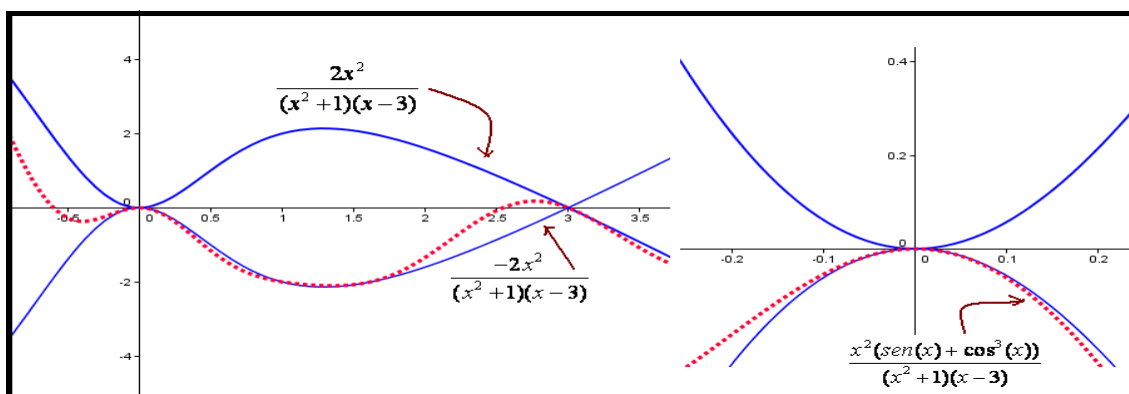


Figura 7: Descrição geométrica do teorema do sanduíche em Análise Real

Um teorema recorrentemente aplicado em *Análise Real* possibilita a descrição da existência de um limite, quando buscamos analisar o comportamento (local) do produto de duas funções $f(x) \cdot g(x)$, na condição em que $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e a outra função $g(x)$

cumpra a condição (*). Por exemplo, quando tomamos $f(x) = \begin{cases} x^2 |\cos(\pi/x)| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$,

de imediato, neste caso, concluímos que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 |\cos(\pi/x)| = 0$.

Este teorema admite inúmeras aplicações. Por exemplo, Bourchtein & Bourchtein

(2010, p. 302) consideram a seguinte função $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ e que possui

como derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(1/x) + \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$. Bourchtein & Bourchtein

(2010, p. 302-303) discutem um teorema que descreve condições suficientes para a existência de extremos locais. Neste caso, a função há pouco mencionada, admite um ponto crítico em $x = 0$ ($f'(0) = 0$).

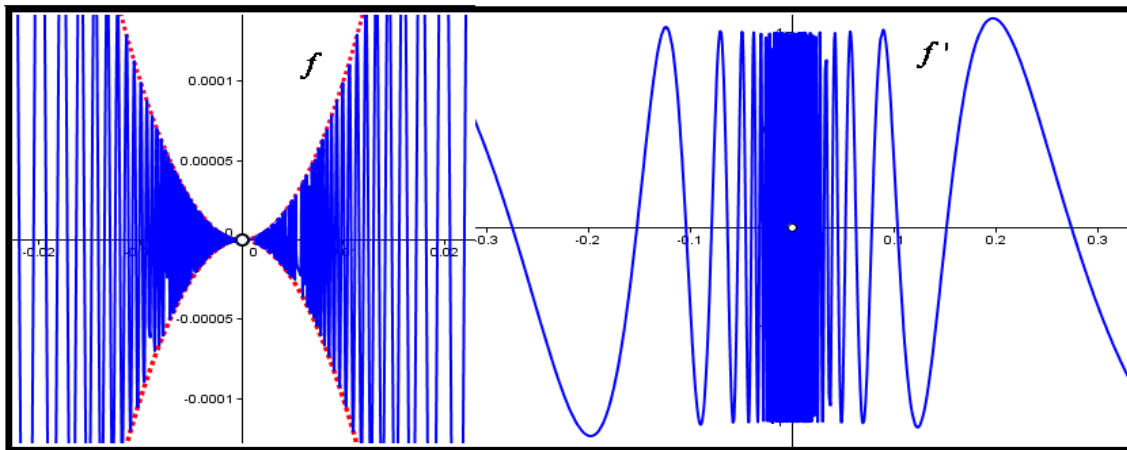


Figura 8: Função que não admite ponto extremo (máximo ou mínimo) na origem

Por outro lado, com base no gráfico da função f' apresenta valores positivos e negativos nas vizinhanças do ponto $(0,0)$. Bourchtein & Bourchtein (2010, p. 304) mencionam que esta função não preserva seu sinal em qualquer vizinhança unilateral do ponto $x=0$. Deste modo, concluem que $f(x)$ não possui nem máximo e nem mínimo local na origem, pois contamos apenas com condições necessárias para a identificação

de pontos extremos. Por fim, consideremos agora $g(x) = \begin{cases} x^2(2 + \cos(1/x)) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ e

sua derivada descrita por $g'(x) = \begin{cases} 4x + 2x \cos(1/x) + \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$. Nesse caso,

Bourchtein & Bourchtein (2010, p. 305) comentam este caso que envolve uma função que admite um ponto crítico na origem ($g'(0) = 0$), sua derivada muda de sinal nas vizinhanças da origem e, por outro lado, $g(x)$ admite mínimo nessa vizinhança. Deparamos aqui um contraexemplo para a identificação de pontos extremantes (fig. 9).

De fato, para divisarmos condições suficientes para tal, exige-se que uma função f seja uma função contínua numa vizinhança $x_0 \in V_{x_0} \subset \mathbb{R}$, onde x_0 é ponto crítico e, além disso, f' preserva seu sinal nesta vizinhança. Nestas condições, o teorema descreve, então, uma condição suficiente para identificação de um extremo local.

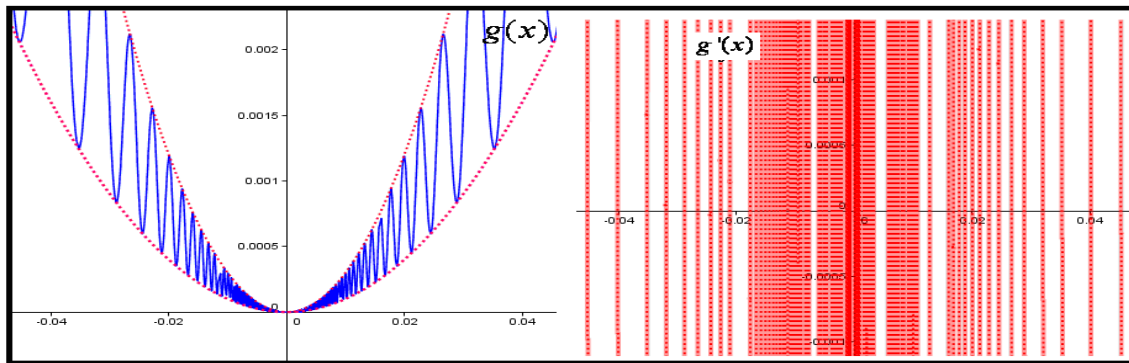


Figura 9: Um contraexemplo para teorema para identificação de pontos extremos

5. Considerações finais

Reconhecidamente, as dificuldades (BERGÉ, 2006) inerentes ao ensino/aprendizagem em *Análise Real* são relatadas em inúmeros estudos. Em nosso trabalho, evidenciamos a significação proporcionada pela exploração do *software Geogebra*, pertinente às definições e alguns teoremas essenciais nesta teoria, que adquirem um significado que ultrapassa os limites do formalismo e o olhar estrutural dos objetos matemáticos.

Neste sentido, demarcamos, inicialmente, na própria História da Matemática, o esforço dos matemáticos na transmissão de suas ideias apoiadas em diagramas, que detinham importante valor heurístico. Atualmente, registramos o repertório diversificado de possibilidades de exploração didática da tecnologia e, em nosso caso, o *software Geogebra* funciona como elemento impulsionador de uma reassignificação para definições formais e teoremas.

Assim, nesse trabalho, apresentamos alguns exemplos de situações atinentes às definições e teoremas que, com arrimo na tecnologia, admitem rápida descrição geométrica. Deste modo, buscamos estimular um olhar pormenorizado do aprendiz, no sentido de “enxergar” propriedades formais a partir da visualização dos gráficos que exibimos nas figuras ao longo deste texto. Tal abordagem pode proporcionar a evolução do significado conceitual agregado a cada situação, o que pode apoiar um entendimento posterior mais elaborado. Por outro lado, o simples domínio formal de inferências lógicas não garante uma compreensão efetiva dos conceitos aqui discutidos.

Referencias bibliográficas

Alves, F. R. V. (2012). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a *Análise Real* com o *Geogebra*. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, 1. 65-79, Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index>. Acessado em: 04 de Abril de 2012.

Bergé, Analia. (2006). Análisis institucional a propósito de la noción de complejidad del

conjunto de los números reales. *RELIME*, 9, 31-64. Disponível em: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2096730>. Acessado em: 16 de Agosto de 2012.

Bourchtein. Andrei & Bourchtein. Loudmila. (2010). *Análise Real: funções de uma variável real*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna.

Burns. R. P. (2004). *Numbers and functions: steps into analysis*. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Davidson. K. R. & Donsig. A. P. (2010). *Real Analysis and Application: theory and practice*. New York: Springer.

Dugac. Pierre. (2003). *Histoire de L'Analyse: autour de la notion de limite et de ses voisinages*. Paris: Vuibert.

Edwards, C. H. Jr. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer.

Guidorizzi, H. (2010). *Um curso de Cálculo*. v. 1, Rio de Janeiro: Ao Livro técnico.

Lima, E. L. (2010). *Curso de Análise*. v. 1, Rio de Janeiro: Projeto Euclides.

Lima, E. L. (2010). *Curso de Análise na Reta* (2011, 2 de fev.). Disponível em: <http://video.impa.br/index.php?page=programa-de-verao-2011-analise-na-reta>.

Acessado em: 10 de julho de 2012.

Hairer. E. & Wanner. G. (2008). *Analysis by its History*. New York: Springer.

Pedersen, K. M. (1980). Techniques of the Calculus: 1630-1660. In: Grattan-Guinness, I. (Eds.) *From the Calculus to the Set Theory: an introductory history*. Capítulo 1, pp 10-47.

Stahl. Saul. (1999). *Real Analysis: a historical approach*. New York: John and Wiley and Sons.

Zorich. V. A. (2004). *Mathematical Analysis I*. New York: Springer.