DISCUSSÃO SOBRE A NOÇÃO DE INTEGRAL IMPRÓPRIA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Francisco Regis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE

Modalidad: Comunicacion
Nivel educativo: Universitário
Palabras clave: Integral Imprópria, Geogebra, Teoremas, Convergência.

Resumo

Do ponto de vista histórico, o conceito de integral contemplou apenas a classe de funções limitadas, definidas em intervalos fechados do tipo $[a,b]$. *Por outro lado, o estudo dos métodos de integração de função evoluiu, originalmente, a partir da noção de somas de riemann, quando integrais de funções ilimitadas, descontinuas e definidas em intervalos do tipo* $(a,b]$, $[a,b)$, $(-\infty,b]$ *e* $[a,+\infty)$, *passaram a ser objeto de estudo. Deste modo, neste artigo, trazemos a discussão de exemplos que detêm o potencial de uma exploração diferenciada, desde que apoiada na tecnologia. Mostraremos que o software Geogebra permite a extração de profícuas informações conceituais, sobretudo de natureza geométrica. Seu uso possibilita suavizar a abordagem algorítimico-procedimental, a qual constitui uma característica questionada por especialistas. Num contexto mais amplo do ensino do Cálculo.*

1. Introdução

Reconhecidamente, os conceitos de limite, derivada e integral constituem os principais no contexto do Cálculo Diferencial e Integral a Uma Variável Real – CUV. De modo particular, quando tratamos da noção de integral, discutida nos livros de Cálculo, de modo *standard*, nos atemos ao estudo de funções contínuas, definidas em intervalos do tipo $[a,b]$, para a descrição da *integral de Riemann*. Por outro lado, quando lidamos com funções (contínuas) ilimitadas ou funções definidas em intervalos do tipo $(a,b]$ ou $[a,b)$, deparamos a definição atinente às *integrais impróprias*.

Assim, neste artigo, discutiremos e exemplificaremos situações envolvendo funções $f:(a,b]\to IR$ (resp. $f:[a,b)\to IR$), ilimitadas e contínuas. A partir das quais, definimos $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ (resp. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$), chamada de *integral imprópria*. Outrossim, a partir da exploração e significação, sobretudo de natureza geométrica e numérica, proporcionado pelo *software Geogebra*, evidenciaremos o significado e comportamento de convergência, divergência e, mesmo a possibilidade do comportamento de *indefinição* do objeto supracitado.

Por fim, acrescentamos a importância do domínio e entendimento das argumentações formais atinentes aos teoremas e propriedades (critérios de convergência) doravante discutidos, entretanto, a mera inspeção e reprodução de cadeias dedutivas de inferências lógicas, exigidas em cada demonstração, não asseguram um entendimento conceitual e intuitivo dos mesmos. Sendo assim, neste cenário, o *Geogebra* adquire um papel diferenciado, no sentido de potencializar determinadas abordagens e viabilizar a evolução de um raciocínio heurístico distinguido.

2. Sobre a noção de *integral imprópria*

Lima (2006, p. 140) explica, de modo sucinto, que, *integrais impróprias* podem ser de dois tipos: integrais de funções ilimitadas (definidas num intervalo limitado, porém não fechado) e integrais de funções definidas num intervalo ilimitado. No contexto do Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real – CUV, toda a discussão inicial da noção de integral, considera as funções do tipo $f:[a,b]\to IR$ contínuas no intervalo fechado. Deste modo, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ não se aplica a intervalos do tipo $[a,+\infty),(-\infty,b]$ ou $(-\infty,+\infty)$, e mesmo quando a função f é descontínua em algum ponto do intervalo $[a,b]$.

Por outro lado, antes da apresentação deste formalismo, vale comentar a ideia heurística (e intuitiva) subjacente a tal conceito. Neste sentido, Bloch (2011, p. 342) explica que supondo que possuímos uma função cujo domínio é $[a,b)$, "podemos pensar numa aproximação deste intervalo por meio de intervalos do tipo $[a,t]$, onde $t \in (a,b)$ e t é pensando como cada vez mais próximo do ponto $x=b$.". Deste modo, podemos definir a *integral imprópria* como "uma função de $[a,b)$, por meio da avaliação da integral ordinária de uma função em cada intervalo fechado $[a,t]$, e tomando limite de t se aproximando de b, se o limite existir." (BLOCH, 2011, p. 342).

Lima (2006, p. 142) define ainda a *integral imprópria* $\int_a^b f(x)dx$, de uma função $f:(a,b] \to IR$ ilimitada e contínua, como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$. Assim, em cada intervalo do tipo $[a+\varepsilon, b]$, f é contínua, logo, integrável. Todavia, acrescenta que "*o problema é saber se existe ou não o limite acima. Se ele existir a integral é convergente; se não existir o limite a integral é divergente*.".

O aspecto importante, pois, é a análise da convergência ou divergência. Para efeito de nossa discussão, vamos considerar um exemplo fornecido por Lima (2006, p. 143). Neste sentido, consideremos a integral $J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$. A argumentação do autor, totalmente de cunho algébrico, é descrita na condição em que $k \in IR$, cumpre $k^2 < 1$, então I converge. Lima (2006, p. 143) comenta que, para valores $0 \le x \le 1$, temos que $0 \le x \le 1 \therefore 0 \le x^2 \le x \le 1$, assim, $0 \le k^2 \cdot x^2 \le k^2$. Segue que $1-k^2 \le 1-k^2 \cdot x^2 \therefore \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = K$, para todo $k^2 < 1$. Assim, ele compara os termos: $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \le \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-k^2x^2)}} \le K \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Segue que podemos, então, comparar as integrais $J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \le J_2$, onde

$$J_2 = K\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = K \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = K \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[arcsen(x)\right]_0^{1-\varepsilon} = K \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[arcsen(1-\varepsilon)\right].$$

Fazendo as contas, inferimos que $J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \le J_2 = \frac{\pi}{2}$.

A declaração tácita do autor assegura a convergência da integral J_1. Na figura abaixo, descrevemos os gráficos das funções $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ e $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Com o ajuste do controle deslizante do *software Geogebra*, podemos analisar o comportamento numérico das integrais J_1 e J_2, para valores $0\le x<1$ ($J_1\le J_2$).

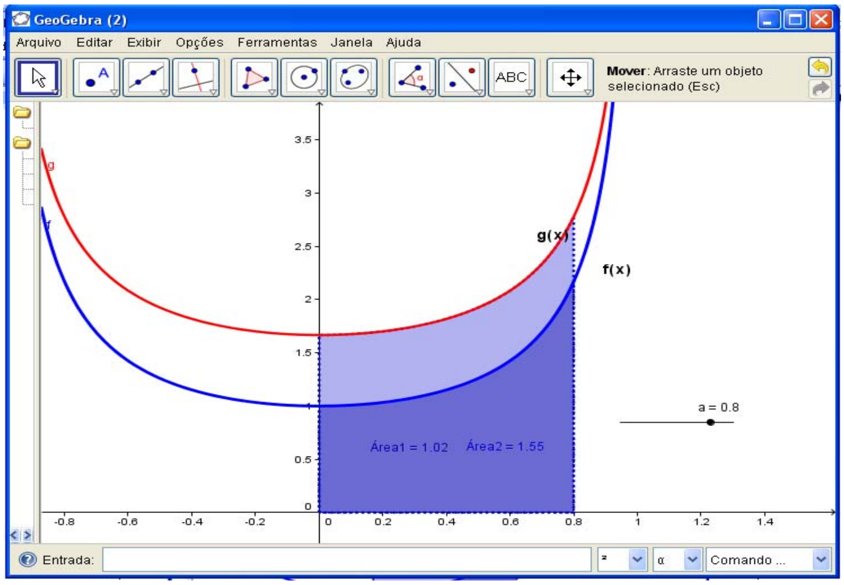

Figura 1: Descrição geométrica de convergência

Consideremos agora a seguinte integral $J_3=\int_0^{\infty}\dfrac{sen(x)dx}{x}$. Reparemos que a função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(x)}{x} & \text{se x} \neq 0\\ 0 \text{ se x=0}\end{cases}$. Neste caso, vamos definir $a_0=\int_0^{\pi}\dfrac{sen(x)dx}{x}, a_1=-\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{sen(x)dx}{x}, a_2=-\int_{2\pi}^{3\pi}\dfrac{sen(x)dx}{x},...,...$. Assim, passamos a considerar a série $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ descrita por meio dos números $a_i's$ assim definidos. Segue, pelo critério de Leibniz (LIMA, 2006, p.40) que podemos verificar a seguinte condição $a_{i+1}\le a_i$, seguindo a substituição $x\mapsto x-\pi$ indicada em Hairer & Wanner (2008, p. 258), converge. A interpretação geométrica deste resultado é colocada em destaque na figura 2. Nela, divisamos regiões, nas quais, consideramos regiões abaixo do eixo Oy.

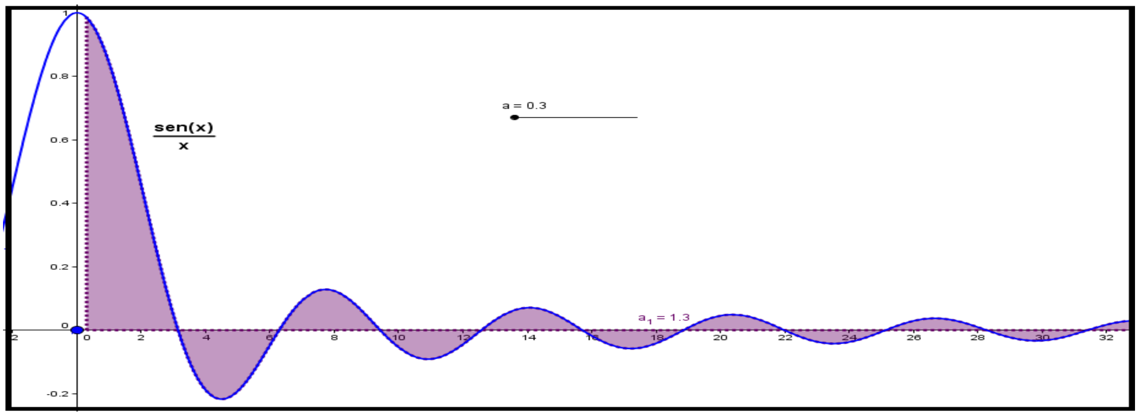

Figura 2: Interpretação geométrica do comportamento da integral imprópria e sua convergência

O resultado que garante a produção de uma ilação a respeito do comportamento da integral J_3 é evidenciado a partir do enunciado do seguinte teorema, demonstrado em Hairer & Wanner (2008, p. 259). Apresentamos, pois, seu enunciado.

Teorema (Maclaurin, 1742): Dado uma função $f(x) \geq 0$ não crescente em $[1,\infty)$, então teremos: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} \text{f(x)dx}$ converge .

Vale comentar que em Binmore (1977, p. 134) encontramos o teorema.

Teorema (Euler-Maclaurin): Dada uma função $f(x)$ contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$. Então, a sequência definida por $\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$ é decrescente e limitada inferiormente por zero. Ademais, converge.

Neste sentido, Binmore (1977, p. 134-135) comenta que sendo f decrescente, para qualquer $k \in IN$, escrevemos: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$. Assim, escrevemos:

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx \right\} - \left\{ \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \right\} = \left\{ f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \right\}.$$

Segue que $\Delta_{n+1} - \Delta_n \leq f(n+1) - f(n+1) = 0 \therefore \Delta_{n+1} \leq \Delta_n$ e a sequência $\{\Delta_n\}_{n\in IN}$ decresce. Ademais, se tem: $\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = f(n) > 0$. Então $\{\Delta_n\}_{n\in IN}$ é limitada inferiormente e monótona (não-crescente). Conclusão, convergirá.

Por fim, Hairer & Wanner (2008, p. 260), comentam que seria imprudente definirmos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx$, se tal limite existisse. Tal procedimento causaria incorrermos em procedimentos sem sentido matemático. De fato, escrevendo

$z = x+1 \therefore dz = dx$. Assim, se tem $\int_{-\infty}^{\infty} z dz = \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0$ enquanto que $\int_{-\infty}^{\infty} (x+1) dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} [2\varepsilon] = \infty$. Deste modo, deparamos a seguinte definição $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$ existe, se ambas as integrais do lado direito existirem.

Para concluir esta seção, destacamos ainda que alguns autores de livros de História da Matemática, como o caso de Botazzinni (1986), que indica o interesse peculiar manifestado por A. Cauchy pelas integrais impróprias, chamadas por ele, segundo Botazzinni (1986, p. 136) por "*singular integrals*" e devotou boa parte ao seu estudo. Neste sentido, o autor recorda que Cauchy calculou e analisou o comportamento da seguinte integral $\int_0^{\infty} \frac{x \cdot \cos(ax)}{sen(bx)} \frac{dx}{1+x^2}$. Os trabalhos de Cauchy ofereceram impulso ao estudo das integrais, quando deu indicações de extensão do método, ao estudar funções que apresentavam descontinuidades. Neste sentido, Boyer (1959, p. 280) recorda que se "uma função $f(x)$ é descontínua num ponto X_0 do intervalo de x_0 para X, a integral definida, definida como limite, é descrita pela soma $\int_{x_0}^{X_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{X_0+\varepsilon}^{X} f(x)dx$, quando ε se torna indefinidamente pequeno." (BOYER, 1959, p. 280).

Deste modo, numa perspectiva semelhante à de Grattan-Guiness (1978, p. 279) quando adverte que a ordem de apresentação das teorias formais em Matemática se mostra justamente no caminho inverso da descoberta histórica. No próximo segmento, discutiremos situações que permitem uma apresentação do que Grattan-Guiness (1978, p. 279-280) chama de "heuristic presentation" (apresentação heurística). Em seu entendimento, deparamos apresentações formais ou históricas de teorias e, uma apresentação heurística estaria num local intermediário.

3. Discussão da noção de convergência e divergência com o auxílio do *Geogebra*

Vamos considerar, inicialmente, as seguintes integrais: $I_1 = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x-3}$ e $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)dx$.

O segundo caso foi tomado com inspiração no comentário de Bloch (2011, p. 345) que pontua um erro recorrente nesta categoria de integral. Neste caso, o erro se manifesta ao tomar de modo simultâneo o limite de números negativos e positivos, ao mesmo tempo. Em termos analíticos, escrevemos a impropriedade:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \cos(x)dx = \lim_{t\to\infty} \left[sen(x) \right]_{x=-t}^{x=t} = \lim_{t\to\infty} \left[sen(t) - sen(-t) \right] = \lim_{t\to\infty} \left[2sen(t) \right].$$

Neste caso, cabe nos atermos às terminologias estabelecidas na seção anterior e distinguir/diferenciar o comportamento de divergência do comportamento indefinido. Com efeito, ao considerar $I_1 = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x-3}$, escrevemos, segundo a definição $I_1 = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x-3} = \lim_{t \to +\infty} \int_4^{t} \frac{dx}{x-3} = \lim_{t \to +\infty} \left[\ln|t-3| - 0 \right] = +\infty$ (diverge), pois, reparemos que tal limite possui o mesmo comportamento de $\lim_{x \to +\infty} \ln|x-3| = +\infty$ (ver figura 1) e, com base no gráfico (em vermelho) abaixo, concluímos que o mesmo não existe.

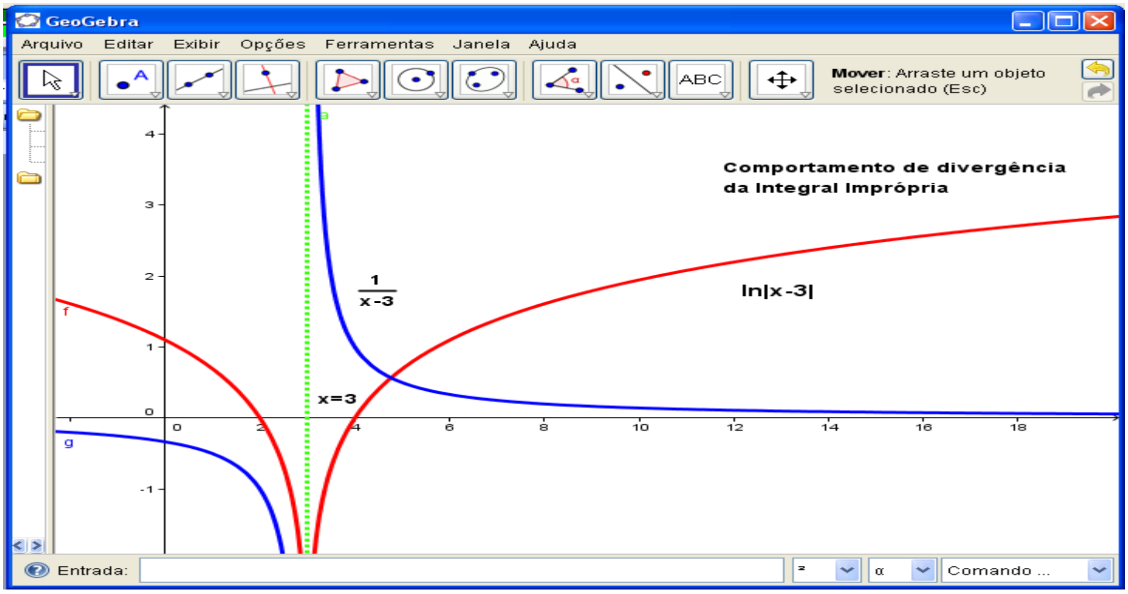

Figura 3: A descrição do comportamento de divergência da integral imprópria

Uma análise numérica detém uma importância didática, sobretudo, na condução do melhor entendimento do símbolo $I_1 = \int_4^{\infty} \frac{dx}{x-3} = +\infty$. Isto significa dizer, formalmente, que: para cada número real $M > 0$, obtemos um valor suficientemente grande de $x \in IR$, com $x > 4$, de maneira que $\int_4^{x} \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| > M$. Por exemplo, se $M = 1000 = 10^3$, podemos considerar $\int_4^{10^{500}} \frac{dx}{x-3} = \ln\left|10^{500} - 3\right| \cong 1151{,}292 > M = 1000$.

Antes de apresentar alguns resultados formais na próxima seção, consideraremos a seguinte integral $\int_{2\pi}^{\infty} \frac{sen(x)}{x^2} dx$ e buscamos prever seu comportamento, apenas com o apoio em seu comportamento gráfico. A seguinte desigualdade é empregada $-\frac{1}{x^2} \le \frac{sen(x)}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$. Hirst (2006, p. 167) fornece uma argumentação informal e intuitiva, quando declara que “no gráfico, podemos ver que a área total é finita [...]

Assim, a integral pode ser encontrada por meio da subtração da área total sobre o eixo Ox pela área abaixo do eixo Ox, sendo assim finita.”.

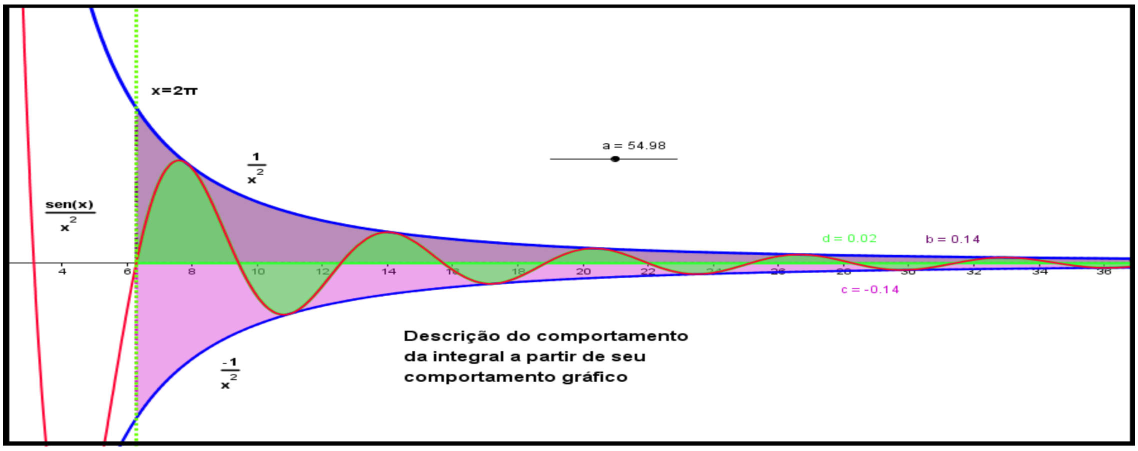

Figura 4: Hirst (2006, p. 166-167) discute o comportamento geométrico das funções integrandas

5. Considerações Finais

Como pudemos constatar, a partir de um breve relato dos aspectos históricos, o surgimento e a sistematização da noção de *integral imprópria* exigiu, por parte de vários matemáticos do passado, esforço intelectivo e, sobretudo, momentos de incompreensão ao lidar com este novo objeto.

Alguns conceitos necessários ao entendimento desta noção tais como, o comportamento geométrico e a noção vinculada de convergência, podem ser extraídos a partir do uso e exploração do *software Geogebra*. Deste modo, a partir dos gráficos exibidos, proporcionamos ao estudante o entendimento heurístico das situações que discutimos envolvendo a noção de *integral imprópria*.

Referências

BINMORE, E. G. (1977). *Mathematical Analysis: a straightforward approach*. London: Cambridge University Press.

BLOCH, Ethan, D. (2011). *The Real Numbers and Real Analysis*. New York: Springer.

BOTAZZINNI, Umberto. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. London: Springer Verlag.

BOYER, Carl. B. (1959). *The concepts of the Calculus: a critical and historical discussion of the derivative and the integral*. New York: Columbia University Press.

GUINNESS-GRATTAN, Ivor. (1978). *On the relevance of the History of Mathematics in Mathematics Education*, v. 9, nº 3, 275-285.

HAIRER, E. & WANNER, G. (2008). *Analysis by Its History*. New York: Springer.

HIRST, Keith, E. (2006). *Calculus in one variable*. New York: Springer.

LIMA, Elon. L. (2006). *Análise Real*, v. 1, Rio de Janeiro: SBM.